LA SEMICONTINUITÀ NEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI.

Memoria di **Leonida Tonelli** (Parma).

Adunanza del 23 novembre 1919.

INTRODUZIONE.

In alcuni lavori, pubblicati in questi stessi Rendiconti ¹⁾, partendo dal concetto che il successo dei metodi proposti da HILBERT e da altri per la dimostrazione « a priori » dell'esistenza del minimo nel problema di DIRICHLET e suoi derivati, si deve in gran parte alla *semicontinuità* degli integrali che in tali problemi entrano in gioco, stabilii questa semicontinuità per tutti gli integrali curvilinei di una vasta classe di problemi di Calcolo della Variazioni, dimostrando poi, per mezzo di essa, l'esistenza del minimo per gli *integrali regolari* soddisfacenti ad opportune condizioni complementari.

La dimostrazione della semicontinuità, quale trovasi nei citati lavori, si presenta alquanto laboriosa, perchè basata sul confronto di varie definizioni, proposte da diversi Autori, per l'integrale preso su una curva continua di cui si supponga soltanto la rettificabilità. Inoltre, essa gioca tutta sulla già supposta esistenza della soluzione dei relativi problemi di minimo o massimo *in piccolo*, vale a dire in campi sufficientemente ristretti. E questo diventa un inconveniente di notevole importanza quando si voglia, come intendo fare io, trattare a nuovo, i problemi di Calcolo delle Variazioni con un metodo diretto fondato sulla semicontinuità degli integrali che si considerano.

Questi inconvenienti, e più specialmente il primo qui menzionato, furono rilevati anche dal GOURSAT ²⁾, il quale, ad evitarli, propose di porre la semicontinuità a base della definizione stessa di integrale su una curva rettificabile, e ciò in armonia con quanto aveva già fatto il LEBESGUE definendo la lunghezza di una curva come il più

¹⁾ L. TONELLI, *Sui massimi e minimi assoluti del Calcolo delle Variazioni* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXXII (2° semestre 1911), pp. 297-337]; *Sul caso regolare nel Calcolo delle Variazioni* [Ibidem; t. XXXV (1° semestre 1913), pp. 49-73].

²⁾ E. GOURSAT, *Sur quelques fonctions de lignes semi-continues* [Bulletin de la Société Mathématique de France, t. XLIII, fasc. II (1915), pp. 118-130].

piccolo limite delle lunghezze delle poligonalì che tendono uniformemente alla curva medesima.

La proposta del GOURSAT, più che a vincere le difficoltà della questione, tende a scansarle; in fatto poi non fa che rimandarne la soluzione ad un momento ulteriore. Ed invero, se, con la nuova definizione, si può facilmente giungere a stabilire, sotto certe condizioni, l'esistenza dell'estremo, gravi difficoltà per essa si presentano quando si debbano stabilire le proprietà analitiche dell'estremante. Di più, esistendo, da un lato, l'integrale della funzione che si considera su una data curva rettificabile — l'integrale essendo preso secondo la definizione fissata dal LEBESGUE per le funzioni misurabili e ormai universalmente accettata nel campo dell'Analisi — e non potendo, dall'altro, dar sempre all'integrale stesso un significato geometrico ben chiaro, che legittimi a priori l'ipotesi della semicontinuità, si viene, con la definizione proposta, in alcuni casi, a trovarsi nella necessità di accettare la definizione stessa, giustificandola soltanto con il suo accordo con quella abituale, quando si tratti di curve ordinarie ³⁾; in altri, a creare un dualismo apparente, relativo a due problemi — uno analitico (riguardante l'integrale del LEBESGUE) ed uno geometrico — perfettamente equivalenti; e sempre poi a rifiutare, senza notevoli vantaggi, quella definizione di integrale che si presenta come la più legittima. Si deve inoltre aggiungere, a titolo decisivo, che, contemporaneamente alla Memoria citata del GOURSAT, se ne pubblicava un'altra ⁴⁾ nella quale, pur conservando per l'integrale la definizione analitica del LEBESGUE, tutti gli inconvenienti sopra esposti venivano ad esser superati. Ed è opportuno osservare che la dimostrazione della semicontinuità per le curve rettificabili contenuta in questo nuovo lavoro, è, per metodo e per semplicità, del tutto analoga a quella che il GOURSAT diede per le curve ordinarie.

*
* * *

Nella Memoria sopra indicata, considerai le curve date in forma non parametrica e sottoposi la funzione integranda $f(x, y, y')$, oltre alla condizione $f_{y'y'} \geq 0$, a una condizione relativa al suo ordine di infinito per $y' \gg \infty$. Qui — sempre limitandomi agli integrali curvilinei dipendenti soltanto da derivate del primo ordine — mi propongo di riprendere in esame tutta la questione della semicontinuità, per le curve date in forma parametrica e per quelle in forma non parametrica; di studiare non soltanto

³⁾ Composte cioè di un numero finito di archi di curva aventi tangente variabile in modo continuo.

⁴⁾ L. TONELLI, *Sur une méthode directe du Calcul des Variations* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXXIX (1° semestre 1915), pp. 233-264].

le condizioni sufficienti ma anche quelle necessarie; e di procedere sempre con il solo ausilio della definizione di integrale di LEBESGUE e senza ricorrere per nulla a risultati del Calcolo delle Variazioni.

*
* * *

Per gli integrali

$$\int_C F(x, y, x', y') ds,$$

relativi a curve date in forma parametrica, si vedrà che la condizione

$$F_1 \geq 0,$$

dove F_1 è l'invariante di WEIERSTRASS definito da

$$F_1 \equiv \frac{F_{x'y'}}{y'^2} \equiv -\frac{F_{x'y'}}{x'y'} \equiv \frac{F_{y'y'}}{x'^2},$$

è sufficiente per la semicontinuità inferiore ($F_1 \leq 0$, per quella superiore) se in nessun punto del campo che si considera la $F_1 = 0$ risulta soddisfatta per tutte le possibili coppie $(x'y')$. La presenza di questi *punti eccezionali* può veramente in alcuni casi escludere la semicontinuità. La condizione $F_1 \geq 0$, verificata senz'altra restrizione, porta solo alla semicontinuità inferiore rispetto alla classe delle curve le cui lunghezze restano inferiori ad un numero fisso, del resto qualunque. Se esistono punti eccezionali, per assicurare la completa semicontinuità (inferiore), occorre aggiungere una condizione complementare, come ad esempio quella espressa dalla disuguaglianza $F \geq 0$, valida in tutto un intorno dei punti eccezionali medesimi. E saranno date anche altre forme notevoli di condizioni complementari.

Quando poi tutti i punti del campo siano punti eccezionali, nel qual caso la funzione F prende la forma $P(xy)x' + Q(xy)y'$, si giungerà alla condizione necessaria e sufficiente per la semicontinuità (condizione che coincide qui con quella della continuità), espressa dall'uguaglianza

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

verificata in tutto il campo considerato (cioè almeno per i campi che ordinariamente si presentano).

Nel caso generale, si troverà che sono condizioni necessarie affinché, su ogni curva completamente interna al campo considerato, si abbia la semicontinuità inferiore (superiore), 1°) che sia sempre, nell'interno del campo, $F_1 \geq 0$ ($F_1 \leq 0$); 2°) che, in ogni punto interno al campo in cui sia $F_1 \equiv 0$, per tutte le possibili coppie $(x'y')$, risulti $F_{x'y} \equiv F_{y'x}$.

Si studierà anche la semicontinuità sopra *una* data curva (non più su *tutte* le curve del campo) e, fatto notevole, si proverà che la cosiddetta *quarta condizione sufficiente* per l'estremo, del Calcolo delle Variazioni (che è la condizione aggiunta da WEIERSTRASS), assicura la semicontinuità su quella qualsiasi curva su cui sia verificata; si troverà poi che, come condizioni necessarie per la semicontinuità, devono esser soddisfatte quasi ovunque, sulla curva data, la condizione di LEGENDRE e la cosiddetta *quarta condizione necessaria per l'estremo*, pure del Calcolo delle Variazioni.

*
* *

Per gli integrali

$$\int_C f(x, y, y') dx,$$

relativi a curve, date in forma non parametrica, si dimostrerà che condizione necessaria e sufficiente per la semicontinuità inferiore (superiore), su ogni curva del campo che si considera, è che sia sempre in esso

$$f_{y'y'} \geq 0, \quad (f_{y'y'} \leq 0),$$

Per la semicontinuità su *una data* curva, si troverà anche qui che è sufficiente la *quarta condizione sufficiente* per l'estremo, del Calcolo delle Variazioni, e che sono necessarie la condizione di LEGENDRE e la *quarta condizione necessaria* per l'estremo, pure del Calcolo delle Variazioni, le quali condizioni devono esser verificate quasi ovunque sulla curva considerata.

*
* *

I risultati qui ottenuti pongono in piena luce il significato della condizione di LEGENDRE e della *quarta condizione* (condizione di WEIERSTRASS) del Calcolo delle Variazioni. Queste condizioni risultano equivalere alla semicontinuità, sulla curva considerata, dell'integrale di cui si tratta, e resta così evidente come esse siano indispensabili per l'esistenza dell'estremo; d'altra parte, poichè, per poter asserire che una data curva, su cui tali condizioni siano verificate, dà un estremo, basta mostrare che su essa è nulla la variazione prima dell'integrale in questione e sempre di un segno (non nulla) la variazione seconda, ne risulta una perfetta corrispondenza fra il Calcolo delle Variazioni e la teoria dei massimi e minimi delle ordinarie funzioni continue, per le quali si ha sicuramente un estremo là dove è nulla la derivata prima e diversa da zero la derivata seconda.

CAPITOLO I.

GLI INTEGRALI PER LE CURVE IN FORMA PARAMETRICA.

§ 1.

Definizioni.

1. Sia A un campo (insieme di punti) del piano (xy) tale che i suoi punti appartenenti ad un qualsiasi cerchio dello stesso piano costituiscano sempre un insieme *chiuso*.

Un punto P si dirà *interno* ad A se esisterà un cerchio, avente il centro in tal punto, tutto costituito di punti di A .

Si chiamerà *frontiera* di A l'insieme dei punti di A non interni al campo stesso.

2. Sia $F(x, y, x', y')$ una funzione:

a) definita e continua, insieme con le sue derivate parziali dei primi due ordini rispetto a x' e y' , per tutti i punti (xy) del campo A e per tutte le coppie $(x'y')$ di numeri non ambedue nulli;

b) *positivamente omogenea*, di grado 1, rispetto alle x', y' , vale a dire soddisfacente alla uguaglianza

$$F(x, y, kx', ky') = kF(x, y, x', y'),$$

valida per ogni $k > 0$.

c) avente continue, in tutti i punti del campo A e per tutte le coppie $(x'y')$ di numeri non ambedue nulli, le derivate parziali prime rispetto alla x ed alla y della F_x , F_y , e della funzione F , definita nell'introduzione ⁵⁾.

3. Si consideri la curva continua e rettificabile C , appartenente tutta al campo A e definita dalle equazioni

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), \quad (t_0 \leq t \leq t_1).$$

Queste equazioni stabiliscono anche il *verso* della curva. Per noi ogni curva avrà un verso ed uno solo; e pertanto i segmenti rettilinei PQ e QP , ad esempio, saranno per noi due curve distinte.

Assumendo come parametro la lunghezza s dell'arco che dal punto corrispondente

⁵⁾ La continuità la si intenderà sempre rispetto al complesso delle quattro variabili x, y, x', y' . Si vedrà che la condizione c) non interviene se non dal n° 16 in poi.

a t_0 va a quello relativo a t , le equazioni della C prendono la forma

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad (0 \leq s \leq L),$$

dove L indica la lunghezza di tutta la curva.

Nel seguito saranno considerate sempre curve continue e rettificabili del campo A .

4. Considerata una curva C e scelto un numero positivo ρ , si dirà che un'altra curva C' appartiene ordinatamente all'intorno (ρ) della C se sarà possibile di porre fra i punti delle due curve una corrispondenza biunivoca, ordinata ⁶⁾ e continua, tale che la distanza fra due punti corrispondenti qualsiasi risulti sempre minore del numero ρ .

5. Formiamo l'integrale (di LEBESGUE) della funzione F , esteso alla curva C , vale a dire,

$$I_C = \int_C F(x(s), y(s), x'(s), y'(s)) ds,$$

che scriveremo semplicemente

$$\int_C F ds.$$

Questo integrale, fissata che sia la forma della funzione F , dipende unicamente dalla curva C su cui l'integrazione è eseguita ed ha un valore determinato e finito per ogni curva: esso è perciò *una funzione della curva C* .

È chiaro che, se la curva è chiusa, gli archi si possono contare a partire da un'origine arbitrariamente scelta sulla curva stessa senza alterare il valore di I_C .

6. Diremo che l'integrale I_C è *regolare* se l'invariante di WEIERSTRASS F_1 è sempre di un segno, senza mai annullarsi, per tutti i punti (xy) del campo A e per tutte le coppie (x', y') di numeri non ambedue nulli; diremo, invece, che I_C è un integrale *quasi regolare* se, per i valori indicati di x, y, x', y' , F_1 è sempre di un segno, non escluso che possa anche annullarsi.

Diremo, infine, che l'integrale I_C è *definito* ⁷⁾ se la funzione F conserva sempre uno stesso segno, senza mai annullarsi, per tutti i valori di x, y, x', y' , già detti, e, più precisamente, che è *definito positivo* se è sempre $F > 0$, *definito negativo* se invece è sempre $F < 0$.

7. Si dirà che l'integrale I_C è una funzione *semicontinua inferiormente* (*superiormente*) sulla curva C_0 , se, preso un numero $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, è sempre possibile di determinarne un altro $\rho > 0$ tale che la disuguaglianza

$$I_C > I_{C_0} - \varepsilon \quad (< I_{C_0} + \varepsilon)$$

⁶⁾ Non si confonda con l'*integrale definito*, nel senso di integrale esteso ad un campo determinato.

⁷⁾ Tale cioè che se P'_1 e P'_2 sono due punti di C' corrispondenti a P_1 e P_2 di C , P'_1 preceda o segua P'_2 su C' secondo che P precede o segue P_2 su C .

sia verificata per tutte le curve C che appartengono ordinatamente all'intorno (ρ) della C_0 .

Si dirà poi che I_C è funzione continua sulla curva C_0 se, in luogo della disuguaglianza precedente, è verificata l'altra

$$|I_C - I_{C_0}| < \varepsilon,$$

vale a dire se I_C è, nello stesso tempo, funzione semicontinua inferiormente e superiormente, su C_0 .

§ 2.

Proposizioni preliminari.

8. LEMMA FONDAMENTALE. — Sia $f(x)$ una funzione data su un intervallo (a, b) , e ivi integrabile e sempre inferiore in modulo ad un numero M .

Fissato un numero positivo D e preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, è sempre possibile di determinare un altro numero positivo n tale che sia

$$\left| \sum_r \int_{a_r}^{b_r} y'(x) f(x) dx \right| < \varepsilon + M \sum_r |y(b_r) - y(a_r)|,$$

per ogni sistema di intervalli (a_r, b_r) , non sovrapponentisi, di (a, b) e per ogni funzione $y(x)$ soddisfacente, su tutti questi intervalli, alla disuguaglianza $|y(x)| \leq n$ e quasi ovunque ⁸⁾, sugli stessi intervalli, all'altra $|y'(x)| \leq D$ ⁹⁾.

