Über das Sinus-Cosinusquadrat-Gesetz von *Malus*. Von *J. Wilsing*.

Abweichungen systematischer Art, welche bei einer Vergleichung der Sonnenstrahlung und der Strahlung des schwarzen Körpers¹⁾ auftraten, veranlaßten mich zu einer Untersuchung der bei den Messungen benutzten Helligkeitsskala, welche auf der Gültigkeit des *Malusschen* Sinusquadratgesetzes beruhte. Bei der ausgedehnten Anwendung, welche besonders der Kalkspat bei der Konstruktion von Photometern gefunden hat, dürfte ein Hinweis auf diese Arbeit gestattet sein, da der folgende historische Rückblick zeigt, daß die experimentelle Prüfung des *Malusschen* Gesetzes bisher nicht als erschöpfend bezeichnet werden kann.

*Malus*²⁾ stellte über das Verhältnis der Lichtintensitäten des gewöhnlichen und des ungewöhnlichen Strahls in einem doppelbrechenden Kristall die folgenden Sätze auf:

1. Die Intensität des einfallenden natürlichen Lichts $\mathcal{F}$ verteilt sich gleichmäßig auf den ordentlichen und den außerordentlichen Strahl, sodaß $\mathcal{F}_o = \frac{1}{2}(m\mathcal{F})$, $\mathcal{F}_e = \frac{1}{2}(m\mathcal{F})$ ist, wo m den Verlust durch Reflexion bezeichnet.

2. Ein in der Einfallsebene polarisierter Strahl P zerlegt sich im Kristall in zwei senkrecht aufeinander polarisierte Bündel $Pm \cos^2 \varphi$ und $Pm \sin^2 \varphi$, wo φ der Winkel zwischen der Einfallsebene und dem Hauptschnitt ist.

Malus selbst hat eine experimentelle Prüfung seines Gesetzes nicht vorgenommen, sondern scheint sich nach *Aragos* Bemerkung auf die Wahrnehmung beschränkt zu haben, daß die Helligkeiten der beiden Bilder für $\varphi = 45^\circ$ gleich werden und für $\varphi = 0^\circ$ bzw. $\varphi = 90^\circ$ abwechselnd verschwinden. *Arago*³⁾ veranlaßte deshalb in Voraussicht der Bedeutung, welche die Gesetzmäßigkeit der Helligkeitsänderungen des polarisierten Lichts für die Photometrie erlangen würde, *Laugier* und *Petit* zu einer experimentellen Prüfung des Sinusquadratgesetzes. Hierzu diente ein Polarisoskop, das im polarisierten Lichte Farbenerscheinungen zeigte, und eine Glassäule. Zunächst wurden diejenigen Neigungen der Säule ermittelt, bei welchen das partiellpolarisierte Licht, das von einer Crown Glasplatte unter bestimmten Winkeln reflektiert bzw. durchgelassen wurde, in natürliches Licht überging. Die Strahlung, welche bei diesen Stellungen durch die Glassäule ging, war dann komplementär d. h. in gleicher Weise partiell polarisiert, wie die von der Crown Glasplatte durchgelassene bzw. reflektierte Strahlung. Da nun nach dem *Aragoschen* Gesetz die Intensitäten der polarisierten Anteile im reflektierten und durchgehenden Bündel gleich sind, so war zur Prüfung des *Malusschen* Gesetzes nur der

Quotient jener Verhältniszahlen zwischen polarisiertem Anteil und Gesamtlicht durch Drehung der Bergkristallplatte im Polarisoskop zu bestimmen und mit dem zuvor durch besondere Messungen gefundenen Verhältnis der Intensitäten des reflektierten und des durchgehenden Bündels zu vergleichen. *Arago* zeigte, daß das Verhältnis des polarisierten Anteils zum Gesamtlicht unter der Voraussetzung der Gültigkeit des *Malusschen* Gesetzes durch $\cos 2\varphi$ ausgedrückt wird, wenn φ den Winkel zwischen dem Hauptschnitt des Bergkristalls im Polarisoskop und der Polarisationssebene des von der Glassäule herkommenden Lichts bezeichnet. Durch Bestimmung der Winkel φ , bei welchen die Farben im Polarisoskop verschwanden, konnte daher auch die Richtigkeit des *Malusschen* Gesetzes geprüft werden.

