als dafs der Schwinkel des Objectes vergrößert wird; folglich wird die Zeichnung in demselben Verhältnisse größer, als dieser Winkel vergrößert worden ist.

VI. *Beitrag zur Dioptrik optisch einaxiger Krystalle; von Beer in Bonn.*

Wir behandeln hier die Frage, welches die Bewegung, des in einem einaxigen Krystalle außerordentlich gebrochenen Strahles sey, wenn der einfallende Strahl um das Einfallslot rotirt. Man denke sich in Fig. 4 Taf. III die Huyghens'sche Construction ausgeführt. XX' ist die brechende Fläche der nach unten liegenden Krystallmasse, PQ die einfallende, RT die außerordentlich gebrochene Welle, also SP der einfallende, PT der außerordentliche Strahl. Wir legen ein rechtwinkliges Coordinatensystem zu Grunde, dessen Z -Axe in das Loth AL , und dessen X -Axe in den Durchschnitt der Einfall- und der brechenden Ebene fällt. Gehen wir von der Lage aus, wo die Einfallsebene dem Hauptschnitte der Platte parallel ist, so hat man, unter u , v , w die Cosinus der Winkel verstanden, welche die optische Axe mit den Coordinatenachsen einschließt, $v=0$, und die Gleichung der außerordentlichen Wellenfläche wird:

$$W \equiv a(x^2 + y^2 + z^2) + b(ux + wz)^2 - 1 = 0.$$

Bezeichnen wir mit x' , y' , z' die Coordinaten des Berührungspunktes der Wellenebene und der Wellenfläche, so ist die Gleichung jener:

$$\frac{dW}{dx'}(x - x') + \frac{dW}{dy'}(y - y') + \frac{dW}{dz'}(z - z') = 0.$$

Der Durchschnitt dieser Ebene und der brechenden Ebene hat im Systeme XY die Gleichung:

$$L \equiv \frac{dW}{dx'}(x-x') + \frac{dW}{dy'}(y-y') + \frac{dW}{dz'}(-z') = 0.$$

Und diese Durchschnittslinie muß offenbar, wenn wir den einfallenden Strahl um das Loth rotiren lassen, ohne den Incidenzwinkel i zu ändern, fortwährend den Kreis berühren, den man in der brechenden Ebene um P als Centrum mit dem Radius $PR=r$ beschreiben kann. Die Gleichung dieses Kreises im Systeme XY ist:

$$k \equiv x^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

Und damit dieser Kreis von der Geraden L berührt werde, muß seyn:

$$\frac{\left[x' \frac{dW}{dx'} + y' \frac{dW}{dy'} + z' \frac{dW}{dz'} \right]^2}{\left(\frac{dW}{dx'} \right)^2 + \left(\frac{dW}{dy'} \right)^2} = r^2$$

Nun ist aber:

$$x' \frac{dW}{dx'} + y' \frac{dW}{dy'} + z' \frac{dW}{dz'} = 2 \quad \text{und} \quad \left(\frac{dW}{dx'} \right)^2 + \left(\frac{dW}{dy'} \right)^2 = [2ax' + 2bu(ux' + wz')]^2 + (2ay')^2,$$

folglich haben wir:

$$\frac{1}{r^2} - [ax' + bu(ux' + wz')]^2 + a^2 y'^2 = 0.$$

Aus dieser Gleichung und der Gleichung W , die ebenfalls von den Coordinaten x' , y' , z' befriedigt werden muß, leitet man leicht die folgende ab:

$$K \equiv x^2 \left[a + bu^2 - \frac{1}{r^2} \right] \left[a + bu^2 \right] + y^2 \left[a - \frac{1}{r^2} \right] a + z^2 \left[b^2 u^2 w^2 - \frac{a + bu^2}{r^2} \right] + 2xz \left[a + bu^2 - \frac{1}{r^2} \right] buw = 0.$$

Sie stellt einen Kegel des zweiten Grades dar, dessen Spitze in P liegt, und somit haben wir den Satz:

Beschreibt der einfallende Strahl um das Einfallslot als Axe einen Rotationskegel, so beschreibt der außerordentlich gebrochene Strahl einen elliptischen Kegel, von dessen Hauptschnitten einer in den optischen Hauptschnitt zu liegen kommt.