Adottando il modo di rappresentazione di una funzione di una variabile indicato da LANDAU e DE LA VALLÉE POUSSIN ¹⁰⁾, possiamo, per ogni valore dell'intero n , costruire un polinomio $P_n(x)$ soddisfacente alle due condizioni

$$P_n(x) \underset{n \rightarrow \infty}{\Rightarrow} f(x)$$

⁸⁾ Quasi ovunque o quasi dappertutto indicano che la proprietà in questione ha luogo dappertutto ad eccezione al più di un insieme di misura nulla.

⁹⁾ Questo lemma fu già dimostrato, in condizioni più generale da un lato e più restrittive da un altro, in loc. cit. ⁴⁾, pp. 241-243.

¹⁰⁾ E. LANDAU, *Ueber die Approximation einer stetigen Funktion durch eine ganze rationale Funktion* [Rendiconti Circolo Matematico di Palermo, t. XXV (1908), pp. 337-345]; CH. J. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle et de leurs dérivées par des polynomes et des suites limitées de FOURIER* (Bulletins de la classe des Sciences de l'Académie Royale de Belgique, 1908, pp. 193-254); F. RIÉSZ, *Ueber die Approximation einer Funktion durch Polynome* [Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. XVII (1908), pp. 196-211].

quasi ovunque su (a, b) , e

$$|P_n(x)| \leq M$$

su tutto (a, b) . Ciò premesso, osserviamo che si ha

$$\left| \int_{a_r}^{b_r} y'(x) \{f(x) - P_n(x)\} dx \right| \leq \int_{a_r}^{b_r} |y'| |f - P_n| dx \leq D \int_{a_r}^{b_r} |f - P_n| dx$$

e che, in forza di un noto teorema sull'integrazione per serie, è, per un conveniente valore n_1 ,

$$\int_a^b |f - P_{n_1}| dx < \frac{\varepsilon}{2D}.$$

Possiamo scrivere, pertanto,

$$\begin{aligned} \left| \sum_r \int_{a_r}^{b_r} y' f(x) dx \right| &\leq \sum_r \left| \int_{a_r}^{b_r} y' (f - P_{n_1}) dx \right| + \left| \sum_r \int_{a_r}^{b_r} y' P_{n_1} dx \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \left| \sum_r \int_{a_r}^{b_r} y' P_{n_1} dx \right|. \end{aligned}$$

Trasformiamo, con un'integrazione per parti, l'integrale di $y' P_{n_1}$:

$$\int_{a_r}^{b_r} y' P_{n_1} dx = [y(b_r) - y(a_r)] P_{n_1}(b_r) - \int_{a_r}^{b_r} [y(x) - y(a_r)] P'_{n_1}(x) dx.$$

Dunque, se è, in tutti gli intervalli (a_r, b_r) , $|y(x)| \leq \eta$, e se Π indica il massimo modulo di P'_{n_1} su tutto l'intervallo (a, b) , abbiamo

$$\left| \sum_r \int_{a_r}^{b_r} y' P_{n_1} dx \right| < M \sum_r |y(b_r) - y(a_r)| + 2\eta \Pi(b - a).$$

ed anche, quando sia

$$\eta < \frac{\varepsilon}{4\Pi(b-a)},$$

$$\left| \sum_r \int_{a_r}^{b_r} y'(x) f(x) dx \right| < \varepsilon + M \sum_r |y(b_r) - y(a_r)|.$$

9. Stabiliamo ora una formola importante per il seguito. Sia (xy) un punto qualunque del campo A , e θ_0 indichi la misura di un angolo qualsiasi. Abbiamo, per l'omogeneità dalla funzione F ,

$$F(x, y, \cos \theta, \sin \theta) = \cos \theta F_x(x, y, \cos \theta, \sin \theta) + \sin \theta F_y(x, y, \cos \theta, \sin \theta),$$

e quindi, togliendo da ambo i membri di questa uguaglianza l'espressione

$$\begin{aligned}
 & \cos \theta F_{x'}(x, y, \cos \theta_0, \sin \theta_0) + \sin \theta F_{y'}(x, y, \cos \theta_0, \sin \theta_0) \\
 F(x, y, \cos \theta, \sin \theta) &= \{\cos \theta F_{x'}(x, y, \cos \theta_0, \sin \theta_0) + \sin \theta F_{y'}(x, y, \cos \theta_0, \sin \theta_0)\} \\
 &= \cos \theta \{F_{x'}(x, y, \cos \theta, \sin \theta) - F_{x'}(x, y, \cos \theta_0, \sin \theta_0)\} \\
 &\quad + \sin \theta \{F_{y'}(x, y, \cos \theta, \sin \theta) - F_{y'}(x, y, \cos \theta_0, \sin \theta_0)\} \\
 &= \cos \theta \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d}{d\alpha} F_{x'}(x, y, \cos \alpha, \sin \alpha) d\alpha + \sin \theta \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d}{d\alpha} F_{y'}(x, y, \cos \alpha, \sin \alpha) d\alpha \\
 &= \cos \theta \int_{\theta_0}^{\theta} \{-F_{x'x'}(x, y, \cos \alpha, \sin \alpha) \sin \alpha + F_{x'y'}(x, y, \cos \alpha, \sin \alpha) \cos \alpha\} d\alpha \\
 &\quad + \sin \theta \int_{\theta_0}^{\theta} \{-F_{y'x'}(x, y, \cos \alpha, \sin \alpha) \sin \alpha + F_{y'y'}(x, y, \cos \alpha, \sin \alpha) \cos \alpha\} d\alpha.
 \end{aligned}$$

Introducendo qui la funzione F_1 definita nell'introduzione:

$$F_1 \equiv \frac{F_{x'x'}}{y'^2} \equiv -\frac{F_{x'y'}}{x'y'} \equiv \frac{F_{y'y'}}{x'^2},$$

abbiamo, riunendo tutto in un solo integrale,

$$\begin{aligned}
 F(x, y, \cos \theta, \sin \theta) &= \{\cos \theta F_{x'}(x, y, \cos \theta_0, \sin \theta_0) + \sin \theta F_{y'}(x, y, \cos \theta_0, \sin \theta_0)\} \\
 &= \int_{\theta_0}^{\theta} \{-\cos \theta \sin \alpha + \sin \theta \cos \alpha\} F_1(x, y, \cos \alpha, \sin \alpha) d\alpha,
 \end{aligned}$$

ed infine

$$\begin{aligned}
 F(x, y, \cos \theta, \sin \theta) &= \{\cos \theta F_{x'}(x, y, \cos \theta_0, \sin \theta_0) + \sin \theta F_{y'}(x, y, \cos \theta_0, \sin \theta_0)\} \\
 &\quad + \int_{\theta_0}^{\theta} F_1(x, y, \cos \alpha, \sin \alpha) \sin(\theta - \alpha) d\alpha,
 \end{aligned}$$

che è la formula a cui volevamo giungere e che è dovuta a SCHWARZ ¹¹).

§ 3.

Condizioni sufficienti per la semicontinuità.

a) Il caso quasi-regolare definito.

10. Cominciamo con l'osservare che, nel caso quasi regolare definito, deve aversi sempre, per tutti i punti (xy) di A e per tutte le coppie $(x'y')$ di numeri non am-

¹¹) Cfr. O. BOLZA, *Lectures on the Calculus of Variations* (Chicago, University of Chicago Press., 1904, p. 141).

bedue nulli,

$$(I) \quad F_1 \geq 0, \quad F > 0,$$

oppure sempre

$$(II) \quad F_1 \leq 0, \quad F < 0,$$

non potendo essere verificate sempre e contemporaneamente le due disuguaglianze $F_1 \geq 0$, $F < 0$, e neppure le altre due $F_1 \leq 0$, $F > 0$ ¹²⁾. Ciò detto, dimostriamo la seguente proposizione:

L'integrale quasi-regolare definito è una funzione semicontinua della curva d'integrazione: e precisamente, semicontinua inferiormente se sono soddisfatte le disuguaglianze (I) (integrale quasi-regolare definito positivo), superiormente se lo sono le (II) (integrale quasi-regolare definito negativo).

Occupiamoci del caso dell'integrale quasi regolare definito positivo: l'altro si deduce immediatamente da questo con il semplice cambiamento da F in $-F$, che muta anche F_1 in $-F_1$.

Sia C_0 una delle curve di cui si è detto al n° 3. Preso su di essa, come origine degli archi, il primo estremo od un punto arbitrariamente scelto, nel caso di una curva chiusa, sia

$$x = x_0(s), \quad y = y_0(s), \quad (0 \leq s \leq L_0)$$

la sua rappresentazione analitica in funzione dell'arco s . Dividiamo la C_0 in n parti, tutte di ugual lunghezza $\frac{1}{n}L_0$, mediante i punti $P_0^{(0)}$, $P_1^{(0)}$, $P_2^{(0)}$, ..., $P_n^{(0)}$, susseguentisi sulla curva nell'ordine fissato dal verso della curva stessa, e in modo che $P_0^{(0)}$ coincida con l'origine degli archi. Siano

$$s_0 = 0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n = L_0,$$

i valori di s corrispondenti a tali punti. Sarà

$$s_{i+1} - s_i = \frac{1}{n} L_0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

Indichiamo con ρ un numero positivo minore di $\frac{1}{n^2}$ e tale che ogni curva appartenente ordinatamente all'intorno (ρ) di uno qualunque degli archi $C_0(P_i^{(0)}, P_{i+1}^{(0)})$ ¹³⁾ di C_0 abbia lunghezza superiore a $\frac{1}{2n}L_0$; e consideriamo una qualunque curva C (n° 3) che appartenga ordinatamente all'intorno (ρ) della C_0 . Tra le corrispondenze

¹²⁾ Cfr. loc. cit. ¹⁾, p. 302.

¹³⁾ $P_i^{(0)}$ e $P_{i+1}^{(0)}$ sono gli estremi dell'arco considerato.

biunivoche, ordinate e continue esistenti fra i punti della C e della C_0 , e tali che la distanza fra i punti corrispondenti risulti sempre inferiore a ρ , scegliamone una e indichiamo con $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ i punti della C che vengono così a corrispondere ordinatamente ai punti $P_0^{(0)}, P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, \dots, P_n^{(0)}$ della C_0 . L'arco $C(P_i, P_{i+1})$ appartiene allora ordinatamente all'intorno (ρ) dell'arco $C_0(P_i^{(0)}, P_{i+1}^{(0)})$, e per l'ipotesi fatta sopra sul numero ρ , la lunghezza del primo risulta superiore a $\frac{1}{2n} L_0$, cioè alla metà di quella del secondo. Contiamo le lunghezze degli archi della C a partire dal punto P_0 e indichiamole genericamente con la lettera σ ; chiamiamo poi $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$, le lunghezze degli archi $C(P_0, P_1), C(P_0, P_2), \dots, C(P_0, P_n)$. Per quanto si è detto ora, è

$$(1) \quad \sigma_{i+1} - \sigma_i > \frac{s_{i+1} - s_i}{2} \quad (i = 0, 1, \dots, n-1) \quad 14).$$

Confrontiamo i valori dei due integrali

$$(2) \quad \int_{C_0(P_i^{(0)}, P_{i+1}^{(0)})} F ds, \quad \int_{C(P_i, P_{i+1})} F d\sigma.$$

A tal uopo, considerato un qualsiasi cerchio del piano (xy) contenente la curva C_0 ed almeno tutti i punti dello stesso piano distanti da essa di non più di un numero positivo qualunque maggiore di ρ ¹⁵⁾, indichiamo con m e M il minimo e il massimo della funzione F nell'insieme (chiuso) dei punti di A che appartengono al cerchio detto e per tutte le coppie (x', y') soddisfacenti all'equazione $x'^2 + y'^2 = 1$. Per la seconda delle (I) è $m > 0$.

Avendosi

$$\begin{aligned} \int_{C_0(P_i^{(0)}, P_{i+1}^{(0)})} F ds &\leq M(s_{i+1} - s_i), \\ \int_{C(P_i, P_{i+1})} F d\sigma &\geq m(\sigma_{i+1} - \sigma_i), \end{aligned}$$

si ha che, se è

$$\sigma_{i+1} - \sigma_i \geq \frac{M}{m}(s_{i+1} - s_i),$$

è senz'altro,

$$(3) \quad \int_{C(P_i, P_{i+1})} F d\sigma \geq \int_{C_0(P_i^{(0)}, P_{i+1}^{(0)})} F ds.$$

¹⁴⁾ Poniamo $\sigma_0 = 0$.

¹⁵⁾ Intendiamo per distanza di un punto da una curva il minimo delle distanze del punto stesso dai punti della curva.

Consideriamo il caso in cui si abbia

$$(4) \quad \sigma_{i+1} - \sigma_i < \frac{M}{m} (s_{i+1} - s_i).$$

Poniamo fra i due archi $C_0(P_i^{(0)}, P_{i+1}^{(0)})$, $C(P_i, P_{i+1})$ una nuova corrispondenza biunivoca, ordinata e continua, definita dalla relazione lineare

$$\sigma = \sigma_i + \frac{\sigma_{i+1} - \sigma_i}{s_{i+1} - s_i} (s - s_i).$$

Abbiamo, per la (1) e la (4),

$$(5) \quad \frac{1}{2} < \frac{\sigma_{i+1} - \sigma_i}{s_{i+1} - s_i} < \frac{M}{m}.$$

Scegliendo s come parametro di una rappresentazione analitica simultanea degli archi $C_0(P_i^{(0)}, P_{i+1}^{(0)})$, $C(P_i, P_{i+1})$, si avranno, per il primo, le equazioni

$$x = x_0(s), \quad y = y_0(s), \quad (s_i \leq s \leq s_{i+1}),$$

e per il secondo

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad (s_i \leq s \leq s_{i+1});$$

e sarà quasi ovunque sull'intervallo (s_i, s_{i+1})

$$(6) \quad \begin{cases} |x'_0(s)| \leq 1, & |y'_0(s)| \leq 1, \\ |x'(s)| < \frac{M}{m}, & |y'(s)| < \frac{M}{m}. \end{cases}$$

Detti poi $P^{(0)}$ e P i punti di C_0 e C corrispondenti ad uno stesso valore s qualsiasi di (s_i, s_{i+1}) , e $P_{(0)}$ il punto di C_0 corrispondente a P nella prima corrispondenza considerata fra C_0 e C , la distanza fra $P_{(0)}$ e P risulta minore di $\rho < \frac{1}{n^2}$ e quella fra $P_{(0)}$ e $P^{(0)}$, minore di $\frac{L_0}{n}$ (perchè questi due punti appartengono ad uno stesso arco di C_0 di lunghezza uguale a $\frac{L_0}{n}$). La distanza fra $P^{(0)}$ e P è dunque minore di $\frac{1+L_0}{n}$ e si ha

$$(7) \quad |x(s) - x_0(s)| < \frac{1+L_0}{n}, \quad |y(s) - y_0(s)| < \frac{1+L_0}{n}$$

per tutti gli s di (s_i, s_{i+1}) . Di più è

$$(8) \quad \begin{cases} |x(s_i) - x_0(s_i)| < \rho, & |y(s_i) - y_0(s_i)| < \rho, \\ |x(s_{i+1}) - x_0(s_{i+1})| < \rho, & |y(s_{i+1}) - y_0(s_{i+1})| < \rho, \end{cases}$$

perchè i punti $P_i^{(0)}$, P_i distano fra loro per meno di ρ , e ugualmente $P_{i+1}^{(0)}$, P_{i+1} .