Später haben *Laugier* und *Petit* noch direkte Vergleichen der von einer Glasplatte unter verschiedenen Winkeln reflektierten Lichtmengen mittels eines von *Arago* angegebenen Photometers ausgeführt, indem sie die Helligkeit einer konstanten polarisierten Lichtquelle durch Drehung der Bergkristallplatte änderten. *Arago* gibt an, daß die nach dem *Malusschen* Gesetz aus den Messungen berechneten Intensitäten stets bis auf wenige Hundertstel genau mit der Tafel der reflektierten Lichtmengen übereinstimmen.

Allein diese schwierigen Messungen beschränken sich, wie schon *Wild* bemerkte, auf den Bergkristall. Beim Kalkspat, der eine erheblich stärkere Doppelbrechung besitzt und in photometrischer Beziehung wesentlich in Frage kommt, hat erst *Wild*⁴⁾ die *Malusschen* Gesetze und zwar direkt nur den ersten Satz experimentell untersucht. Er benutzte ein von ihm konstruiertes Photometer, bei welchem gleichfalls das Verschwinden von Farbenerscheinungen beobachtet wird.

Wild hat mit seinem Photometer die Größe K_1^2/K^2 (s. Anmerkung) für den Kalkspat bestimmt, indem er das Instrument gegen eine gleichmäßig beleuchtete Wand richtete und den Winkel φ zwischen den Hauptschnitten des polarisierenden Nicolprismas und des Kalkspats maß. Es ist dann das Verhältnis der zu vergleichenden Helligkeiten $i/i_1 = 1 = (K_1^2/K^2) \operatorname{tg}^2 \varphi = C \operatorname{tg}^2 \varphi$. Wäre der erste *Malus*-sche Satz streng anwendbar auf ein Bündel natürlichen Lichts, das einen Kalkspat passiert hat, so müßte C gleich der Einheit sein, während *Wild* $C = 1.0283$ fand; natürliches Licht verteilt sich daher nicht in gleicher Weise auf die beiden Bilder. Diese Zahl vergleicht *Wild* mit der *Neumannschen* Theorie, welche unter der Voraussetzung, daß kein Ab-

¹⁾ Publ. des Astrophys. Obs. Potsd. Bd. 22, Nr. 66.

²⁾ Théorie de la double réfraction. Paris, 1810.

³⁾ Franz *Aragos* sämtliche Werke. Herausgegeben von Dr. W. G. Hankel. Bd. 10.

⁴⁾ Annalen der Physik, Bd. 28. 1863.

Anmerkung. Die Darlegungen *Wilds*, welche die Theorie des Instruments geben, sind nicht einwandfrei, obgleich die Schlußformel, zu welcher er gelangt, richtig ist. Bei dem *Wildschen* Photometer gelangt die Strahlung von den beiden zu vergleichenden Lichtquellen, welche in einer geraden Linie zusammenstoßen, zu einem Nicolprisma. Die polarisierten Strahlen fallen auf ein Kalkspatprisma und werden von demselben durch Doppelbrechung so zerlegt, daß in der Nähe der Grenzlinie der von der einen Lichtquelle herrührende ordentliche Strahl mit dem außerordentlichen der anderen Lichtquelle zusammenfällt. Diese sich überdeckenden senkrecht zu einander polarisierten

sorptionsverlust stattfindet, für die Intensitäten der beiden aus einem linearpolarisierten Strahl im Kristall entstandenen Strahlen die Ausdrücke