Dieses Theorem ist übrigens nur ein besonderer Fall des folgenden allgemeineren:

Beschreibt der einfallende Strahl um das Einfallslot als Axe einen Kegel des zweiten Grades, so bewegt sich der außerordentlich gebrochene Strahl ebenfalls auf dem Mantel eines Conus vom zweiten Grade.

Da wir aber hier bloß den einfacheren Fall betrachten wollen, so bemerken wir nur noch, daß sich der Beweis des allgemeineren zunächst auf die beiden folgenden, auch an und für sich nicht uninteressanten geometrischen Lehrsätze stützt. 1) *Beschreibt man um die Tangenten eines Kegelschnittes Rotationscylinder von ein und demselben Radius, und legt an diese von dem Mittelpunkte aus Tangentialebenen, so umhüllen diese einen Kegel des zweiten Grades, sowie auch die im Mittelpunkte auf die Berührungsebenen errichteten Normalen einen Kegel des zweiten Grades bilden.* Die gemeinsame Axe der Supplementskegel steht im Mittelpunkte auf dem Kegelschnitte senkrecht. 2) *Legt man an eine ebene Curve des zweiten Grades und eine Fläche des zweiten Grades, die concentrisch sind, Berührungsebenen, so liegen die Punkte, in denen die Fläche berührt wird, auf einem Kegel des zweiten Grades, welcher der Curve und der Fläche concentrisch ist.*

Um die näheren Verhältnisse des oben erwähnten Kegels zu finden, schneiden wir ihn zunächst mit einer Ebene, die der brechenden Ebene parallel und von ihr um die Längeneinheit entfernt ist. Die Gleichung der elliptischen Durchschnittslinie, auf die XY -Ebene projicirt, ist, wenn die aufeinanderfolgenden Coëfficienten in der Gleichung K mit A, B etc. bezeichnet werden:

$$E \equiv Ax^2 + By^2 + C - Dx = 0.$$

Bezeichnen wir nun die auf dem Hauptschnitte senkrechte Axe der Ellipse E durch α und die zweite im Hauptschnitte gelegene durch β , so ist:

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{A}{B} = \frac{\left[a + bu^2 - \frac{1}{r^2} \right] \left[a + bu^2 \right]}{a \left[a - \frac{1}{r^2} \right]}.$$

Ohne die Allgemeinheit zu stören können wir noch in Fig. 4 Taf. III. $QR=1$ setzen; alsdann wird:

$$\frac{1}{r} = \sin i, \quad a = \varepsilon^2, \quad b = \omega^2 - \varepsilon^2,$$

wenn ω und ε den ordentlichen und außerordentlichen Hauptbrechungsquotienten der Krystallplatte ist. Somit können wir schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^2}{\beta^2} &= \frac{[\varepsilon^2 \omega^2 + \omega^2 u^2 - \sin^2 i^2][\varepsilon^2 \omega^2 + \omega^2 u^2]}{\varepsilon^2 [\varepsilon^2 - \sin^2 i^2]} \\ &= \frac{\left[1 + \left(\frac{\omega^2}{\varepsilon^2} - 1\right) u^2 - \frac{\sin^2 i^2}{\varepsilon^2}\right] \left[1 + \left(\frac{\omega^2}{\varepsilon^2} - 1\right) u^2\right]}{1 - \frac{\sin^2 i^2}{\varepsilon^2}}. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck zeigt an, daß $\alpha > \beta$ wird, wenn $\omega > \varepsilon$ ist, sowie daß für $\omega < \varepsilon$ auch $\alpha < \beta$ wird. In einem negativen Krystalle liegt also vom Kegel K der Hauptschnitt der größten Oeffnung senkrecht zum optischen Hauptschnitte, und in einem positiven Krystalle fallen diese Hauptschnitte zusammen.

Ferner sieht man leicht ein, daß das Axenverhältniß der Ellipse E in einem negativen Krystalle bei senkrechter Incidenz ein Minimum, und bei der streifenden Incidenz ein Maximum wird, sowie, daß sich diese Verhältnisse bei einem positiven Krystalle umkehren.