Consideriamo la differenza fra i due integrali (2) e scriviamola nel seguente modo:

$$\begin{aligned} D_i &= \int_{C(P_i, P_{i+1})} F d\sigma - \int_{C_0(P_i^{(0)}, P_{i+1}^{(0)})} F ds \\ &= \int_{s_i}^{s_{i+1}} \{F(x(s), y(s), x'(s), y'(s)) - F(x_0(s), y_0(s), x'_0(s), y'_0(s))\} ds \\ &= \int_{s_i}^{s_{i+1}} \{F(x, y, x', y') - F(x_0, y_0, x', y')\} ds \\ &\quad + \int_{s_i}^{s_{i+1}} \{F(x_0, y_0, x', y') - F(x_0, y_0, x'_0, y'_0)\} ds. \end{aligned}$$

Osserviamo qui che, avendosi

$$x'(s) = \frac{dx}{d\sigma} \cdot \frac{\sigma_{i+1} - \sigma_i}{s_{i+1} - s_i}, \quad y'(s) = \frac{dy}{d\sigma} \cdot \frac{\sigma_{i+1} - \sigma_i}{s_{i+1} - s_i},$$

è, per la (5), quasi ovunque su (s_i, s_{i+1}) ,

$$\frac{1}{4} < \overline{x'(s)^2} + \overline{y'(s)^2} < \left(\frac{M}{m}\right)^2.$$

Preso dunque ad arbitrio un numero positivo ε , possiamo, per la continuità della funzione F , determinarne un altro δ tale che, essendo (x_0, y_0) un qualsiasi punto di C_0 e (xy) un altro punto qualunque di A tale però da avere una distanza da (x_0, y_0) non superiore a δ , ed essendo verificata la doppia disuguaglianza

$$\frac{1}{4} \leq x'^2 + y'^2 \leq \left(\frac{M}{m}\right)^2,$$

si abbia

$$|F(x, y, x', y') - F(x_0, y_0, x', y')| < \varepsilon.$$

Ne viene perciò che, per ogni n tale che sia

$$(9) \quad \frac{1 + L_0}{n} < \frac{1}{2} \delta,$$

è, in forza della (7),

$$(10) \quad \int_{s_i}^{s_{i+1}} \{F(x, y, x', y') - F(x_0, y_0, x', y')\} ds > -\varepsilon(s_{i+1} - s_i).$$

Per la formula stabilita al n. 9 si ha poi, quasi dappertutto in (s_i, s_{i+1}) ,

$$\begin{aligned} F(x_0, y_0, x', y') &= \{x' F_x(x_0, y_0, x'_0, y'_0) + y' F_y(x_0, y_0, x'_0, y'_0)\} \\ &\quad + \sqrt{x'^2 + y'^2} \int_0^\theta F_1(x_0, y_0, \cos \alpha, \sin \alpha) \sin(\theta - \alpha) d\alpha, \end{aligned}$$

dove θ_0 e θ sono definiti dalle uguaglianze

$$\begin{aligned}x'_0 &= \cos \theta_0, & y'_0 &= \sin \theta_0 \\x' &= \sqrt{x'^2 + y'^2} \cos \theta, & y' &= \sqrt{x'^2 + y'^2} \sin \theta;\end{aligned}$$

e perciò

$$\begin{aligned}F(x_0, y_0, x', y') - F(x_0, y_0, x'_0, y'_0) &= \{(x' - x'_0)F_{x'}(x_0, y_0, x'_0, y'_0) \\&+ (y' - y'_0)F_{y'}(x_0, y_0, x'_0, y'_0)\} + \sqrt{x'^2 + y'^2} \int_{\theta_0}^{\theta} F_1(x_0, y_0, \cos \alpha, \sin \alpha) \sin(\theta - \alpha) d\alpha.\end{aligned}$$

Tenendo conto di questa uguaglianza, della prima delle disuguaglianze (I) e della (10), si ha

$$D_i > -\varepsilon(s_{i+1} - s_i) + \int_{s_i}^{s_{i+1}} \{(x' - x'_0)F_{x'}(x_0, y_0, x'_0, y'_0) + (y' - y'_0)F_{y'}(x_0, y_0, x'_0, y'_0)\} ds.$$

Sommando ora rispetto all'indice i e tenendo conto della disuguaglianza (3), valida quando non sia soddisfatta la (4), abbiamo

$$\begin{aligned}\int_C F d\sigma - \int_{C_0} F ds &= \sum_i D_i > -\varepsilon L_0 \\&+ \sum_i' \int_{s_i}^{s_{i+1}} \{(x' - x'_0)F_{x'}(x_0, y_0, x'_0, y'_0) + (y' - y'_0)F_{y'}(x_0, y_0, x'_0, y'_0)\} ds,\end{aligned}$$

intendendo che la sommatoria $\sum_i'$ sia estesa solamente a quegli archi per i quali vale la (4). Questa sommatoria può essere decomposta nelle due

$$\sum_i' \int_{s_i}^{s_{i+1}} (x' - x'_0)F_{x'}(x_0, y_0, x'_0, y'_0) ds, \quad \sum_i' \int_{s_i}^{s_{i+1}} (y' - y'_0)F_{y'}(x_0, y_0, x'_0, y'_0) ds,$$

a ciascuna delle quali può applicarsi il lemma del § 2. Ed infatti, le funzioni $F_{x'}(x_0, y_0, x'_0, y'_0)$, $F_{y'}(x_0, y_0, x'_0, y'_0)$ sono integrabili e inferiori in modulo ad un numero M_1 ; gli intervalli (s_i, s_{i+1}) non si sovrappongono e appartengono a $(0, L_0)$; le funzioni $x(s) - x_0(s)$, $y(s) - y_0(s)$ soddisfano, sugli intervalli (s_i, s_{i+1}) che figurano nelle $\sum_i'$ alle disuguaglianze (7) ed alle (6) e quindi anche alle

$$|x' - x'_0| < 1 + \frac{M}{m}, \quad |y' - y'_0| < 1 + \frac{M}{m}.$$

Prendendo dunque l'intero n soddisfacente alla (9) e sufficientemente grande, abbiamo, per il lemma ricordato,

$$\begin{aligned}\left| \sum_i' \int_{s_i}^{s_{i+1}} (x' - x'_0)F_{x'}(x_0, y_0, x'_0, y'_0) ds \right| &< \varepsilon + M_1 \sum_i' |x(s_{i+1}) - x_0(s_{i+1}) - x(s_i) + x_0(s_i)| \\ \left| \sum_i' \int_{s_i}^{s_{i+1}} (y' - y'_0)F_{y'}(x_0, y_0, x'_0, y'_0) ds \right| &< \varepsilon + M_1 \sum_i' |y(s_{i+1}) - y_0(s_{i+1}) - y(s_i) + y_0(s_i)|,\end{aligned}$$

e, tenendo conto delle disuguaglianze (8) e dell'ipotesi $\rho < \frac{1}{n^2}$,

$$\left| \sum_i' \int_{s_i}^{s_{i+1}} \{ (x' - x'_0) F_{x'} + (y' - y'_0) F_{y'} \} ds \right| < 2\varepsilon + 4M_1 \rho n < 2\varepsilon + \frac{4M_1}{n},$$

e se n è sufficientemente grande,

$$< 3\varepsilon.$$

È dunque, per n abbastanza grande,

$$\int_C F d\sigma - \int_{C_0} F ds > -\varepsilon(L_0 + 3).$$

Siccome ε è stato scelto ad arbitrio e questa disuguaglianza vale per tutte le curve C dell'intorno (ρ) della C_0 , intorno scelto nel modo indicato, la semicontinuità inferiore di I_C sulla C_0 è dimostrata ¹⁶).

§ 4.

Condizioni sufficienti per la semicontinuità.

b). — Il caso quasi-regolare.

II. Dimostriamo che:

Se, in tutto il campo A e per tutte le coppie (x', y') di numeri non nulli insieme, si ha sempre $F_1(x, y, x', y') \geq 0$, senza però che per nessun punto $(\bar{x}, \bar{y})$ di A sia $F_1(\bar{x}, \bar{y}, x', y') = 0$ identicamente per tutte le coppie (x', y') ammesse, l'integrale $\int_C F ds$ è una funzione semicontinua inferiormente (superiormente se, invece, della $F_1 \geq 0$, si ha $F_1 \leq 0$).

¹⁶) Il GOURSAT [loc. cit. 2), n° 3] nel dimostrare, per le curve ordinarie, la proposizione qui stabilita in generale, dopo aver notato che basta all'uopo confrontare il valore dell'integrale calcolato su una curva fissa C solamente con quello relativo alle curve variabili C' aventi lunghezza sempre inferiore ad un numero fisso, utilizza la seguente osservazione: « Étant donnée une suite de courbes C' satisfaisant à cette condition (lunghezza inferiore ad un numero fisso), on peut alors faire un changement de la variable indépendante t tel que les valeurs absolues des dérivées x' , y' , ξ' , η' (dove $x = x(t)$, $y = y(t)$, ($a \leq t \leq b$), rappresentano le equazioni parametriche della curva C e $x = x(t) + \xi(t)$, $y = y(t) + \eta(t)$ quelle della C') restent bornées dans l'intervalle (a, b) ». Poichè, dopo questo cambiamento della variabile indipendente, le funzioni ξ e η devono continuare a tendere uniformemente a

Osserviamo, innanzitutto, che, preso comunque un punto $P_0(x_0, y_0)$ nel campo A , si possono sempre scegliere tre costanti p_0, q_0 e r_0 , con $r_0 < 0$, in modo che la

zero in tutto (a, b) , noi vogliamo rilevare qui che la possibilità del cambiamento indicato non sussiste sempre.

Consideriamo, ad esempio, la curva C definita dalle equazioni

$$C) \quad x = t, \quad y = 0, \quad (0 \leq t \leq 1),$$

e la $C_{r,n}$, dove r e n indicano due qualsiasi numeri interi ≥ 2 , dalle altre

$$C_{r,n}) \quad x = t, \quad y = y_{r,n}(t), \quad (0 \leq t \leq 1),$$

essendo

$$\begin{aligned} y_{r,n}(t) &= 0 \quad \text{per} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{r}, \\ y_{r,n}(t) &= \frac{1}{rn} \sin \left\{ r^2 n^2 \left(t - \frac{1}{r} \right) \right\} \quad \text{per} \quad \frac{1}{r} \leq t \leq \frac{1}{r} + \frac{1}{rn}, \\ y_{r,n}(t) &= \frac{1-t}{rn-n-1} \sin rn \quad \text{per} \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{rn} \leq t \leq 1. \end{aligned}$$

La funzione $y_{r,n}(t)$ ha derivata continua in tutto l'intervallo $(0, 1)$ ad eccezione dei punti $t = \frac{1}{r}$, $t = \frac{1}{r} + \frac{1}{rn}$. Si può anche modificare leggermente la sua definizione nelle vicinanze di questi punti in modo che essa ammetta ovunque derivata continua; ma ciò non ha importanza per il seguito.

Le curve $C_{r,n}$, considerate per tutti i possibili valori di r e n , si possono ordinare in un'unica successione in molti modi. Scegliamo una di tali successioni, che chiameremo *successione delle $C_{r,n}$* .

È evidente che la successione delle $C_{r,n}$ tende uniformemente alla curva C , perchè $y_{r,n}(t)$, quando $rn \rightarrow \infty$, tende a zero uniformemente su tutto l'intervallo $(0, 1)$. Indicando poi con $L_{r,n}$ la lunghezza della $C_{r,n}$, si ha

$$\begin{aligned} L_{r,n} &= \frac{1}{r} + \int_{\frac{1}{r}}^{\frac{1}{r} + \frac{1}{rn}} \sqrt{1 + r^2 n^2 \cos^2 \left\{ r^2 n^2 \left(t - \frac{1}{r} \right) \right\}} dt + \sqrt{\frac{1}{r^2 n^2} \sin^2 rn + \left(1 - \frac{1}{r} - \frac{1}{rn} \right)^2}, \\ L_{r,n} &< \frac{1}{2} + 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Poichè la derivata di $y_{r,n}(t)$ in $\left(\frac{1}{r}, \frac{1}{r} + \frac{1}{rn} \right)$ è data da

$$y'_{r,n}(t) = rn \cos \left\{ rn \left(t - \frac{1}{r} \right) \right\}$$

e non resta quindi in modulo inferiore ad un numero fisso per tutti gli r e n , scegliamo comunque un'altra rappresentazione parametrica della C e delle $C_{r,n}$ tale che, essendo le rispettive equazioni

$$C) \quad x = \bar{x}(\tau), \quad y = \bar{y}(\tau) \equiv 0, \quad (0 \leq \tau \leq 1)$$

$$C_{r,n}) \quad x = \bar{x}_{r,n}(\tau), \quad y = \bar{y}_{r,n}(\tau), \quad (0 \leq \tau \leq 1),$$

funzione

$$(II) \quad \bar{F}(x, y, x', y') \equiv F(x, y, x', y') + p_0 x' + q_0 y'$$

le derivate delle funzioni $\bar{x}, \bar{y}, \bar{x}_{rn}, \bar{y}_{rn}$ restino tutte in modulo inferiori ad un numero fisso, che diremo M , in tutto l'intervallo $(0, 1)$ e per tutti i valori di r e n .

Dico che le $\bar{x}_{rn}, \bar{y}_{rn}$ non possono tendere uniformemente alle $\bar{x}, \bar{y}$, in tutto $(0, 1)$.