$$O^2 = [16a^2/(1+a)^4] \cos^2 \varphi$$

$$E^2 = \frac{16[a^2 - (a^2 - c^2) \sin^2 \nu]}{1 + \sqrt{a^2 - (a^2 - c^2) \sin^2 \nu}} \sin^2 \varphi$$

liefert, in welchen a und c die reziproken Werte der Brechungsverhältnisse des ordentlichen und des außerordentlichen Strahls und ν die Neigung der kristallographischen Hauptachse gegen das Einfallslot bezeichnen, und findet durch Berücksichtigung von inneren Reflexionen im Kristall mit Hilfe dieser Gleichungen den Ausdruck

$$c = \frac{(1+a^2) \sqrt{(c^2 \sin^2 \nu + a^2 \cos^2 \nu)}}{a(1+c^2 \sin^2 \nu + a^2 \cos^2 \nu)}$$

Für den bei den Messungen benutzten Kalkspat, dessen Seiten den natürlichen Flächen parallel sein sollten, nimmt Wild $\nu = 44^\circ 34' 38''$ und berechnet dann die Größe c mit den Brechungsexponenten, welche dem optischen Teil des Spektrums, also den Linien D und E im Sonnenspektrum, entsprechen. Da der Mittelwert 1.02588, der für weißes Licht gilt, sehr nahe mit dem beobachteten Wert 1.0283 übereinstimmt, könnte man schließen, daß die Richtigkeit der Neumannschen Theorie und damit des Sinusquadratgesetzes durch diese Beobachtung eines speziellen Falles experimentell erwiesen sei, wenn nicht spätere Messungen W. Möllers¹⁾ ($c = 1.0113$) weniger gut mit der Theorie übereinstimmen.

Mit diesen Arbeiten scheint die Reihe der experimentellen Untersuchungen der Malusschen Sätze erschöpft zu sein; denn die eigenen zur Prüfung der Theorie angestellten Messungen Neumanns²⁾ erstrecken sich nur auf das Polarisationsazimut des auf eine Kalkspatfläche einfallenden Strahls in dem speziellen Falle, bei welchem der ordentliche bzw. außerordentliche Strahl verschwinden, und auf die Beziehungen zwischen den Polarisationsazimuten des einfallenden und des reflektierten Strahls, wenn der Winkel zwischen der Einfallsebene und dem Hauptschnitt 90° und der Inzidenzwinkel 45° sind. Diese Messungen, welche Neumann zur Berechnung der Intensitätsverhältnisse des reflektierten, des ordentlichen und des außerordentlichen Strahls benutzte, geben also nicht unmittelbar die Intensitäten der hier allein in Frage kommenden durchgehenden Strahlungen.

Die von mir ausgeführte Arbeit hat die Vergleichung

der Polarisationskala mit einer nach dem Entfernungsprinzip gewonnenen Helligkeitsskala zum Gegenstand. Vor dem Spalt eines Spektrographen war eine Kombination von zwei nach *Glan-Thompson* geschnittenen Nicolprismen befestigt, von denen das vordere der Lichtquelle zugewandte Prisma drehbar war. Als Lichtquelle diente eine Kreidefläche, welche von einer mit konstanter Stromstärke belasteten Nernstlampe beleuchtet wurde. Das Bild der gegen fremde Strahlung durch Schirme geschützten Kreidefläche wurde durch eine Linse in der Spaltebene des Spektrographen entworfen und erzeugte mittels eines stark brechenden Flintglasprismas in der Bildebene des dreilinsigen Kameraobjektivs von 55 cm Brennweite ein Spektrum, das bei einer Länge von 44 mm zwischen 0.4μ und 0.7μ vollkommen scharf war.