Bei der senkrechten Incidenz geht jedoch immer der Kegel K in eine gerade Linie über und verschwinden die Halbaxen α und β . Nehmen wir für unsere Platte ein natürliches Kalkspathrhomboëder, so wird:

$$\arccos \omega = 44^\circ 37', \quad \arccos u = 45^\circ 23'.$$

Und für den mittleren Strahl E ergeben sich bei den Incidenzen 0° , 45° , 90° folgende Werthe für das Verhältniß $\frac{\alpha}{\beta}$:

$$1,1227, \quad 1,1404, \quad 1,1721.$$

Die Werthe des Ausdruckes $a + b u^2 = \varepsilon^2 + (\omega^2 - \varepsilon^2) u^2$ liegen immer zwischen ε^2 und ω^2 , und somit kann in der Gleichung K der Coëfficient von xz nur verschwinden, d. h. es kann die Axe des Kegels K nur dann mit dem Einfalls-

lothe zusammenfallen, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

$$1) b=0, 2) u=0, 3) w=0.$$

In dem ersten Falle wird das Mittel einfach brechend, und geht der elliptische Conus in einen Rotationskegel über. Letzteres tritt auch im zweiten Falle ein, wo die optische Axe auf der brechenden Fläche senkrecht steht. In dem dritten Falle aber, wo die optische Axe in der brechenden Fläche liegt, bewahrt der Conus seine Ellipticität. Wir haben dann:

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{\omega^2(\omega^2 - \sin^2 i)}{\epsilon^2(\epsilon^2 - \sin^2 i)}.$$

Diese Formel liefert bei einer mit der optischen Axe parallel geschnittenen Kalkspathplatte folgende Werthe für des Axenverhältniſs $\frac{\alpha}{\beta}$ bei den drei Incidenzen 0° , 45° und 90° :

$$1,2321, 1,2845, 1,3472.$$

Setzen wir in der Gleichung der Ellipse E $y=0$, so sind die Wurzeln der resultirenden quadratischen Gleichung die Entfernungen s_1 und s_2 der im optischen Hauptschnitte gelegenen Scheitel der Ellipse E vom Einfallslothe. Wir finden für sie:

$$s = \frac{D}{2A} \pm \sqrt{\left(\frac{D}{2A}\right)^2 - \frac{C}{A}}$$

Die Entfernung des Mittelpunktes der Ellipse E vom Einfallslothe ist hiernach:

$$\frac{1}{2}(s_1 + s_2) = \frac{D}{2A} = \frac{buw}{a+bu^2}.$$

Dieser Ausdruck ist vom Incidenzwinkel i unabhängig, also bewahrt der Mittelpunkt der Ellipse E in ein und derselben Krystallplatte bei jeder Incidenz dieselbe Lage.

Die in dem Ausdrucke für s vorkommende Gröſſe A ist positiv, somit wird der eine Werth von s größer als Null, gleich Null, oder kleiner als Null, je nach dem $C > 0$, oder $= 0$, oder < 0 ist. Je nach dem eine dieser Bedingungen erfüllt ist, liegt also der Kegel der außer-

or-

ordentlichen Strahlen ganz auferhalb des Lothes, geht er durch letzteres, oder umschließt er es. Man findet leicht, daß jene Bedingungen bezüglich durch die drei folgenden ersetzt werden können:

$$\sin i^2 \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} \frac{(\omega^2 - \epsilon^2)^2}{\frac{\omega^2}{u^2} + \frac{\epsilon^2}{w^2}}.$$

Diesem entsprechend findet man bei einem natürlichen Kalkspatrhomboëder:

$$i \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} 10^\circ 3'.$$

Fällt also ein Lichtstrahl im Hauptschnitte des Rhomboëders von der einen (leicht zu findenden) Seite her unter der Incidenz $10^\circ 3' 53''$ auf, so steht der außerordentlich gebrochene Strahl senkrecht auf der Platte und wird somit stärker abgelenkt als der ordentlich gebrochene. In dem Obigen liegt der allermeist in den Lehrbüchern übersehene Umstand implicirt, daß derselbe Krystall für Strahlen sowohl attractiv oder positiv, als auch repulsiv oder negativ, seyn kann. In Bezug auf die Normalen der Wellen hält sich jedoch die Unterscheidung positiver und negativer Krystalle streng aufrecht.