Si supponga, infatti, che tale convergenza uniforme sussista e si indichino con P'_{rn} e P''_{rn} i punti della curva C_{rn} che hanno rispettivamente per coordinate

$$x = \frac{1}{r}, \quad y = 0,$$

$$x = \frac{1}{r} + \frac{1}{rn}, \quad y = \frac{1}{rn} \sin rn.$$

Tenendo fisso l'indice r e facendo crescere all'infinito n , i punti detti tendono entrambi al punto P_r di C che ha per coordinate $x = \frac{1}{r}, y = 0$. Sia τ_r il valore del parametro τ che corrisponde al punto P_r , o più generalmente, poichè le funzioni $\bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau)$ potrebbero restare costanti in tutto un intervallo di valori di τ , si indichi con δ_r l'intervallo costituito da tutti i valori di τ che corrispondono al punto P_r di C . Siano poi τ'_{rn}, τ''_{rn} dei valori di τ che corrispondono rispettivamente a P'_{rn}, P''_{rn} . Tenuto inalterato l'indice r , i punti limiti dei punti τ'_{rn}, τ''_{rn} , per $n \rightarrow \infty$, devono necessariamente appartenere all'intervallo δ_r . Ed infatti, se τ'_r è ad esempio un punto limite di τ'_{rn} , per $n \rightarrow \infty$, per la continuità delle funzioni $\bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau)$ e per l'ammissa convergenza uniforme delle $\bar{x}_{rn}(\tau), \bar{y}_{rn}(\tau)$ alle precedenti funzioni, è $\bar{x}(\tau'_r) = \lim \bar{x}_{rn}(\tau'_{rn}) = \frac{1}{r}, \bar{y}(\tau'_r) = \lim \bar{y}_{rn}(\tau'_{rn}) = 0$, vale a dire $\bar{x}(\tau'_r), \bar{y}(\tau'_r)$ sono le coordinate di P_r . Si osservi ora che la differenza $\tau''_{rn} - \tau'_{rn}$ si mantiene, per tutti gli n , superiore ad un numero fisso maggiore di zero. Si ha invece che la lunghezza dell'arco di C_{rn} compreso fra i punti P'_{rn} e P''_{rn} è espressa dall'integrale

$$\int_{\tau'_{rn}}^{\tau''_{rn}} \sqrt{\bar{x}_{rn}^{\prime 2} + \bar{y}_{rn}^{\prime 2}} d\tau,$$

il quale, per essere sempre $|\bar{x}'_{rn}| < M, |\bar{y}'_{rn}| < M$, è minore di $M\sqrt{2} (\tau''_{rn} - \tau'_{rn})$. D'altra parte, la stessa lunghezza è espressa anche dall'integrale

$$\int_{\frac{1}{r}}^{\frac{1}{r} + \frac{1}{rn}} \sqrt{1 + r^2 n^2 \cos^2 \left\{ r^2 n^2 \left(t - \frac{1}{r} \right) \right\}} dt = \frac{1}{r^2 n^2} \int_0^{rn} \sqrt{1 + r^2 n^2 \cos^2 t} dt > \frac{1}{rn} \int_0^{rn} |\cos t| dt.$$

Ora, se k_{rn} indica un numero intero tale che sia

$$\frac{\pi}{2} k_{rn} \leq rn < \frac{\pi}{2} (k_{rn} + 1),$$

sia maggiore di zero in tutti i punti di A che appartengono al cerchio di centro P_0 e raggio r_0 e per tutte le coppie (x', y') di numeri non ambedue nulli. Ed infatti, considerata la superficie conica

$$z = F(x_0, y_0, x', y'),$$

riferita ad un sistema di assi cartesiani ortogonali x', y' , avente l'origine nel vertice della superficie stessa, e detto $(\bar{x}', \bar{y}')$ un punto del piano (x', y') per il quale sia $F_1(x_0, y_0, \bar{x}', \bar{y}') > 0$ e $F(x_0, y_0, \bar{x}', \bar{y}') \neq 0$, l'equazione del piano tangente alla superficie nel punto di coordinate $\bar{x}', \bar{y}', \bar{z} = F(x_0, y_0, \bar{x}', \bar{y}')$, è

$$z = x' F_{x'}(x_0, y_0, \bar{x}', \bar{y}') + y' F_{y'}(x_0, y_0, \bar{x}', \bar{y}').$$

Questo piano tocca la superficie conica lungo tutta la generatrice passante per il punto

e quindi tale che

$$\frac{2rn}{\pi} - 1 < k_{rn} \leq \frac{2rn}{\pi},$$

$$\frac{1}{rn} \int_0^{rn} |\cos t| dt \geq \frac{1}{rn} k_{rn} > \frac{2}{\pi} - \frac{1}{rn} > \frac{1}{\pi}.$$

Si ha dunque, in definitiva, che la lunghezza dell'arco considerato è compresa fra $\frac{1}{\pi}$ e $M\sqrt{2}(\tau''_{rn} - \tau'_{rn})$ e che perciò vale la disuguaglianza

$$\tau''_{rn} - \tau'_{rn} > \frac{1}{\pi M\sqrt{2}},$$

la quale è vera qualunque sia r e qualunque sia n . Per quanto si è mostrato più sopra sui punti limiti di τ'_{rn}, τ''_{rn} , risulta perciò che l'ampiezza di δ_r è $> \frac{1}{\pi M\sqrt{2}}$.

Osserviamo, infine, che due qualsiasi δ_r, δ_{r_1} e δ_{r_2} ad esempio, sono intervalli completamente distinti di $(0, 1)$ e cioè senza punti comuni. Ciò perchè nel primo è costantemente $\bar{x}(\tau) = \frac{1}{r_1}$ e nel secondo $\bar{x}(\tau) = \frac{1}{r_2}$. Deve esser pertanto $\sum_{r=2}^{\infty} \delta_r < 1$. Ma essendo sempre, come abbiamo dimostrato, $\delta_r > \frac{1}{\pi M\sqrt{2}}$, la serie $\sum \delta_r$ è divergente: si è giunti così ad una contraddizione la quale prova esser falsa l'ipotesi ammessa, che cioè le funzioni $\bar{x}_{rn}(\tau), \bar{y}_{rn}(\tau)$ tendano uniformemente alle $\bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau)$, in tutto l'intervallo $(0, 1)$.

$(\bar{x}', \bar{y}', \bar{z})$ e non ha in comune con essa nessun altro punto. Ciò perchè, ponendo

$$\begin{aligned} x' &= k \cos \theta, & y' &= k \sin \theta \\ \bar{x}' &= \bar{k} \cos \bar{\theta}, & \bar{y}' &= \bar{k} \sin \bar{\theta}, \end{aligned}$$

si ha, per la formula del n° 9:

$$\begin{aligned} F(x_0, y_0, x', y') - \{x' F_{x'}(x_0, y_0, \cos \bar{\theta}, \sin \bar{\theta}) + y' F_{y'}(x_0, y_0, \cos \bar{\theta}, \sin \bar{\theta})\} \\ = k \int_{\pi}^{\theta} F_1(x_0, y_0, \cos \alpha, \sin \alpha) \sin(\theta - \alpha) d\alpha; \end{aligned}$$

ed essendo sempre $F_1(x_0, y_0, x', y') \geq 0$ e $F_1(x_0, y_0, \bar{x}', \bar{y}') > 0$, l'integrale che qui figura risulta sempre maggiore di zero, per ogni θ dell'intervallo $(\bar{\theta} - \pi, \bar{\theta} + \pi)$, escluso il valore $\theta = \bar{\theta}$, cioè per tutti i punti della nostra superficie conica, eccettuati quelli che si trovano sulla generatrice detta.

Consideriamo allora il piano rappresentato dall'equazione

$$z = x'(1 - \lambda)F_{x'}(x_0, y_0, \bar{x}', \bar{y}') + y'(1 - \lambda)F_{y'}(x_0, y_0, \bar{x}', \bar{y}').$$

Esso passa per l'intersezione del piano tangente sopra indicato e del piano $z = 0$, e se λ è sufficientemente piccolo e positivo o negativo a seconda che $F(x_0, y_0, \bar{x}', \bar{y}') > 0$ oppure < 0 , risulta soddisfatta la disuguaglianza

$$(12) \quad F(x_0, y_0, x', y') - \{x'(1 - \lambda)F_{x'}(x_0, y_0, \bar{x}', \bar{y}') + y'(1 - \lambda)F_{y'}(x_0, y_0, \bar{x}', \bar{y}')\} > 0$$

per tutte le coppie (x', y') di numeri non ambedue nulli.

Se dunque prendiamo, in (11),

$$\begin{aligned} p_0 &= -(1 - \lambda)F_{x'}(x_0, y_0, \bar{x}', \bar{y}') \\ q_0 &= -(1 - \lambda)F_{y'}(x_0, y_0, \bar{x}', \bar{y}'), \end{aligned}$$

con λ scelto come si è detto, è evidente che, per la continuità della funzione $F(x, y, x', y')$ e per la sua omogeneità rispetto a (x', y') , in un cerchio del piano (x, y) di centro P_0 e raggio r_0 , convenientemente piccolo, è sempre, per tutte le possibili coppie di numeri x', y' , non nulli insieme,

$$\bar{F} > 0.$$

Essendo poi $\bar{F}_1 \equiv F_1$, è anche, contemporaneamente

$$\bar{F}_1 \geq 0.$$

Poichè la scelta della coppia $(\bar{x}', \bar{y}')$ può essere fatta in infiniti modi, converremo nel seguito, di scegliere per $(\bar{x}', \bar{y}')$ il punto del cerchio $x'^2 + y'^2 = 1$ in cui $F_1(x_0, y_0, x', y')$

è massima, e qualora di tali punti ve ne fossero diversi, di prendere fra essi quello per il quale l'angolo θ , compreso fra 0 e 2π (2π escluso) e determinato dalle uguaglianze $\cos \theta = x'$, $\sin \theta = y'$, è minimo.

Fissata così la coppia $(\bar{x}', \bar{y}')$ e considerati tutti i λ che hanno il segno già indicato, che sono in modulo ≤ 1 e per i quali la disuguaglianza (12) è sempre soddisfatta per tutti gli x', y' ammessi, sceglieremo fra essi quello il cui valore assoluto sia uguale alla metà del limite superiore dei valori assoluti dei λ stessi. Ciò fatto, prenderemo r_0 uguale alla metà del limite superiore di tutti i raggi dei cerchi del piano (x, y) aventi tutti il centro in P_0 e internamente ai quali ¹⁷⁾ è sempre soddisfatta la disuguaglianza $\bar{F} > 0$ per tutte le coppie (x', y') di numeri non ambedue nulli.

12. Possiamo ora procedere senz'altro alla dimostrazione della proposizione enunciata al principio del n° precedente.

Sia C_0 una delle curve del n° 3 e, considerato un suo punto qualsiasi P_0 , indichiamo con α_0 il massimo arco della C_0 che contiene il punto P_0 e che risulta costituito tutto di punti appartenenti al cerchio (P_0, r_0) , in cui r_0 è il raggio determinato al n° precedente. La funzione $\bar{F}$, più sopra determinata, soddisfa alle disuguaglianze $\bar{F} > 0$, $\bar{F}_1 \geq 0$ in tutta la parte del campo A interna al cerchio $(P_0, 2r_0)$ e per tutte le possibile coppie di numeri x', y' non ambedue nulli.

Pertanto, in forza della proposizione del n° 10, il suo integrale è sull'arco α_0 una funzione semicontinua inferiormente, e, preso un $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, è possibile determinare un numero ρ_0 maggiore di zero e minore di r_0 e tale che, per ogni arco α di curva (n° 3) appartenente ordinatamente all'intorno (ρ_0) di α_0 , sia

$$\int_{\alpha} \bar{F} d\sigma > \int_{\alpha_0} \bar{F} ds - \varepsilon,$$

dove σ e s rappresentano le misure degli archi parziali di α , α_0 , rispettivamente.

Ricordando la definizione della $\bar{F}$ (11), possiamo scrivere, come conseguenza di questa disuguaglianza,

$$\int_{\alpha} F d\sigma > \int_{\alpha_0} F ds - \varepsilon + \left(\int_{\alpha_0} (p_0 x' + q_0 y') ds - \int_{\alpha} (p_0 x' + q_0 y') d\sigma \right).$$

La differenza nella parentesi che qui figura è uguale, essendo p_0 e q_0 due costanti, a

$$\int_{P_0^{(0)} P_0^{(0)}} (p_0 x' + q_0 y') ds + \int_{P_0^{(1)} P_0^{(1)}} (p_0 x' + q_0 y') ds$$

¹⁷⁾ Naturalmente non si terrà nessun conto di quei punti che eventualmente non appartenessero al campo A .

dove $P_0^{(0)}, P_0^{(1)}$ indicano i due estremi di $\alpha_0, P^{(0)}, P^{(1)}$ quelli corrispondenti di $\alpha, P^{(0)}, P^{(1)}$ il segmento rettilineo che ha per primo estremo $P_0^{(0)}$ e per secondo $P_0^{(1)}$, e analogamente $P^{(1)}, P^{(1)}$.

La somma sopra scritta tende a zero con ρ_0 e perciò, se questo numero lo si prende sufficientemente piccolo, si ha

$$\int_{\alpha} F d\sigma > \int_{\alpha_0} F ds - 2\varepsilon,$$

la quale disuguaglianza prova che sull'arco α_0 è funzione semicontinua inferiormente anche l'integrale della F .

Possiamo dunque affermare che ogni punto P_0 della curva C_0 appartiene (come punto *interno*, fatta eccezione per gli estremi della curva) ad un arco α_0 della curva stessa, sul quale l'integrale della F è funzione semicontinua inferiormente.

Per il ben noto teorema di BOREL-LEBESGUE¹⁸), fra gli archi α_0 corrispondenti a tutti i punti della C_0 , è possibile di sceglierne un numero finito $\alpha_0^{(1)}, \alpha_0^{(2)}, \dots, \alpha_0^{(n)}$, in modo che ogni punto della curva appartenga ad almeno uno di essi. E sopprimendo in ciascuno di questi archi quelle parti che risultassero ricoprire archi dello stesso gruppo di indice inferiore, si verrà ad ottenere una divisione della curva C_0 in parti consecutive $\beta_0^{(1)}, \beta_0^{(2)}, \dots, \beta_0^{(m)}$, su ciascuna delle quali l'integrale della F sarà una funzione semicontinua inferiormente.

Se allora si considera una qualunque curva C ($n^\circ 3$) appartenente ordinatamente ad un intorno (ρ) della C_0 , e scelta una delle corrispondenze biunivoche, ordinate e continue intercedenti fra la C_0 e la C in modo che la distanza fra i punti corrispondenti risulti sempre minore di ρ , si indicano con $\beta^{(1)}, \beta^{(2)}, \dots, \beta^{(m)}$ gli archi della C che in essa corrispondono ai $\beta_0^{(1)}, \beta_0^{(2)}, \dots, \beta_0^{(m)}$, si ha che, per ρ sufficientemente piccolo, è

$$\int_{\beta^{(r)}} F d\sigma > \int_{\beta_0^{(r)}} F ds - \frac{\varepsilon}{m} \quad (r = 1, 2, \dots, m),$$

e quindi

$$\int_C F d\sigma > \int_{C_0} F ds - \varepsilon.$$

Ciò dimostra la semicontinuità dell'integrale della F e perciò la proposizione enunciata al principio del n° precedente.

13. Il caso regolare.

Un caso particolare della proposizione or ora provata è il seguente:

¹⁸) Cfr. CH. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Intégrales de LEBESGUE. Fonctions d'ensemble. Classes de BAIER* (Paris, Gauthier-Villars, 1916); pp. 13-14.

L'integrale regolare è una funzione semicontinua della curva d'integrazione e precisamente, semicontinua inferiormente se è sempre $F_1 > 0$, superiormente se $F_1 < 0$.

14. Nell'enunciato del n° 11 si è escluso che in qualche punto del campo A la $F_1(x, y, x', y')$ possa essere identicamente nulla per tutte le possibili coppie (x', y') . Dobbiamo ora esaminare il caso in cui effettivamente si presentano i punti indicati, che chiameremo eccezionali.