Nach den Untersuchungen von H. Wright³⁾ wirkt die Reflexion an gepreßten Pulvern depolarisierend; auch hier konnten in der von der stumpfen Kreidefläche diffus reflektierten Strahlung einer Tantalfadenlampe, welche einen merklichen Teil polarisierten Lichts enthielt, nur in der Richtung der normalen Reflexion mit dem Martenschen Polarisoskop noch sehr geringe Spuren polarisierten Lichts vermutet werden. Da nun im vorliegenden Falle bei senkrechter Inzidenz der nicht polarisierten Strahlung der Nernstlampe die unter einem Emanationswinkel von 50° diffus von der Kreide reflektierte Strahlung benutzt wurde, so ist das in die Nicolprismen eintretende Bündel als natürliches Licht zu betrachten.

Bei der Vergleichung der Intensitätsskalen wurde die Helligkeit der Kreidefläche durch Verschiebung der Nernstlampe längs einer Teilung geändert. Diese Änderungen wurden mit den Einstellungen am Intensitätskreise des Nicolprismas so kombiniert, daß die Schwärzung der Spektrogramme unter Voraussetzung der Gültigkeit des Sinusquadratgesetzes konstant bleiben mußte. Endlich wurden bei unveränderter Stellung des Nicolprismas, aber bei bekannten Entfernungsunterschieden von Lampe und Kreidefläche auf jeder Platte zwei Spektren aufgenommen, welche zur Bestimmung der Schwärzungsskala dienten. Nach jeder Aufnahme wurde die Kassette mit der Platte mittels Schlittenbewegung so weit verschoben, daß die zu vergleichenden Spektren durch einen Zwischenraum von 0.25 mm voneinander getrennt nebeneinander lagen. Zu den Aufnahmen dienten Panchromaticplatten von Wratten & Wainwright; die Entwicklung geschah mit Rodinal. Die Expositionszeit schwankte bei

¹⁾ Annalen der Physik, N.F., Bd. 24.

²⁾ Annalen der Physik, Bd. 40. 1837.

³⁾ Annalen der Physik, Bd. 1. 1900.

Bündel werden dann durch eine Bergkristallplatte noch einmal zerlegt, und schließlich werden die 4 Schwingungskomponenten durch ein zweites Nicolprisma wieder auf dieselbe Ebene gebracht. Bei der Berechnung der Amplitude der aus diesen 4 Komponenten resultierenden Schwingung scheint nun Wild übersehen zu haben, daß die von den verschiedenen Lichtquellen i und i_1 herrührenden Strahlen inkohärent sind, und daß nur die beiden von derselben Lichtquelle kommenden Komponenten, welche aus dem Bergkristall mit einem Phasenunterschied austreten, zur Interferenz gebracht werden können. In dem Wildschen Ausdruck für die Schwingungsamplitude müssen daher die mit dem Faktor $i i_1$ multiplizierten Glieder fortgelassen werden, sodaß, abgesehen von einem nach der Phase konstanten Ausdruck, nur ein von dem Phasenunterschied $\Delta_0 - \Delta_e$, welchen die Strahlen beim Durchgang durch die Bergkristallplatte erlangt haben, abhängiges Glied übrig bleibt. Der Faktor dieses Gliedes: $i^2 K^2 \cos^2 \varphi - i_1^2 K_1^2 \sin^2 \varphi$, wo φ den Winkel zwischen dem vorderen polarisierenden Nicolprisma und dem Hauptschnitt des Kalkspats und K, K_1 die Intensitätsverluste beim Durchgang der beiden Strahlenbündel durch den Kalkspat bezeichnen, muß daher Null werden, wenn die Interferenzfarben verschwinden sollen. Wild gelangte zu der Bedingungsgleichung $i^2 K^2 \cos^2 \varphi = i_1^2 K_1^2 \sin^2 \varphi$ erst durch die Annahme, daß die von dem Produkt $i i_1$ abhängigen Glieder vernachlässigt werden könnten, weil sie mit einem von der im Kalkspat erlangten Phasendifferenz abhängigen Faktor multipliziert auftreten und wegen der Größe der Wegdifferenz in dem dicken Kristall bei weißem Lichte Maxima und Minima für die einzelnen Farben zusammenfallen mußten. Daß diese Bemerkung die Fortlassung der fraglichen Glieder nicht genügend rechtfertigt, zeigen indessen Wilds Beobachtungen im homogenen Licht, da auch in diesem Falle »die Interferenzerscheinungen der farbengebenden Kristallplatte im Polarisoskop durch das Kalkspatrhomboider gar nicht verändert« wurden.

