23.

Auflösung der Aufgabe im 2ten Bande dieses Journals S. 99. No. 14.

(Vom Herrn Prof. W. A. Förstemann zu Danzig.)

Aufgabe. Aus der Gleichung

$\sqrt{a_1+x} + \sqrt{a_2+x} + \sqrt{a_3+x} + \sqrt{a_4+x} + \sqrt{a_5+x} + \sqrt{a_6+x} = 0$,
wo $a_1, a_2, \dots, a_6$ von einander verschiedene gegebene Größen sind, x zu finden.

Hat man eine Methode, Gleichungen von der Form

$$\sqrt{X_1} \pm \sqrt{X_2} \pm \sqrt{X_3} \pm \dots = 0,$$

wo $X_1, X_2, \dots$ rationale Functionen von x (oder selbst von mehreren Unbekannten) sind, rational zu machen, so kann man die obige Aufgabe als gelöst betrachten. Längst war ich im Besitz einer solchen Methode, glaubte aber nicht, dieselbe für neu halten zu dürfen. Die Auflösung, welche im vorhergehenden Hefte dieses Journals von obiger Aufgabe gegeben ist, veranlaßt mich, hier meine Methode mitzutheilen.

1. Es sei zunächst die Gleichung

$$\sqrt{X_1} + \sqrt{X_2} = 0$$

rational zu machen. In so fern jede Quadratwurzel zwei einander entgegengesetzte Werthe hat, kann man in dieser Gleichung die beiden

$$\sqrt{X_1} + \sqrt{X_2} = 0 \quad \text{und} \quad \sqrt{X_1} - \sqrt{X_2} = 0$$

begriffen denken, mit welchen die beiden

$$-\sqrt{X_1} - \sqrt{X_2} = 0 \quad \text{und} \quad -\sqrt{X_1} + \sqrt{X_2} = 0$$

beziehungsweise zusammenfallen würden. Die Aufgabe, die Gleichung $\sqrt{X_1} + \sqrt{X_2} = 0$ zu lösen, ist also in der allgemeineren Aufgabe begriffen, die Gleichung

$$(\sqrt{X_1} + \sqrt{X_2}) \cdot (\sqrt{X_1} - \sqrt{X_2}) = 0$$

aufzulösen. Diese nimmt aber, wegen der Formel $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, die Gestalt an

$$X_1 - X_2 = 0,$$

und dieses ist die gesuchte rationale Gleichung. Die gewöhnliche Methode führt auf dieselbe, man mag $\sqrt{X_1} + \sqrt{X_2} = 0$, oder $\sqrt{X_1} - \sqrt{X_2} = 0$ zu Grunde legen.

2. Auf gleiche Weise wird die Gleichung

$$\sqrt{X_1} + \sqrt{X_2} + \sqrt{X_3} = 0$$

rational, wenn man statt derselben setzt:

$$(\sqrt{X_1} + \sqrt{X_2} + \sqrt{X_3}) \cdot (\sqrt{X_1} + \sqrt{X_2} - \sqrt{X_3}) \cdot (\sqrt{X_1} - \sqrt{X_2} + \sqrt{X_3}) \\ \times (\sqrt{X_1} - \sqrt{X_2} - \sqrt{X_3}) = 0.$$

So kommt die Aufgabe, diese Gleichung rational zu machen, auf die Bildung des Products der vier Factoren

$$a + b + c, \quad a + b - c, \quad a - b + c, \quad a - b - c$$

zurück; und daß die Gleichung wirklich hiedurch rational gemacht werden kann, hängt mit von dem Umstande ab, daß das Product dieser vier Factoren nur gerade Potenzen der Buchstaben a, b, c enthält. Dies Product ist nämlich

$$= a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2.$$

Die gesuchte rationale Gleichung ist daher

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - 2X_1X_2 - 2X_1X_3 - 2X_2X_3 = 0,$$

wie man auch nach gewöhnlicher Methode findet.

Wendet man dies Resultat z. B. auf die Gleichung

$$\sqrt{x} + \sqrt{1+x} + \sqrt{3+x} = 0$$

an, so ergibt sich die rationale Gleichung $3x^2 + 8x - 4 = 0$, woher

$$x = \frac{2}{3} \cdot (-2 + \sqrt{7}) \quad \text{oder} \quad x = \frac{2}{3} \cdot (-2 - \sqrt{7}).$$

Diese beiden Werthe sind beziehungsweise die Auflösungen der Gleichungen $\sqrt{x} + \sqrt{1+x} - \sqrt{3+x} = 0$ und $\sqrt{x} - \sqrt{1+x} - \sqrt{3+x} = 0$; die beiden Gleichungen $\sqrt{x} + \sqrt{1+x} + \sqrt{3+x} = 0$ und $\sqrt{x} - \sqrt{1+x} + \sqrt{3+x} = 0$ sind dagegen unauflösbar.