Dimostriamo in primo luogo che:

Se, nel campo A e per tutte le coppie (x', y') , è $F_1 \geq 0$ e se per ogni punto eccezionale [nel quale è $F_1 \equiv 0$ per tutte le coppie (x', y')] esiste un intorno in cui la funzione F soddisfa sempre alla disuguaglianza $F \geq 0$, l'integrale della F è una funzione semicontinua inferiormente.

Cominciamo con l'osservare che se (x, y) è un punto eccezionale di A , è

$$F(\bar{x}, \bar{y}, x', y') \equiv px' + qy',$$

con p e q costanti. Ed infatti, essendo

$$F_1 \equiv \frac{F_{x'x'}}{y'^2} \equiv -\frac{F_{x'y'}}{x'y'} \equiv \frac{F_{y'y'}}{x'^2},$$

dalla $F_1(\bar{x}, \bar{y}, x', y') \equiv 0$ scende $F_{x'x'} \equiv F_{x'y'} \equiv F_{y'y'} \equiv 0$, in $(\bar{x}, \bar{y})$, vale a dire la F , nel punto detto è funzione lineare nel complesso delle variabili x', y' . Segue perciò, dall'ipotesi fatta sul segno della F in un intorno di $(\bar{x}, \bar{y})$, che è necessariamente

$$F(\bar{x}, \bar{y}, x', y') \equiv 0,$$

perchè, se p e q non fossero entrambi nulli, la $F(\bar{x}, \bar{y}, x, y')$ potrebbe assumere valori positivi e negativi.

Premesso ciò, consideriamo una qualsiasi curva C_0 (n° 3) e indichiamo con E l'insieme dei suoi punti eccezionali. Dalla continuità della F_1 segue subito che l'insieme E è chiuso. Perciò, se ad ogni punto di E facciamo corrispondere il limite superiore r dei raggi dei cerchi che hanno il centro nel punto stesso e dentro i quali resta sempre verificata la $F \geq 0$, questi r ammettono su E un minimo non nullo, vale a dire, esiste un $r_0 > 0$ tale che sia sempre $r \geq r_0$. Di più, sempre per essere E chiuso, possiamo determinare su C_0 un numero finito di archi $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, senza punti comuni, tali da rinchiudere tutti i punti di E e da avere una lunghezza complessiva, che indicheremo con $\sum_{s=1}^n \alpha_s$, non superiore a $m(E) + \varepsilon$, dove $m(E)$ rappresenta la misura dell'insieme E (misura contata sulla curva) ed ε è un numero positivo prefissato ad arbitrio, ma $< \frac{r_0}{2}$.

Abbiamo allora, se M indica il massimo modulo di $F(x, y, x', y')$ sulla C_0 , quando si prenda come parametro l'arco della curva, e per essere, su E , $F \equiv 0$,

$$\left| \sum_{s=1}^n \int_{\alpha_s} F ds \right| < M \varepsilon.$$

Abbiamo inoltre che i punti degli archi α non appartenenti ad E distano da qualche punto di E di non più di $\varepsilon < \frac{r_0}{2}$ e che, perciò, tutti i punti degli α sono centri di cerchi di raggio $\frac{r_0}{2}$ nell'interno dei quali è sempre $F \geq 0$.

Siano ora $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ gli archi della C_0 che si ottengono da essa sopprimendo i punti interni agli α . In ciascuno degli archi β non è mai $F \equiv 0$, in nessun punto, per tutte le possibili coppie (x', y') ; possiamo quindi determinare un numero $r_1 > 0$ in modo che così non sia neppure nei punti che distano da quelli degli archi β per meno di r_1 . Sopra questi archi β l'integrale della F è pertanto, per la proposizione del n° 11, una funzione semicontinua inferiormente, e possiamo determinare un numero positivo ρ in guisa che, se β'_s è un qualsiasi arco di curva (n° 3) appartenente ordinatamente all'intorno (ρ) di β_s , si abbia

$$\int_{\beta'_s} F d\sigma > \int_{\beta_s} F ds - \frac{\varepsilon}{m}.$$

Se dunque indichiamo con ρ_0 un numero positivo minore di $\frac{r_0}{2}$ e di ρ , e consideriamo una qualsiasi curva C' (n° 3) appartenente ordinatamente all'intorno (ρ_0) della C_0 , abbiamo, dopo aver decomposto la C' negli archi α'_s e β'_s corrispondenti agli α_s e β_s , secondo una qualunque delle corrispondenze che fra essa curva e la C_0 si possono porre secondo la definizione di curva appartenente ordinatamente all'intorno (ρ_0) della C_0 (n° 4),

$$\begin{aligned} \int_{C'} F d\sigma &= \sum_1^n \int_{\alpha'_s} F d\sigma + \sum_1^m \int_{\beta'_s} F d\sigma \\ &> \sum_1^m \int_{\beta_s} F ds - \varepsilon, \end{aligned}$$

perchè sugli archi α'_s è sempre $F \geq 0$. Essendo poi, come già abbiamo notato,

$$\left| \sum_1^n \int_{\alpha_s} F ds \right| < M \varepsilon,$$

abbiamo anche

$$\int_{C'} F d\sigma > \sum_1^m \int_{\beta_s} F ds + \sum_1^n \int_{\alpha_s} F ds - \varepsilon(1 + M),$$

ossia

$$\int_{C'} F d\sigma > \int_{C_0} F ds - \varepsilon(1 + M).$$

Siccome M è indipendente da ε e questo ε può essere preso piccolo a piacere, la disuguaglianza scritta prova la semicontinuità dell'integrale della F ¹⁹⁾.

15. Un caso particolare notevole della proposizione precedente si ha quando in tutto il campo A e per tutte le coppie (x', y') è sempre

$$F_1 \geq 0, \quad F \geq 0.$$

Più particolarmente ancora l'integrale I_C è funzione semicontinua inferiormente quando sia

$$F(x, y, x', y') = g(x, y) \sqrt{x'^2 + y'^2},$$

con $g(x, y)$ funzione continua e sempre ≥ 0 in A ; ed anche quando sia

$$F(x, y, x', y') = g(x, y) G(x, y, x', y')$$

con $g(x, y)$ funzione continua e sempre ≥ 0 in A , e $G(x, y, x', y')$ funzione soddisfacente alle condizioni ammesse per la F al n° 2 ed alle disuguaglianze

$$G_1 \geq 0, \quad G \geq 0,$$

pure in tutto A ²⁰⁾.

16. Proseguendo nell'analisi del caso in cui possono esistere punti eccezionali, supponiamo che siano eccezionali tutti i punti del campo A , vale a dire che sia sempre, in tutto il campo A e per tutte le possibili coppie (x', y') , $F_1 \equiv 0$. Ciò equivale a supporre che sia sempre

$$F(x, y, x', y') \equiv x' P(x, y) + y' Q(x, y).$$

Ammetteremo qui che le funzioni $P(x, y)$, $Q(x, y)$ siano definite e continue insieme

¹⁹⁾ Un esempio in cui le condizioni del teorema ora dimostrato si trovano verificate è fornito dalla funzione

$$F(x, y, x', y') = x^2(1-x)^2 \sqrt{x'^2 + y'^2} + 8x^3(1-x)^3 y'.$$

Qui è sempre $F_1 \geq 0$, con $F_1 \equiv 0$ per $x=0$ e per $x=1$; e se δ è positivo e sufficientemente piccolo, è $F \geq 0$ per tutti gli x soddisfacenti alla $|x| < \delta$ oppure alla $|1-x| < \delta$. È poi chiaro che non è sempre $F \geq 0$, perchè è $F\left(\frac{1}{2}, y, 0, -1\right) = -\frac{1}{16}$.

²⁰⁾ Con G_1 indichiamo l'invariante di WEIERSTRASS relativo alla funzione G :

$$G_1 \equiv \frac{G_{x'x'}}{y'^2} \equiv -\frac{G_{x'y'}}{x'y'} \equiv \frac{G_{y'y'}}{x'^2}.$$

con le due derivate parziali $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ in tutto il campo A , e che in tutto questo campo risulti soddisfatta l'uguaglianza

$$(13) \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Sotto queste condizioni, dimostriamo che l'integrale

$$(14) \quad \int_C \{x' P(x, y) + y' Q(x, y)\} ds$$

è una funzione continua su ogni curva C_0 (n° 3) completamente interna al campo A , intendendo con ciò che ogni punto della C_0 sia interno al campo A .

Sia adunque C_0 una curva completamente interna ad A e indichiamo con r_0 un numero positivo convenientemente piccolo così che risultino interni ad A tutti i punti appartenenti a cerchi di raggio r_0 aventi il centro sulla C_0 .

Sia poi C un'altra curva qualsiasi (n° 3) appartenente ordinatamente ad un intorno (ρ) della C_0 , dove supponiamo $\rho < r_0$. Indicati con $P_0^{(0)}$ e $P_0^{(1)}$ gli estremi della C_0 (sovrapposti, su C_0 è chiusa) e con $P^{(0)}$, $P^{(1)}$ quelli della C , e considerati i segmenti rettilinei $P_0^{(0)} P^{(0)}$, $P^{(1)} P_0^{(1)}$, segue, per il teorema di GREEN, dalla (13)

$$\int_{P_0^{(0)} P^{(0)}} (x' P + y' Q) ds + \int_C \dots + \int_{P^{(1)} P_0^{(1)}} \dots = \int_{C_0} \dots^{21}.$$

E poichè gli integrali estesi ai segmenti $P_0^{(0)} P^{(0)}$, $P^{(1)} P_0^{(1)}$ tendono a zero con ρ , preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, si può determinare ρ in modo che sia sempre

$$\left| \int_{P_0^{(0)} P^{(0)}} \dots + \int_{P^{(1)} P_0^{(1)}} \dots \right| < \varepsilon,$$

comunque si prendano $P^{(0)}$ e $P^{(1)}$ nei cerchi $(P_0^{(0)}, \rho)$, $(P_0^{(1)}, \rho)$, rispettivamente.

Si ha allora

$$\left| \int_C \{x' P + y' Q\} d\sigma - \int_{C_0} \{x' P + y' Q\} ds \right| < \varepsilon,$$

disuguaglianza che prova la nostra proposizione.

²¹) Dalla (13) scende, per il teorema di GREEN, che l'integrale dell'espressione $x' P + y' Q$ esteso ad una curva chiusa è sempre uguale a zero. Per altro questa proprietà viene ad essere stabilita solo per quelle curve che si considerano nella dimostrazione del teorema ricordato e che di solito sono le curve semplici. Per applicare la proprietà in questione al caso nostro, basta però riguardare la curva che consideriamo come limite di una successione di poligonali chiuse, per ciascuna delle quali la proprietà stessa è valida.

17. Circa le condizioni imposte alle funzioni P e Q nel n° precedente, vogliamo osservare che, per la validità del teorema ivi dimostrato, esse possono essere sostituite da queste altre più generali [sufficienti per la validità del teorema di GREEN ²²]] e che supporremo verificate in ogni punto *interno* ad A , ad eccezione dell'ultima:

1°) Le funzioni P e Q siano continue.

2°) La P sia funzione assolutamente continua di y e la Q funzione assolutamente continua di x .

3°) Le derivate parziali $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$, considerate là dove esistono, siano superficialmente integrabili.

4°) La uguaglianza (13) sia verificata quasi ovunque nell'interno di A .

Osserviamo, inoltre, che la uguaglianza (13), supposta verificata in ogni punto *interno* ad A , è sufficiente per la validità del teorema del n° precedente anche sotto la sola condizione che le funzioni P e Q siano *differenziabili* ²³).

Ed infatti, sotto questa ipotesi, l'integrale dell'espressione $x'P + y'Q$, esteso ad una curva rettificabile chiusa è sempre nullo ²⁴).

18. La continuità dell'integrale (14), stabilita al n° 16 per le curve completamente interne al campo A , può essere estesa a *tutte* le curve che appartengono al campo, sotto determinate condizioni relative alle funzioni P e Q oppure relative al campo stesso. Più precisamente si può affermare che:

L'integrale (14) è una funzione continua su ogni curva C (n° 3):

a) se le funzioni P e Q possono definirsi in un nuovo campo A' , tale che ogni punto di A risulti *interno* ad esso, e in modo che in A' le due funzioni godano delle stesse proprietà ammesse al n° 16 per il campo A , e coincidano in quest'ultimo campo con le funzioni date;

b) oppure se, ammesse le condizioni del n° 16, la frontiera di A è tale che:

²²) Cfr. CH. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Cours d'Analyse Infinitésimale*, 2^{me} édit., t. II (Lonvain, A. Uystpryrt, Dieudonné, 1912); p. 125.

²³) Intendiamo che una funzione $z = f(x, y)$ sia differenziabile in un punto (x, y) se, in tutto un intorno di tal punto, si può scrivere

$$f(x + h, y + k) - f(x, y) = Ah + Bk + \varepsilon$$

con A e B indipendenti da h e k e ε infinitesimo di ordine superiore rispetto a $\sqrt{h^2 + k^2}$. Ricordiamo che per la differenziabilità in un punto è condizione sufficiente l'esistenza in esso di una delle due derivate parziali prime e l'esistenza dell'altra in tutto un intorno del punto e la sua continuità nel punto stesso.

²⁴) Cfr. A. PRINGSHEIM, *Der CAUCHY-GOURSATSche Integralsatz und seine Übertragung auf reelle Kurven-Integrale* (Sitzungsberichte der mathem.-phys. Klasse der Kgl. Bayer. Akademie der Wissenschaften, Bd. XXXIII, 1903, pp. 673-682).

1°) preso un numero $\rho > 0$ qualsiasi ed un punto M pure qualsiasi di A , si possa sempre determinare un cerchio di centro M in modo che ogni suo punto appartenente ad A possa congiungersi con M mediante una curva continua, di A , di lunghezza $< \rho$; 2°) si possa determinare un numero positivo R in maniera che ogni poligonale chiusa, senza punti multipli, di A , avente la massima corda minore di R , non racchiuda che punti di A ; 3°) considerata una qualunque curva continua e rettificabile di A e fissato comunque un suo intorno, si possa sempre trovare una poligonale ordinatamente appartenente a questo intorno avente lunghezza diversa da quella della curva di quanto poco si vuole, e tutta costituita di punti interni ad A .

Il caso b) si verifica certamente se la parte della frontiera di A contenuta in ogni porzione limitata di piano è costituita da una curva convessa, oppure da una poligonale, ecc. Quando P e Q sono costanti è poi verificato sicuramente il caso a).

19. Ritornando ora al caso generale dell'integrale

$$I_C = \int_C F ds,$$

possiamo dedurre dalle precedenti considerazioni che:

Se, in ogni punto del campo A , è sempre $F_1 \geq 0$ ed è possibile di determinare due funzioni $P(xy)$, $Q(xy)$, continue insieme con le due derivate parziali $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ in tutto A e in esso sempre soddisfacenti alla uguaglianza

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

e inoltre tali che nello stesso campo sia sempre

$$(15) \quad F(x, y, x', y') + \{x' P(xy) + y' Q(xy)\} \geq 0,$$

l'integrale I_C risulta funzione semicontinua inferiormente su ogni curva ($n^\circ 3$) completamente interna ad A ; e lo è poi anche su qualsiasi curva appartenente ad A se è verificata una qualsiasi delle due condizioni enunciate al $n^\circ 18$.