Spaltbreiten von 2 mm bzw. 2.5 mm zwischen 2 Minuten und 15 Minuten.

Es ist klar, daß bei diesem Verfahren die auf der Platte registrierten Intensitätsunterschiede allein von der Genauigkeit der Bestimmung der Entfernungen von Lampe und Kreidefläche und von den Einstellungsfehlern am Intensitätskreise abhängen, da an der Justierung des optischen Systems während der Aufnahmen nichts geändert wird. Die von Fehlern in der Entfernungsbestimmung herrührende Unsicherheit dürfte im ungünstigsten Falle 0.5 Prozent betragen, während die unvermeidliche Unsicherheit der Einstellungen am Intensitätskreise (± 0.1) bei kleinen Winkeln etwas mehr ausmachen kann.

Auf die beschriebene Weise ist die Polarisationskala bei den Kreisablesungen $11.5, 14.5, 19.3, 22.3, 25.9, 30.1, 35.1, 41.4, 43.8, 49.3, 60.6, 90.0$ mit der Entfernungsskala verglichen worden und zwar an 10 Stellen des Spektrums zwischen $\lambda 0.425 \mu$ und $\lambda 0.630 \mu$. Ein Gang mit der Wellenlänge läßt sich in den Messungen nicht erkennen, wie die folgenden Mittelwerte der auf einer Platte an den Stellen $\lambda 0.425 \mu, 0.435 \mu, 0.445 \mu$, bzw. $\lambda 0.580 \mu, 0.605 \mu, 0.630 \mu$ gefundenen Zahlen zeigen.

φ	Messung		Diff.	$\log \sin^2 \varphi$
	0.435μ	0.605μ		
90.0	0.000	0.000	0.000	0.000
49.3	-0.233	-0.235	$+0.002$	-0.241
41.4	-0.364	-0.357	-0.007	-0.359
35.1	-0.447	-0.452	$+0.005$	-0.481
30.1	-0.611	-0.595	-0.016	-0.599
25.9	-0.702	-0.713	$+0.011$	-0.719

Die auf 9 Platten an den verschiedenen Stellen des Spektrums ausgeführten Messungen ergaben nun die folgenden Abweichungen zwischen den nach dem Sinusquadratgesetz

Potsdam, 1913 Dezember.

berechneten und den aus der Vergleichung mit der Entfernungsskala gewonnenen Intensitäten. Die Einstellungen φ sind zur vollständigen Elimination des Indexfehlers des Intensitätskreises in zwei benachbarten Quadranten gemacht worden, übrigens zeigte die direkte Prüfung an hellen Objekten, daß der Indexfehler nicht merklich war.

φ	$\log \mathcal{F}_\varphi - \log \sin^2 \varphi$	Gew.	φ	$\log \mathcal{F}_\varphi - \log \sin^2 \varphi$	Gew.
90.0	$+0.005$		30.1	$+0.002$	2
60.6	$+0.006$		25.9	$+0.013$	
49.3	0.000		22.3	$+0.019$	
43.8	-0.002	2	19.3	-0.002	2
41.4	$+0.001$		14.5	-0.019	
35.1	$+0.025$		11.5	-0.002	

Obgleich diese kleinen Abweichungen schon durch die zufällige Unsicherheit der Messungen vollständig erklärt werden, habe ich eine Ausgleichung derselben vorgenommen und als Unbekannte eine Verbesserung des Exponenten eingeführt. Die Auflösung der Gleichungen

$$\log \mathcal{F}_\varphi - \log \sin^2 \varphi = x \log \sin \varphi$$

ergab $x = -0.0026 \pm 0.0085$

und als mittleren Fehler einer Gleichung $r = \pm 0.012$.