3. Man kann sich folgendermaßen, ohne die Multiplication auszuführen, überzeugen, daß das Product der vier Factoren

$$a + b + c, \quad a + b - c, \quad a - b + c, \quad a - b - c$$

nur gerade Potenzen von a, b, c enthalten kann, so wie auch, daß es symmetrisch für a, b, c sein muß.

1) Verwandelt man b in $-b$, so gehet der erste Factor in den dritten, der zweite in den vierten über, und umgekehrt der dritte in den ersten, der vierte in den zweiten. Es hat also das Product denselben Werth, man lege dem b einen gewissen Zahlenwerth, oder den entgegengesetzten bei. Ähnliches findet sich für c , und endlich selbst für a ; denn verwandelt man a in $-a$, so wird der erste Factor zum Gegentheil des vierten, und umgekehrt aus dem vierten das Gegentheil des ersten; ferner wird der zweite zum Gegentheil des dritten, und umgekehrt. Aus dieser Eigenschaft des Products und daraus, daß nur gerade Potenzen bei Veränderung der Basis ins Gegentheil ihren Werth nicht ändern, läßt sich beweisen, jenes Product könne nur gerade Potenzen von a, b und c enthalten.

2) Auf gleiche Weise überzeugt man sich, weder die Vertauschung von a mit einem der Buchstaben b und c , noch die Vertauschung dieser letzteren unter einander könne das Product ändern, dasselbe müsse also für a, b, c symmetrisch sein.

4. Allgemein kommt das Rationalmachen einer Gleichung von der Form

$$\sqrt{X_1} + \sqrt{X_2} + \sqrt{X_3} + \dots = 0,$$

sie habe links so viel Glieder als sie wolle, auf die Bildung des Products aller der Factoren zurück, die in der Form $a \pm b \pm c \dots$ enthalten sind, wenn nämlich die Anzahl der Buchstaben $a, b \dots$ der Anzahl von Gliedern in jener Gleichung gleich genommen wird. Von diesem Producte kann jedesmal bewiesen werden, es müsse für alle Buchstaben symmetrisch sein (nur das Product der Binome $a + b$ und $a - b$ bildet hievon eine Ausnahme), und könne dieselben nur in geraden Potenzen enthalten. Aus dieser letzteren Eigenschaft ergibt sich, daß wirklich, wenn man in dem Producte statt $a, b, \dots$ nach der Reihe setzt $\sqrt{X_1}, \sqrt{X_2}, \dots$, die Quadratwurzeln wegfallen. Ferner erhellt, wenn die Zahl der Wurzeln in der Gleichung, und also auch die Zahl der Buchstaben in dem Polynome $a \pm b \pm \dots = n$ ist, so müsse das Product vom 2^{n-1} ten Grade in Bezug auf $a, b \dots$ sein.

5. Wenden wir dies jetzt auf eine Gleichung von der Gestalt

$$\sqrt{(a_1 + x)} + \sqrt{(a_2 + x)} + \sqrt{(a_3 + x)} + \dots = 0$$

an, und bezeichnen die Anzahl der links stehenden Glieder mit n , so wird das nach 4. zu bildende Hilfsproduct in Bezug auf $a, b, \dots$ vom 2^{n-1} ten Grade sein, und folglich, wenn man statt $a, b \dots$ setzt $\sqrt{(a_1 + x)}, \sqrt{(a_2 + x)}, \dots$ eine Gleichung vom 2^{n-2} ten Grade entstehen.

So muß sich also für die Gleichung, welche zu diesem Aufsätze Veranlassung gegeben, da sie 6 Wurzeln enthält, als Endresultat eine rationale Gleichung vom 16ten Grade finden; oder also für die 32 Gleichungen, welche in der Form

$\sqrt{(a_1 + x)} \pm \sqrt{(a_2 + x)} \pm \sqrt{(a_3 + x)} \pm \sqrt{(a_4 + x)} \pm \sqrt{(a_5 + x)} \pm \sqrt{(a_6 + x)} = 0$ begriffen sind, muß x sechzehn Werthe haben. Hieraus kann man schließen, daß im Allgemeinen 16 von jenen Gleichungen auflösbar, 16 andre unauflösbar sein werden.

Nach S. 140. des vorhergehenden Heftes soll die rationale Endgleichung nicht vom 16ten, sondern vom 22sten Grade sein. Das Räthsel dieses Widerspruchs zu lösen, möchte eine nicht uninteressante Aufgabe bilden.

Danzig, den 5. März 1832.