Posto infatti

$$\bar{F} \equiv F + \{x' P + y' Q\},$$

è sempre $\bar{F}_1 \equiv F_1 \geq 0$ e per la (15) anche $\bar{F} \geq 0$. Dal teorema del $n^\circ 15$ segue dunque la semicontinuità di $\int_C \bar{F} ds$; vale a dire, preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, è possibile di determinare un $\rho > 0$ tale che, se C' è una qualsiasi curva ($n^\circ 3$) appartenente ordinatamente all'intorno (ρ) della C , si abbia

$$\int_{C'} \bar{F} d\sigma > \int_C \bar{F} ds - \varepsilon,$$

ossia

$$\int_{C'} F d\sigma > \int_C F ds - \varepsilon + \left[\int_C \{x'P + y'Q\} ds - \int_{C'} \{x'P + y'Q\} d\sigma \right].$$

Ma per le condizioni cui soddisfano le funzioni P e Q e per i teoremi dei n° 16 e 18, l'integrale della $x'P + y'Q$ è funzione continua della curva d'integrazione su ogni curva completamente interna ad A , oppure su qualunque curva se è soddisfatta anche una delle due ipotesi del n° 18. Supposto dunque che C sia completamente interna ad A oppure che sia verificata una delle due condizioni cui si è accennato, la differenza

$$\int_C \{x'P + y'Q\} ds - \int_{C'} \{x'P + y'Q\} d\sigma$$

per ρ sufficientemente piccolo, si può rendere minore di $\frac{\varepsilon}{2}$, e risulta così

$$\int_{C'} F d\sigma > \int_C F ds - \frac{3}{2} \varepsilon.$$

Ciò prova la nostra proposizione.

20. Il teorema precedente conserva la sua piena validità anche se, ferme restando le altre ipotesi, la determinazione delle funzioni $P(xy)$, $Q(xy)$, nel modo indicato, anziché in tutto il campo, è possibile soltanto in un intorno, comunque piccolo, di ciascun punto *eccezionale*, dove cioè è $F_1 \equiv 0$ per tutte le possibili coppie (x', y') .

Per assicurarsi di ciò basta ragionare come si è fatto al n° 12, osservando che, considerata una curva C e un suo punto P , se questo punto è eccezionale, appartiene ad un arco della C su cui l'integrale della F è semicontinuo inferiormente, in forza della stessa proposizione precedente, e se P non è eccezionale l'esistenza di un arco simile è garantita dal teorema del n° 11 ²⁵⁾.

21. Dalla proposizione del n° 19 e per l'osservazione fatta or ora può dedursi una

²⁵⁾ Un esempio relativo al caso qui considerato è il seguente:

$$F = y^2(1 - y^2)^2 \sqrt{x'^2 + y'^2} + \frac{1}{10} \left\{ \frac{1}{2} - (1 - y^2)^2 \right\} \{1 + (1 - y^2)^2\} x'.$$

Per questa funzione è sempre

$$F_1 = \frac{y^2(1 - y^2)^2}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} \geq 0,$$

con $F_1 \equiv 0$ per $y = 0$ e $y = \pm 1$.

Per ε sufficientemente piccolo, si ha $F + \frac{1}{10} x' \geq 0$; quando sia $|y| < \varepsilon$; $F - \frac{1}{20} x' \geq 0$, quando $|1 - y^2| < \varepsilon$.

conseguenza notevole relativamente alle funzioni F della forma

$$F \equiv \varphi(hx + ky) G(x, y, x', y').$$

Si supponga che :

1°) $\varphi(u)$ sia una funzione *non negativa*, continua insieme con la sua prima derivata, per tutti i valori di u definiti dall'uguaglianza $u = hx + ky$, dove h e k sono due costanti assegnate e (x, y) è un punto qualsiasi del campo A ;

2°) $G(x, y, x', y')$ sia una funzione soddisfacente alle condizioni poste al n° 2 per la F e alla disuguaglianza $G_1(x, y, x', y') \geq 0$ ²⁶⁾ in tutto il campo A , senza che in nessun punto di esso sia mai $G_1 \equiv 0$ per tutte le possibili coppie (x', y') ;

3°) si abbia, in ogni punto di A dove è $\varphi(hx + ky) = 0$, $G > 0$ per quelle coppie (x', y') di numeri non ambedue nulli che verificano l'uguaglianza $hx' + ky' = 0$.

Sotto queste ipotesi, l'integrale

$$(16) \quad \int_C \varphi(hx + ky) G(x, y, x', y') ds$$

è una funzione semicontinua inferiormente su ogni curva (n° 3) appartenente ad A .

Per provarlo, cominciamo col dimostrare che, se (x_0, y_0) è un punto di A in cui è $\varphi(hx_0 + ky_0) = 0$, è possibile di determinare un numero p_0 in guisa che si abbia

$$G(x_0, y_0, x', y') + p_0(hx' + ky') > 0,$$

per tutte le coppie (x', y') di numeri non ambedue nulli.

Preso un sistema di assi cartesiani ortogonali (x', y', z) , la superficie conica rappresentata dall'equazione

$$z = G(x_0, y_0, x', y')$$

resta, per le considerazioni svolte al n° 11, tutta al disopra di un qualunque suo piano tangente e tocca questo piano in tutti i punti di una sua generatrice o di un'infinità di generatrici riempienti un angolo minore di 2π . La superficie conica risulta perciò convessa, e per la retta $hx' + ky' = 0$ del piano (x', y') , la quale in forza della condizione 3^a) risulta esterna alla superficie, si potranno condurre almeno due piani tangenti alla superficie medesima. L'equazione di uno qualunque di questi piani potrà scriversi

$$z = p(hx' + ky'),$$

con p costante, e si avrà sempre

$$G(x_0, y_0, x', y') - p(hx' + ky') \geq 0.$$

²⁶⁾ Con G_1 indichiamo ancora l'invariante di WEIERSTRASS relativo alla G .

Inoltre, per la proprietà ricordata della retta $hx' + ky' = 0$, le generatrici di contatto della superficie conica e del piano tangente sopra scritto si troveranno, su questo stesso piano, tutte dalla medesima parte della retta detta e potrà scegliersi un numero λ sufficientemente piccolo, e positivo o negativo a seconda che sulle generatrici di contatto sarà $G > 0$ oppure $G < 0$, in maniera che si abbia

$$G(x_0, y_0, x', y') - p(1 - \lambda)(hx' + ky') > 0,$$

per tutte le possibili coppie (x', y') di numeri non ambedue nulli. Prendendo dunque $p_0 = -p(1 - \lambda)$ si ha quanto più sopra si è affermato. Ed è evidente che si può, in molti modi, fissare un criterio per scegliere un valore di p_0 fra gli infiniti valori che esso ammette.

Per la continuità e l'omogeneità della funzione G , possiamo aggiungere che, in corrispondenza del punto (x_0, y_0) , è possibile determinare un numero positivo ρ_0 così che, in tutto il cerchio di centro (x_0, y_0) e raggio ρ_0 , si abbia

$$G(x, y, x', y') + p_0(hx' + ky') > 0,$$

per tutte le solite coppie (x', y') di numeri non ambedue nulli. Nello stesso cerchio è allora

$$\varphi(hx + ky)G(x, y, x', y') + \varphi(hx + ky)p_0(hx' + ky') \geq 0,$$

e siccome è sempre

$$\frac{\partial \{p_0 h \varphi(hx + ky)\}}{\partial y} = \frac{\partial \{p_0 k \varphi(hx + ky)\}}{\partial x},$$

la semicontinuità dell'integrale (16) segue senz'altro da quanto si è stabilito ai n° 19 e 20.

22. È utile osservare che, se la funzione G è indipendente da x e y , alla 3ª condizione della proposizione dimostrata ora può sostituirsi quest'altra, che sia cioè « $G \geq 0$ per quelle coppie (x', y') di numeri che verificano l'uguaglianza $hx' + ky' = 0$ ». Ed inverso, si potrà, sotto questa condizione, determinare un numero p tale che si abbia

$$G(x', y') + p(hx' + ky') \geq 0,$$

per tutti i possibili valori di x', y' , e quindi si potrà soddisfare alle condizioni dell'enunciato del n° 19 ²⁷⁾.

²⁷⁾ Sia per es. $F = (x + y)^2(\sqrt{5x'^2 + 4y'^2} - 3x')$ e si consideri un campo A contenente l'origine delle coordinate. È $F(0, 0, x', y') \equiv 0$; $G = \sqrt{5x'^2 + 4y'^2} - 3x'$, e perciò $G_1 = \frac{4}{\sqrt{5x'^2 + 4y'^2}} > 0$. È inoltre $\varphi(hx + ky) = (x + y)^2$, e se è $x' + y' = 0$, è $G = 0$ per $x' \geq 0$, $G = 6|x'|$ per $x' < 0$. Prendendo qui $p = \frac{4}{3}$, si ha sempre

$$G + \frac{4}{3}(x' + y') = \sqrt{5x'^2 + 4y'^2} - \frac{5}{3}x' + \frac{4}{3}y' \geq 0.$$

23. Supponiamo di aver sempre, in ogni punto di A , $F_1 \geq 0$ e che, in ogni punto eccezionale (x_0, y_0) interno al campo, sia verificata la

$$(17) \quad F_{x'y}(x_0, y_0, x', y') \equiv F_{y'x}(x_0, y_0, x', y')$$

per tutte le possibili coppie (x', y') .

Come già si è osservato altrove (n° 14), in ogni punto eccezionale (x_0, y_0) deve essere necessariamente

$$(18) \quad F(x_0, y_0, x', y') \equiv p_0 x' + q_0 y',$$

con p_0 e q_0 costanti. Inoltre, per essere sempre $F_1 \geq 0$ e $F_1(x_0, y_0, x', y') \equiv 0$, il punto (x_0, y_0) costituisce un minimo per la F_1 , e quindi anche per le $F_{x'x'}$, $F_{y'y'}$, come risulta dalla definizione stessa della F_1

$$F_1 \equiv \frac{F_{x'x'}}{y'^2} \equiv -\frac{F_{x'y'}}{x'y'} \equiv \frac{F_{y'y'}}{x'^2}.$$

È dunque, per $x = x_0$, $y = y_0$,

$$F_{x'x'x} \equiv F_{x'x'y} \equiv F_{y'y'x} \equiv F_{y'y'y} \equiv 0,$$

identicamente per tutte le coppie (x', y') . Da ciò segue che $F_x(x_0, y_0, x', y')$ e $F_y(x_0, y_0, x', y')$ sono funzioni lineari nella x' e pure lineari nella y' , e sarà

$$\begin{aligned} F_x(x_0, y_0, x', y') &\equiv p_1 x' + q_1 y' + r_1 x' y', \\ F_y(x_0, y_0, x', y') &\equiv p_2 x' + q_2 y' + r_2 x' y'. \end{aligned}$$

Ma la $F_1 \geq 0$ porta che sia sempre $-\frac{F_{x'y'}}{x'y'} \geq 0$ e quindi $F_{x'y'}(x, y, 0, 1) \equiv 0$,
dove

$$F_{x'y'x}(x, y, 0, 1) \equiv 0, \quad F_{x'y'y}(x, y, 0, 1) \equiv 0.$$

È pertanto $r_1 = r_2 = 0$, vale a dire

$$(19) \quad \begin{cases} F_x(x_0, y_0, x', y') \equiv p_1 x' + q_1 y', \\ F_y(x_0, y_0, x', y') \equiv p_2 x' + q_2 y'. \end{cases}$$

Da ciò segue che, in (x_0, y_0) , le derivate $F_{xx'}$, $F_{xy'}$, $F_{yx'}$, $F_{yy'}$, sono costanti rispetto alle x' , y' e precisamente uguali a p_1 , q_1 , p_2 , q_2 , rispettivamente.

La (17) diventa, perciò,

$$(17') \quad p_2 = q_1,$$

e possiamo rilevare che, per poter affermare la validità della (17) per tutte le coppie (x', y') , basta assicurarsi della validità sua per una sola coppia.

Ciò posto, definiamo, in un intorno del punto (x_0, y_0) due funzioni $P(x, y)$,

$Q(x, y)$, continue insieme con le loro derivate parziali prime, in modo da soddisfare alle condizioni

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} P(x_0, y_0) = p_0, \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) = p_2, \\ \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) = p_1, \\ Q(xy) = \int_{x_0}^x \frac{\partial P}{\partial y} dx + \varphi(y), \\ \varphi(y_0) = q_0, \\ \varphi'(y_0) = q_2, \end{array} \right.$$

dalle quali segue che, in tutto l'intorno detto, è

$$(21) \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Considerata poi la funzione

$$\bar{F}(x, y, x', y') \equiv F(x, y, x', y') - \{x'P(x, y) + y'Q(x, y)\},$$

abbiamo che, nell'intorno di (x_0, y_0) in cui essa risulta definita, è sempre soddisfatta la $\bar{F}_1 \geq 0$ ed è $\bar{F}_1(x_0, y_0, x', y') \equiv 0$; è anche, tenendo conto delle (18), (19), (17'), (20), (21),

$$\bar{F}(x_0, y_0, x', y') \equiv 0,$$

$$\bar{F}_x(x_0, y_0, x', y') \equiv \{p_1 x' + q_1 y'\} - \{p_1 x' + q_1 y'\} \equiv 0,$$

$$\bar{F}_y(x_0, y_0, x', y') \equiv \{p_2 x' + q_2 y'\} - \{p_2 x' + q_2 y'\} \equiv 0.$$

Se, data l'arbitrarietà che le condizioni (20) consentono alla definizione delle funzioni $P(xy)$, $Q(xy)$, si possono scegliere queste funzioni in modo che, in un cerchio di centro (x_0, y_0) e raggio ρ_0 , convenientemente piccolo [da prendersi così piccolo che tutti i punti del cerchio risultino punti *interni* ad A , come lo è, per ipotesi, (x_0, y_0)], la $\bar{F}$ abbia in (x_0, y_0) un minimo, allora, in tutto il cerchio detto, è

$$\bar{F} \geq 0^{28)},$$

²⁸⁾ Per essere sempre $\bar{F}_1 \geq 0$ si può dire che, comunque si scelgano le P e Q , su ogni punto $(\bar{x}, \bar{y})$ di un intorno di (x_0, y_0) è $\bar{F} \geq 0$ per tutte le coppie (x', y') di almeno metà del cerchio $x'^2 + y'^2 = 1$ e per tutte quelle ad esse proporzionali, con fattore di proporzionalità positivo.

e tale disuguaglianza, unita alla $\bar{F}_1 \geq 0$ e alla (21) permette di affermare, in forza del teorema del n° 19, che su ogni curva contenuta nel medesimo cerchio l'integrale della F è funzione semicontinua inferiormente.

Considerata poi una curva C completamente interna ad A , e supposto che quanto si è detto ora si verifichi per ogni punto eccezionale, risulta (n° 20) senz'altro la semicontinuità inferiore di I_C sulla C .

24. In ciò che precede, per stabilire la semicontinuità di I_C , nel caso quasi-regolare, abbiamo sempre aggiunto alla condizione $F_1 \geq 0$ qualche altra condizione complementare.