Aus den gefundenen Werthen von s_1 und s_2 läßt sich leicht die Oeffnung des Kegels K im optischen Hauptschnitte ableiten. Bezeichnen wir diese nämlich mit δ , so ist:

$$\tan \delta = \frac{\sqrt{D^2 - 4AC}}{A+C} = \frac{2\epsilon\omega \sin i \sqrt{\omega^2 u^2 + \epsilon^2 w^2 - \sin i^2}}{\omega^4 u^2 + \epsilon^4 w^2 - (\omega^2 + \epsilon^2) \sin i^2}.$$

Mittelst derselben Ausdrücke findet man auch die Lage der Kegelaxe. Schließt sie mit dem Einfallslothe den Winkel φ ein, so ist

$$\begin{aligned} \tan 2\varphi &= \frac{-B}{A-C} \\ &= -\frac{2(\omega^2 - \epsilon^2)(\omega^2 u^2 + \epsilon^2 w^2 - \sin i^2)uw}{\epsilon^2(\epsilon^2 + 2[\omega^2 - \epsilon^2]u^2) + (\omega^2 - \epsilon^2)([\omega^2 - \epsilon^2]u^2 - \sin i^2)(u^2 - w^2)}. \end{aligned}$$

Der Zähler dieses Ausdruckes kann nur mit dem Producte $(\omega^2 - \epsilon^2)uw$ verschwinden. Die Axe des Kegels fällt also nur dann mit dem Lothe zusammen, wenn 1) das Mittel einfach brechend wird, 2) die optische Axe in der bre-

chenden Fläche liegt, 3) die optische Axe auf der brechenden Fläche senkrecht steht.

Wir wollen noch untersuchen, in welchem Verhältnisse die Rotation des einfallenden Strahles um das Loth zu der des gebrochenen steht. Es seyen wieder x', y', z' die Coordinaten des Berührungspunktes der gebrochenen Welle und des Berührungspunktes, und x_1, y_1 seyen die Coordinaten des Punktes, in dem der zu Anfang erwähnte Kreis k von der der Welle entsprechenden Geraden L berührt wird. Der Winkel $\varrho = \arctang \frac{y_1}{x_1}$ misst dann die Rotation des einfallenden Strahles um das Loth, sowie $\sigma = \arctang \frac{y'}{x'}$ die des außerordentlich gebrochenen Strahles. Man hat nun:

$$ax' + bu(ux' + wz') = \frac{x_1}{r^2}, \quad ay' = \frac{y_1}{r^2},$$

woraus folgt:

$$ux' + wz' = \frac{\frac{x_1}{r^2} - ax'}{bu}, \quad y' = \frac{y_1}{ar^2}, \quad z' = \frac{\frac{x_1}{r^2} - (a + bu^2)x'}{buw}.$$

Und diese Werthe in die Gleichung W der Wellenfläche gesetzt, kommt:

$$\begin{aligned} & x'^2 \cdot a(a + b)(a + bu^2) - 2x' \cdot a(a + b) \frac{x_1}{r^2} \\ & = b^2 u^2 w^2 \left(1 - \frac{y_1^2}{ar^4}\right) - (a + bw^2) \frac{x_1^2}{r^4}. \end{aligned}$$

Das erste Glied dieser Gleichung dividiren wir mit y'^2 , das zweite durch den gleichen Werth $\frac{y'y_1}{ar^2}$ und das letzte durch den ebenfalls gleichen Werth $\frac{y_1^2}{a^2 r^4}$. Auf diese Weise erhalten wir, indem wir letztlich der Uebereinkunft gemäß $\frac{y'}{x'} = \tan \sigma$ und $\frac{y_1}{x_1} = \tan \varrho$ setzen:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tan^2 \sigma^2} (a + b)(a + bu^2) - \frac{1}{\tan \sigma \cdot \tan \varrho} (a + b) + \frac{1}{\tan^2 \varrho^2} a(a + bw^2) \\ & = b^2 u^2 w^2 \left(\frac{ar^2}{\sin^2 \varrho} - 1 \right). \end{aligned}$$