Das Ergebnis der Untersuchung läßt sich daher durch den folgenden Satz ausdrücken: Das Verhältnis der Intensität des aus dem System von Nicolprismen austretenden Lichtbündels zur Intensität des einfallenden Lichtbündels ist von der Wellenlänge unabhängig (zwischen $\lambda 0.425 \mu$ und $\lambda 0.630 \mu$) und wird innerhalb eines Intervalls von $3^m 5$ ($\varphi = 11.5$ bis $\varphi = 90.0$) durch das Sinusquadratgesetz dargestellt. Mit Rücksicht auf die rechnerische Unsicherheit in der Bestimmung des Exponenten können die Abweichungen 0.5 Prozent des Helligkeitslogarithmus nicht überschreiten.

J. Wilsing.

Beobachtungen der Nova Geminorum 2. Von J. Kasansky.

Bei den vorliegenden Beobachtungen, die von der Zeit der Entdeckung ab etwa ein Jahr umfassen, war die Aufmerksamkeit auf die Ermittlung einer Größenreihe der Nova in den photometrischen Grundsystemen gerichtet. Die Größen der Vergleichsterne wurden aus PD (Gener. Kat., Potsdam. Publ. 17) und aus H. R. (Revised Harvard Photometry, Harvard Annals 50) genommen, die Größen der Sterne, die nicht in der H. R. enthalten sind, aus den sich in Harvard Annals 24, 44, 45 befindenden Katalogen (nach H. A. 54). Die Skalen dieser Kataloge unterscheiden sich, obgleich wenig, von der Skala H. R., und Professor E. C. Pickering gibt in seiner »Discussion of the Revised Harvard Photometry« (H. A. 64 No. 4 p. 116) Zahlenresultate einer Vergleichung dieser Kataloge mit H. R. in Abhängigkeit von dem Spektraltypus und der Größe. Diese statistischen Resultate sind hier einer zweifachen graphischen Ausgleichung unterzogen.

Zuerst wurde mit den Zahlen Pickerings als Ordinate und den Spektraltypen als Abszisse für jede Größe eine graphische Darstellung angefertigt, und durch die erhaltenen Punkte für jede Größe wurde mit der Hand eine Kurve gezogen. Alsdann wurden mit den aus den ersten Kurven

gewonnenen Zahlen als Ordinate und den Größen als Abszisse für jeden Spektraltypus Kurven gezeichnet. Die Zahlen, die aus diesen zweiten Kurven entnommen wurden, sind in den Tabellen I wiedergegeben. Diese Tabellen geben mit den Argumenten: Größe und Spektraltypus die Reduktion in $0^m 0.1$ auf das System H. R. (H. A. 50); es genügt dabei die Spektraltypen nur annähernd zu wissen. Da H. R. die Sterne schwächer als $6^m 50$ H. R. nicht enthält, so sind die Zahlen für die Größen von $6^m 50$ ab durch graphische Extrapolation gefunden.

Die Vergleichsterne sind in den Tabellen II und III gegeben.

Der Spektraltypus der Vergleichsterne im System von Miss Cannon waren durch Spezialaufnahmen mit der Prismenkamera annähernd bestimmt. In den späteren Stadien der Nova wurden als Vergleichsterne nur weiße Sterne benutzt.

Die Beobachtungen sind in Tabelle IV enthalten.

Die angewandte Beobachtungsmethode war ein wenig von der gebräuchlichen verschieden. Die Nova wurde mit zwei Sternen verglichen und ihre Verschiedenheit gegen den einen oder den anderen dieser beiden Sterne wurde in Dezimalteilen des Intervalls zwischen den Vergleichsternen,