Nel § 6 di questo Capitolo si vedrà che la condizione $F_1 \geq 0$ non è di per sé sufficiente ad assicurare la semicontinuità inferiore dell'integrale della F ; tuttavia, nel caso generale quasi-regolare si può dimostrare una proposizione, di notevole importanza nei riguardi del Calcolo delle Variazioni, la quale stabilisce per il nostro integrale una specie di semicontinuità inferiore limitata. Si può cioè dimostrare che:

Preso ad arbitrio un numero positivo L , l'integrale quasi-regolare è una funzione semicontinua nella classe delle curve (n° 3) non superiori in lunghezza al numero L .

Scelto comunque un $\varepsilon > 0$, prendiamo

$$\eta = \frac{\varepsilon}{2L}$$

e consideriamo la funzione

$$\bar{F}(x, y, x', y') \equiv F(x, y, x', y') + \eta \sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

Essa soddisfa in ogni punto di A alla disuguaglianza $\bar{F}_1 \geq 0$ — supposto che sia sempre $F_1 \geq 0$ — per tutte le coppie (x', y') di numeri non ambedue nulli, e quindi, in forza del teorema del n° 13, fissata una curva C_0 (n° 3) di lunghezza non superiore ad L , possiamo determinare un numero $\rho > 0$ in modo che sia

$$\int_C \bar{F} d\sigma > \int_{C_0} \bar{F} ds - \frac{\varepsilon}{2},$$

per tutte le curve C (n° 3) appartenenti ordinatamente all'intorno (ρ) della C_0 .

Se ora consideriamo fra le C soltanto quelle curve C' che hanno lunghezza non superiore ad L , possiamo dedurre dalla disuguaglianza precedente

$$\int_{C'} F d\sigma + \eta L > \int_{C_0} F ds + \eta \int_{C_0} ds - \frac{\varepsilon}{2},$$

e per il modo nel quale è stato scelto il numero η ,

$$\int_{C'} F d\sigma > \int_{C_0} F ds - \varepsilon.$$

Questo basta per provare la proposizione enunciata.

25. Possiamo enunciare anche il seguente corollario:

Se $P(xy)$ e $Q(xy)$ sono due funzioni continue nel campo A , preso ad arbitrio un numero positivo L , l'integrale

$$\int_C \{x' P(xy) + y' Q(xy)\} ds$$

è una funzione continua nella classe delle curve (n° 3) che hanno lunghezza non superiore al numero L .

§ 5.

Condizioni sufficienti per la semicontinuità.

c) La semicontinuità su una data curva.

26. Sino ad ora ci siamo sempre occupati di stabilire la semicontinuità di I_C su tutte le curve del campo A oppure su tutte quelle completamente interne al campo stesso. Ora dobbiamo portare la nostra attenzione al problema di assegnare le condizioni sufficienti affinché, data una curva C , si possa asserire che sopra di essa l'integrale I_C è funzione semicontinua. È ben evidente che tutti i teoremi dei §§ 3 e 4 danno senz'altro altrettante proposizioni per il caso attuale, quando si suppongano verificate in tutto un intorno della curva considerata le condizioni che in essi figurano. Alcune di queste proposizioni possono però enunciarsi supponendo le condizioni relative verificate soltanto sulla curva C , senza tener alcun conto di quanto avviene nell'intorno della curva medesima. Si ha così che:

l'integrale I_C è, sulla curva data C , funzione semicontinua inferiormente se, in ogni punto della C e per ogni coppia $(x' y')$ di numeri non ambedue nulli, è verificata una delle due condizioni seguenti:

1°) $F_1 \geq 0$, $F > 0$;

2°) $F_1 \geq 0$ senza che in nessun punto di C sia $F_1(x, y, x', y')$ identicamente nulla per tutte le coppie $(x' y')$ ammesse.

Consideriamo il primo caso. Essendo sulla C sempre $F > 0$, è possibile per la continuità di determinare un intorno (ρ) di essa in ogni cui punto appartenente ad A sia sempre $F > 0$ per tutte le coppie $(x' y')$ di numeri non ambedue nulli. Sostituendo allora, al campo A , quella sua parte che appartiene all'intorno detto della C , si può ripetere interamente la dimostrazione del n° 10.

Passando al secondo caso, si ha senz'altro che i ragionamenti dei n° 11 e 12 possono ripetersi con la sola avvertenza di restringere la considerazione della disuguaglianza $F_1 \geq 0$ ai punti di C e di sfruttare il caso precedente.

Anche la proposizione del n° 24 vale sulla curva C supponendo solo che si abbia sempre su tal curva $F_i \geq 0$. Ed infatti, riprendendo la funzione $\bar{F}$ definita al n° indicato, la disuguaglianza $\bar{F}_i \geq \eta$, valida su tutta la C quando sia $x'^2 + \eta'^2 = 1$, porta l'altra $\bar{F}_i \geq \frac{\eta}{2}$, valida in tutto un intorno della curva medesima e per le stesse coppie (x', η') .

Per le altre proposizioni dei §§ 3 e 4, si può affermare che la condizione $F_i \geq 0$, che in esse sempre figura, basta supporla verificata solamente sui punti della curva considerata.

27. A quanto precede vogliamo aggiungere un'altra proposizione notevole.

Sia C_0 una curva (n° 3) di A e si indichi con θ_0 l'angolo (compreso fra zero e 2π , secondo estremo escluso) che la direzione positiva della tangente alla curva, là dove essa tangente esiste, forma con quella, pure positiva, dell'asse delle x .

Posto

$$E(x, y; x', y'; \bar{x}', \bar{y}') \equiv F(x, y, \bar{x}', \bar{y}') - \{x' F_{x'}(x, y, x', y') + y' F_{y'}(x, y, x', y')\},$$

si ha:

l'integrale I_C è sulla curva C_0 una funzione semicontinua inferiormente se:

a) in ogni punto (x_0, y_0) di C_0 , dove esiste la tangente alla curva, è

$$E(x_0, y_0; \cos \theta_0, \sin \theta_0; \cos \bar{\theta}, \sin \bar{\theta}) > 0$$

per tutti gli angoli $\bar{\theta}$, compresi fra zero e 2π , distinti da θ_0 ;

b) per ogni punto $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ di C_0 , dove non esiste la tangente alla curva, esiste un angolo $\bar{\theta}_0$, compreso fra zero e 2π , tale che sia

$$E(\bar{x}_0, \bar{y}_0; \cos \bar{\theta}_0, \sin \bar{\theta}_0; \cos \bar{\theta}, \sin \bar{\theta}) > 0$$

ancora per tutti i $\bar{\theta}$, compresi fra zero e 2π , distinti da $\bar{\theta}_0$.

Sia $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ un qualsiasi punto della curva C_0 . Per le ipotesi fatte, esiste una coppia $(\bar{x}'_0, \bar{y}'_0)$ di numeri non ambedue nulli [uguali rispettivamente a $\cos \theta_0, \sin \theta_0$, se in $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ esiste la tangente alla curva, a $\cos \bar{\theta}_0, \sin \bar{\theta}_0$, in caso contrario] tali da soddisfare alla disuguaglianza

$$E(\bar{x}_0, \bar{y}_0; \bar{x}'_0, \bar{y}'_0; x', y') > 0,$$

per tutte le coppie (x', y') di numeri non ambedue nulli e non multipli secondo uno stesso numero positivo di $\bar{x}'_0$ e $\bar{y}'_0$.

Consideriamo, riferita ad un sistema di assi cartesiani ortogonali x', y', z , la su-

perficie conica

$$z = F(\bar{x}_0, \bar{y}_0, x', y')$$

e il suo piano tangente

$$z_t = x' F_{x'}(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{x}'_0, \bar{y}'_0) + y' F_{y'}(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{x}'_0, \bar{y}'_0).$$

Per la disuguaglianza sopra scritta si ha, in tutti i punti $(\bar{x}', \bar{y}')$ indicati or ora,

$$z - z_t > 0,$$

e in tutti gli altri, quelli cioè della generatrice del cono passante per il punto

$$\{x'_0, y'_0, z = F(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{x}'_0, \bar{y}'_0)\},$$

$$z - z_t = 0.$$

Ed è evidente che, scegliendo un numero λ abbastanza piccolo e positivo o negativo a seconda che sulla generatrice sopra indicata è $z > 0$ oppure $z < 0$, si avrà, ponendo

$$\zeta = x'(1 - \lambda) F_{x'}(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{x}'_0, \bar{y}'_0) + y'(1 - \lambda) F_{y'}(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{x}'_0, \bar{y}'_0),$$

$$z - \zeta > 0,$$

in tutti i punti (x', y') ad eccezione dell'origine $(0, 0)$. Per la continuità della F , si avrà poi soddisfatta la disuguaglianza

$$F(x, y, x', y') - \zeta > 0$$

in tutto un intorno del punto $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ e per tutte le coppie (x', y') di numeri non ambedue nulli.

Indichiamo con $2\bar{\rho}$ il massimo raggio di un cerchio di centro $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$, tutto interno all'intorno detto, e con $\bar{\alpha}$ il massimo arco di C_0 che contiene $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ e che è contenuto nel cerchio di centro $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ e raggio $\bar{\rho}$. Posto

$$\bar{F}(x, y, x', y') \equiv F(x, y, x', y') - \zeta,$$

e indicata con $\bar{E}$ la funzione E relativa alla $\bar{F}$, abbiamo [per $a)$ e $b)$], su tutto l'arco $\bar{\alpha}$,

$$\bar{E}(x_0, y_0; x'_0, y'_0; \bar{x}', \bar{y}') > 0,$$

intendendo che x'_0, y'_0 siano rispettivamente uguali a $\cos \theta_0$, $\sin \theta_0$ oppure a $\cos \bar{\theta}_0$, $\sin \bar{\theta}_0$, a seconda che in (x_0, y_0) esiste o no la tangente alla C_0 , e che $\bar{x}', \bar{y}'$ siano due qualunque numeri non equimultipli di x'_0, y'_0 secondo un numero positivo o nullo.

Possiamo allora ripetere per l'arco $\bar{\alpha}$ tutta la dimostrazione del n° 10, sostituendo

però alla uguaglianza

$$F(x_0, y_0, x', y') = \{x' F_{x'}(x_0, y_0, x'_0, y'_0) + y' F_{y'}(x_0, y_0, x'_0, y'_0)\} \\ + \sqrt{x'^2 + y'^2} \int_{\theta_0}^{\theta} F_1(x_0, y_0, \cos \alpha, \sin \alpha) \sin(\theta - \alpha) d\alpha,$$

l'altra

$$\bar{F}(x_0, y_0, x', y') = \{x' \bar{F}_{x'}(x_0, y_0, x'_0, y'_0) + y' \bar{F}_{y'}(x_0, y_0, x'_0, y'_0)\} \\ + \bar{E}(x_0, y_0; x'_0, y'_0; x', y');$$

ed osservando che i punti di $\bar{\alpha}$ in cui manca la tangente costituiscono un insieme di misura nulla e quindi completamente trascurabile agli effetti dell'integrazione, e che in quelli ove la tangente esiste vale la disuguaglianza scritta più sopra, relativamente alla $\bar{E}$, per $x'_0 = \cos \theta_0$, $y'_0 = \sin \theta_0$, possiamo scrivere la disuguaglianza

$$D_i > -\varepsilon(s_{i+1} - s_i) + \int_{s_i}^{s_{i+1}} \{(x' - x'_0) F_{x'}(x_0, y_0, x'_0, y'_0) + (y' - y'_0) F_{y'}(x_0, y_0, x'_0, y'_0)\} ds$$

e proseguire così il ragionamento giungendo a stabilire sull'arco $\bar{\alpha}$ la semicontinuità inferiore dell'integrale di $\bar{F}$ e quindi di quello di F , essendo l'integrale della ζ una funzione continua della linea d'integrazione. Un ragionamento analogo a quello fatto al n° 12 ci porta infine a concludere che I_C è sulla curva C_0 una funzione semicontinua inferiormente.

28. OSSERVAZIONE I. — La proposizione or ora dimostrata continua a sussistere se fra i punti della curva C_0 in cui esiste la tangente ne esiste un insieme di misura nulla in cui non è verificata la condizione *a*), purchè però in essi sia verificata la *b*).

OSSERVAZIONE II. — Se è, sulla C_0 , sempre $F > 0$, per tutte le coppie $(x' y')$ di numeri non ambedue nulli, il teorema precedente vale sotto la sola condizione che, eccettuati i punti nei quali non esiste la tangente alla curva e quelli di un qualsiasi insieme di misura nulla, sia soddisfatta la disuguaglianza

$$E(x_0, y_0; \cos \theta_0, \sin \theta_0; \cos \bar{\theta}, \sin \bar{\theta}) \geq 0,$$

per tutti gli angoli $\bar{\theta}_0$.

OSSERVAZIONE III. — Dalla definizione della funzione E e dalla formula stabilita al n° 9, segue

$$E(x_0, y_0; \cos \theta_0, \sin \theta_0; \cos \theta, \sin \theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} F_1(x_0, y_0, \cos \alpha, \sin \alpha) \sin(\theta - \alpha) d\alpha,$$

e applicando il teorema della media,

$E(x_0, y_0; \cos \theta_0, \sin \theta_0; \cos \theta, \sin \theta) = \{1 - \cos(\theta - \theta_0)\} F_1(x_0, y_0, \cos \alpha', \sin \alpha')$,
con $\alpha' = \theta_0 + t(\theta - \theta_0)$, $0 < t < 1$. La condizione *a*) porta dunque, nei punti di

C_0 ove essa vale,

$$F_1(x_0, y_0, \cos \theta_0, \sin \theta_0) \geq 0;$$

e, per le osservazioni precedenti si vede che, pur avendosi sulla C_0 la semicontinuità inferiore di I_C , questa disuguaglianza può non essere soddisfatta in un insieme di punti della curva in cui esiste la tangente, purchè tale insieme sia di misura nulla ed in tutti i suoi punti sia soddisfatta la condizione $b)$ o purchè tale insieme sia di misura nulla e sia sempre, sulla C_0 , $F > 0$.

Perchè non sorgano dubbi sulla possibilità dell'effettiva esistenza di questo insieme, consideriamo il seguente esempio.