In dem besonderen Falle, wo die optische Axe in der

brechenden Fläche liegt, ergibt sich die einfache Beziehung:

$$\frac{\tan \varrho}{\tan \sigma} = \frac{\epsilon^2}{\omega^2},$$

in Worten: *Bei einer der optischen Axe parallel geschnittenen Krystallplatte bleibt das Verhältniß zwischen den Tangenten der Winkel, welche die Projectionen des einfallenden und außerordentlich gebrochenen Strahles auf der brechenden Fläche zurücklegen, constant, und zwar ist sein Werth dem Quadrate des Quotienten der beiden Hauptbrechungsindices gleich.*

Auch die Normale der außerordentlichen Wellen beschreibt, wenn der einfallende Strahl in der oben angegebenen Weise rotirt, einen Kegel des zweiten Grades. Es ergibt sich dies leicht aus dem folgenden geometrischen Lehrsatz: *Legt man in den Punkten der Durchschnittslinie zweier concentrischen Flächen des zweiten Grades an die eine und andere von ihnen Tangentialebenen, so bilden die vom gemeinsamen Mittelpunkte auf diese Ebenen herabgelassenen Perpendikel einen Kegel des zweiten Grades.* Indem wir zusammenfassen erhalten wir folgenden allgemeinen bemerkenswerthen dioptrischen Lehrsatz:

Beschreibt ein Lichtstrahl, der auf eine optisch-einaxige doppeltbrechende Krystallplatte trifft, um das Einfallslith als Axe einen Kegel des zweiten Grades, so beschreiben der ordentlich und außerordentlich gebrochene Strahl, sowie die Normalen der ordentlich und außerordentlich gebrochenen Wellen ebenfalls einen Kegel des zweiten Grades.

Wenn man, ohne den einfallenden Strahl zu ändern, die Krystallplatte um das Einfallslith rotiren läßt, so bewegt sich der außerordentliche Strahl auf dem des Weiteren besprochenen elliptischen Conus, während gleichzeitig die Axe des letzteren mit derselben Geschwindigkeit wie die Platte rotirt und um deren Normale als Axe einen Rotationskegel beschreibt. In Folge dieser doppelten Bewegung beschreibt der außerordentliche Strahl einen Kegel,

dessen Betrachtung wohl zu keinem einfachen Resultate führen dürfte.

VII. *Ueber einige barometrische Beobachtungen
und die Folgerungen zu denen sie veranlassen;
von A. Erman.*

Fast ebenso lange als die Abhängigkeit ermittelt ist, die zwischen den Barometerständen und Lufttemperaturen an zweien Punkten einerseits, und dem Unterschiede ihres Abstandes vom Meeresniveau oder sogenannten Höhenunterschiede von der andern Seite stattfindet, hat man auch anerkannt, daß dieselbe nur dann gilt, wenn der Theil der Atmosphäre, der jene Punkte enthält, während der Beobachtungen im Zustande des Gleichgewichts ist. In einer bewegten Luftmasse können namentlich die Niveaulächen oder Oberflächen gleichen Druckes, von *horizontalen Oberflächen* verschieden seyn, und schon dadurch der, unter der entgegengesetzten Voraussetzung, aus zwei gleichzeitigen Barometerablesungen geschlossene Höhenunterschied um so fehlerhafter werden, je weiter die Verticalen durch beide Beobachtungspunkte von einander abstehen. — Die Vorschrift, daß man die zu vergleichenden Punkte *möglichst nahe an einerlei Verticale* zu wählen habe, enthielt eine Anerkennung jenes Umstandes. Da aber eine *strenge* Befolgung dieser Vorschrift kaum jemals, und selbst eine *angeneherte* nur unter äußerster Beschränkung der Nutzbarkeit des barometrischen Höhenmessens möglich ist, so hat man bald noch andere Mittel gesucht, um, trotz beliebiger Gestaltung der momentanen Oberflächen gleichen Luftdrucks, aus beobachteten Werthen, auf den richtigen Höhenunterschied zu schließen. — Das gewöhnlichste und am längsten übliche bestand darin, daß man die Barometerablesungen und Temperaturbeobachtungen an den zu vergleichenden