Sia

$$F = \frac{x'^2 + y'^2}{\sqrt{2(x'^2 + y'^2)} - x'}.$$

È

$$E(x, y, \cos \theta, \sin \theta; \bar{x}', \bar{y}') = \frac{\bar{x}'^2 + \bar{y}'^2}{\sqrt{2(\bar{x}'^2 + \bar{y}'^2)} - \bar{x}'} -$$

$$- \frac{\bar{x}' \{ \sqrt{2} \cos \theta + 1 - 2 \cos^2 \theta \} + \bar{y}' \sin \theta \{ \sqrt{2} - 2 \cos \theta \}}{(\sqrt{2} - \cos \theta)^2},$$

$$F_1(x, y, \cos \theta, \sin \theta) = \frac{\sqrt{2}(2\sqrt{2} - 3 \cos \theta)}{(\sqrt{2} - \cos \theta)^3}.$$

Scegliamo come curva C_0 quella formata nel seguente modo. Sia $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ la successione dei punti del segmento $(0, 1)$ definita da:

$$a_1 = 1$$

$$a_{n+1} = \sqrt{4a_n + 1} - (a_n + 1).$$

Questa successione è decrescente e tendente a zero. Sopra ogni segmento (a_{n+1}, a_n) , dell'asse x , preso come ipotenuso, costruiamo il triangolo rettangolo isoscele, con il vertice dell'angolo retto dalla parte degli y positivi. L'insieme di tutti i cateti di questi triangoli costituirà la nostra curva C_0 , la quale unirà così il punto $(0, 0)$ al punto $(1, 0)$; avrà lunghezza uguale a $\sqrt{2}$ e risulterà composta di un'infinità numerabile di segmenti rettilinei paralleli alle bisettrici degli angoli degli assi x e y . Nel punto $(0, 0)$ la C_0 ammette tangente e questa tangente è data dall'asse delle x . Infatti, nel vertice di C_0 di ascissa $\frac{a_n + a_{n+1}}{2}$, l'ordinata è data da $\frac{a_n - a_{n+1}}{2}$ ed è, per la definizione delle a_n ,

$$\frac{a_n - a_{n+1}}{2} = \left(\frac{a_n + a_{n+1}}{2} \right)^2;$$

tale vertice è perciò sulla parabola $y = x^2$.

Nel punto $(0, 0)$ è $\theta_0 = 0$, onde

$$F_1(0, 0, \cos 0, \sin 0) = \frac{\sqrt{2}(2\sqrt{2} - 3)}{(\sqrt{2} - 1)^3} < 0.$$

Per altro, essendo in ogni punto di C_0 dove esiste la tangente [escluso il punto $(0, 0)$],

$\cos \theta_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin \theta_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, si ha, in questi punti,

$$E(x_0, y_0; \cos \theta_0, \sin \theta_0; \cos \bar{\theta}, \sin \bar{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{2} - \cos \bar{\theta}} - 2 \cos \bar{\theta} = \frac{(\sqrt{2} \cos \bar{\theta} - 1)^2}{\sqrt{2} - \cos \bar{\theta}} \geq 0$$

ed essendo sempre, per tutte le coppie (x', y') numeri non ambedue nulli, $F > 0$, l'Osservazione II^a mostra che sulla C_0 l'integrale della F è semicontinuo inferiormente.

§ 6.

Condizioni necessarie per la semicontinuità.

a) La semicontinuità in tutto il campo.

29. Vogliamo dimostrare la seguente proposizione:

Condizione necessaria affinchè su ogni curva (n° 3) di A l'integrale I_C sia funzione semicontinua inferiormente, è che si abbia

$$(22) \quad F_1(x, y, x', y') \geq 0,$$

per ogni coppia di numeri x', y' non ambedue nulli e in tutti i punti (x, y) interni al campo A o limiti di punti interni.

Supponiamo che esistano un punto (x_0, y_0) , interno al campo A , ed un angolo θ_0 tali da rendere soddisfatta la disuguaglianza

$$F_1(x_0, y_0, \cos \theta_0, \sin \theta_0) < 0.$$

Per la continuità della funzione F_1 rispetto all'insieme delle quattro variabili x, y, x', y' , considerato un numero positivo η , comunque scelto, purchè soddisfacente alla disuguaglianza

$$F_1(x_0, y_0, \cos \theta_0, \sin \theta_0) < -\eta,$$

è possibile determinare un'altro numero positivo δ tale che sia

$$(23) \quad F_1(x, y, \cos \theta, \sin \theta) < -\eta$$

ogni qualvolta risultino soddisfatte le disuguaglianze

$$\begin{aligned} |x - x_0| &\leq \delta, & |y - y_0| &\leq \delta, \\ |\theta - \theta_0| &\leq \delta. \end{aligned}$$

Si intende che δ deve esser anche tale che i punti (xy) soddisfacenti alle due prime disuguaglianze risultino tutti interni al campo A .

Per il punto (x_0, y_0) si conduca un segmento rettilineo $P_0 P_1$, di lunghezza $l \leq \delta$, che faccia con la direzione positiva dell'asse delle x l'angolo θ_0 ; si scelga poi un angolo positivo $\alpha < \frac{\pi}{4}$, soddisfacente alla disuguaglianza $\alpha < \delta$. Dopo ciò si divida il segmento $P_0 P_1$ in n parti uguali e su ciascuna di esse, presa come base e sempre dalla stessa parte di $P_0 P_1$, si costruisca il triangolo isoscele avente gli angoli alla base uguali ad α . L'insieme di tutte le basi di questi triangoli darà allora il segmento $P_0 P_1$; l'insieme invece di tutti gli altri lati (fra loro uguali) darà una curva, che indicheremo con C_n , formata di $2n$ segmenti rettilinei e con gli estremi in P_0 e P_1 .

Preso un punto qualunque M di C_n , indichiamo con P la sua proiezione ortogonale su $P_0 P_1$ e con s la lunghezza del segmento $P_0 P$. Scegliendo s come parametro di una rappresentazione analitica simultanea delle curve $P_0 P_1$ e C_n , la quale faccia corrispondere P ad M , avremo, per $P_0 P_1$, le equazioni

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad (0 \leq s \leq l),$$

e per C_n

$$x = x_n(s), \quad y = y_n(s) \quad (0 \leq s \leq l);$$

e sarà, indicando con s_n la lunghezza dell'arco di C_n corrispondente all'intervallo $(0, s)$,

$$(24) \quad \begin{cases} x'(s) = \cos \theta_0, & y'(s) = \sin \theta_0, \\ x'_n(s) = \frac{dx_n}{ds_n} \cdot \frac{ds_n}{ds} = \frac{\cos(\theta_0 \pm \alpha)}{\cos \alpha}, & y'_n(s) = \frac{\sin(\theta_0 \pm \alpha)}{\cos \alpha}. \end{cases}$$

Consideriamo allora la differenza

$$\Delta I = \int_{C_n} F ds_n - \int_{P_0 P_1} F ds = \int_0^l \{F(x_n, y_n, x'_n, y'_n) - F(x, y, x', y')\} ds.$$

Essa può scriversi

$$\begin{aligned} \Delta I &= \int_0^l \{F(x_n, y_n, x'_n, y'_n) - F(x, y, x'_n, y'_n)\} ds \\ &\quad + \int_0^l \{F(x, y, x'_n, y'_n) - F(x, y, x', y')\} ds. \end{aligned}$$

Ma per la formula stabilita al n° 9, è, tenendo conto delle (24);

$$\begin{aligned} F(x, y, x'_n, y'_n) &= F\left[x, y, \frac{\cos(\theta_0 \pm \alpha)}{\cos \alpha}, \frac{\sin(\theta_0 \pm \alpha)}{\cos \alpha}\right] \\ &= \frac{1}{\cos \alpha} F[x, y, \cos(\theta_0 \pm \alpha), \sin(\theta_0 \pm \alpha)] \\ &= \frac{1}{\cos \alpha} \{\cos(\theta_0 \pm \alpha) F_{x'}(x, y, \cos \theta_0, \sin \theta_0) + \sin(\theta_0 \pm \alpha) F_{y'}(x, y, \cos \theta_0, \sin \theta_0) \\ &\quad + \int_{\theta_0}^{\theta_0 \pm \alpha} F_1(x, y, \cos \tau, \sin \tau) \sin(\theta_0 \pm \alpha - \tau) d\tau\} \\ &= x'_n F_{x'}(x, y, x', y') + y'_n F_{y'}(x, y, x', y') \\ &\quad + \frac{1}{\cos \alpha} \int_{\theta_0}^{\theta_0 \pm \alpha} F_1(x, y, \cos \tau, \sin \tau) \sin(\theta_0 \pm \alpha - \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Sostituendo nell'espressione di ΔI , si ha, per essere

$$\begin{aligned} F(x, y, x', y') &= x' F_{x'}(x, y, x', y') + y' F_{y'}(x, y, x', y'), \\ \Delta I &= \int_0^l \{F(x_n, y_n, x'_n, y'_n) - F(x, y, x'_n, y'_n)\} ds \\ &+ \int_0^l \{(x'_n - x') F_{x'}(x, y, x', y') + (y'_n - y') F_{y'}(x, y, x', y')\} ds \\ &+ \frac{1}{\cos \alpha} \int_0^l ds \int_{\theta_0}^{\theta_0 \pm \alpha} F_I(x, y, \cos \tau, \sin \tau) \sin(\theta_0 \pm \alpha - \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Osservando ora che, per la (23), è ²⁹⁾

$$\begin{aligned} &\int_{\theta_0}^{\theta_0 \pm \alpha} F_I(x, y, \cos \tau, \sin \tau) \sin(\theta_0 \pm \alpha - \tau) d\tau \\ &< -\eta \int_{\theta_0}^{\theta_0 \pm \alpha} \sin(\theta_0 \pm \alpha - \tau) d\tau = -\eta(1 - \cos \alpha), \end{aligned}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \Delta I &< \int_0^l \{F(x_n, y_n, x'_n, y'_n) - F(x, y, x'_n, y'_n)\} ds \\ &+ \int_0^l \{(x'_n - x') F_{x'}(x, y, x', y') + (y'_n - y') F_{y'}(x, y, x', y')\} ds \\ &\quad - \eta l(1 - \cos \alpha). \end{aligned}$$

Ora, siccome, per $n \rightarrow \infty$, $x_n(s)$ e $y_n(s)$ tendono uniformemente, in tutto l'intervallo $(0, l)$, a $x(s)$, $y(s)$, rispettivamente, ed è sempre $x_n'^2 + y_n'^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, dalla continuità della funzione F scende che, preso ad arbitrio un $\sigma > 0$, per n sufficientemente grande, il primo integrale della precedente disuguaglianza risulta minore di σ .

Ugualmente minore di σ risulta, per n sufficientemente grande, il secondo integrale, in forza del lemma del n° 8. Possiamo quindi concludere che, per ogni n maggiore di un certo $\bar{n}$, è

$$\Delta I = \int_{C_n} F ds_n - \int_{P_0 P_1} F ds < -\frac{\eta l(1 - \cos \alpha)}{2}.$$

E siccome, per $n \rightarrow \infty$, la curva C_n tende uniformemente al segmento $P_0 P_1$, resta dimostrato che l'integrale della F sul segmento $P_0 P_1$ non è funzione semicontinua inferiormente. Ciò prova che, in ogni punto *interno* al campo A , deve esser verificata la (22) se si vuole che si abbia sempre la semicontinuità inferiore di I_C .

La (22), essendo verificata in ogni punto *interno*, deve poi necessariamente essere

²⁹⁾ Aumentando, se occorre, $\theta_0 \pm \alpha$ di $\pm 2\pi$, si potrà sempre far in modo che la quantità sotto l'integrale che stiamo per scrivere risulti sempre di un segno nell'intervallo d'integrazione.

soddisfatta anche in ogni punto della frontiera di A che sia limite di punti *interni*: ciò che è immediata conseguenza della continuità della F_1 .

30. Un'ulteriore condizione necessaria, per la semicontinuità inferiore di I_C su ogni curva del campo A , è data dall'uguaglianza

$$(25) \quad F_{x'y}(x_0, y_0, \cos \theta \sin \theta) = F_{y'x}(x_0, y_0, \cos \theta, \sin \theta),$$

la quale deve essere soddisfatta, per tutti i valori di θ , in ogni punto (x_0, y_0) , interno ad A , in cui sia

$$F_1(x_0, y_0, x', y') \equiv 0$$

identicamente rispetto a tutte le possibili coppie (x', y') .

Consideriamo uno dei punti (x_0, y_0) ora indicati, e ammettiamo che esista un valore di θ, θ_0 , tale che sia

$$(26) \quad F_{x'y}(x_0, y_0, \cos \theta_0, \sin \theta_0) \neq F_{y'x}(x_0, y_0, \cos \theta_0, \sin \theta_0).$$

Indichiamo con γ un cerchio del piano (x, y) avente (x_0, y_0) sulla circonferenza e tale che tutti i suoi punti siano punti *interni* ad A . La sua circonferenza la indicheremo con γ' , il suo raggio, con r .

Detto M il modulo della differenza

$$F_{x'y}(x_0, y_0, \cos \theta_0, \sin \theta_0) - F_{y'x}(x_0, y_0, \cos \theta_0, \sin \theta_0),$$

indichiamo con δ un numero positivo tale che in tutto il cerchio del piano (x, y) di centro (x_0, y_0) e raggio δ sia

$$|F_{x'y}(x, y, \cos \theta_0, \sin \theta_0) - F_{y'x}(x, y, \cos \theta_0, \sin \theta_0)| \geq \frac{M}{2}.$$

Intenderemo che sia $r \leq \frac{\delta}{2}$. Sceglieremo anche il senso positivo sulla circonferenza γ' in modo che l'integrale

$$\int_{\gamma'} \{x' F_{x'}(x, y, \cos \theta_0, \sin \theta_0) + y' F_{y'}(x, y, \cos \theta_0, \sin \theta_0)\} ds,$$

il cui valore, per il teorema di GREEN, è dato da

$$\pm \iint_{\gamma} \{F_{x'y}(x, y, \cos \theta_0, \sin \theta_0) - F_{y'x}(x, y, \cos \theta_0, \sin \theta_0)\} dx dy,$$

risulti negativo. Sarà allora, per la precedente disuguaglianza,

$$\int_{\gamma'} \{x' F_{x'}(x, y, \cos \theta_0, \sin \theta_0) + y' F_{y'}(x, y, \cos \theta_0, \sin \theta_0)\} ds \leq -\frac{M}{2} \pi r^2.$$

Ciò premesso, consideriamo la curva γ'_n che si ottiene percorrendo n volte la cir-

conferenza γ' , nel senso positivo già stabilito, e l'integrale

$$\int_{\gamma'_n} F(x, y, x', y') ds.$$

Applicando la formula del n° 9, abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{\gamma'_n} F ds &= \int_{\gamma'_n} \{x' F_{x'}(x, y, \cos \theta_0, \sin \theta_0) + y' F_{y'}(x, y, \cos \theta_0, \sin \theta_0)\} ds \\ &\quad + \int_{\gamma'_n} ds \int_{\theta_0}^{\theta} F_1(x, y, \cos \alpha, \sin \alpha) \sin(\theta - \alpha) d\alpha \end{aligned}$$

dove θ risulta definito dalle $x'(s) = \cos \theta$, $y'(s) = \sin \theta$, ed è preso in modo che $\sin(\theta - \alpha)$ abbia segno costante in tutto l'intervallo (θ_0, θ) . Per l'ultima disuguaglianza scritta abbiamo

$$\int_{\gamma'_n} F ds \leq -\frac{M}{2} n \pi r^2 + \int_{\gamma'_n} ds \int_{\theta_0}^{\theta} F_1(x, y, \cos \alpha, \sin \alpha) \sin(\theta - \alpha) d\alpha,$$

ed anche, indicando con $F_1(r)$ il massimo valore di $F_1(x, y, \cos \alpha, \sin \alpha)$ nel cerchio γ e per ogni α (massimo che è ≥ 0 , per il n° 29),

$$\int_{\gamma'_n} F ds \leq -\frac{M}{2} n \pi r^2 + 4 \pi r n F_1(r) = \frac{\pi}{2} r^2 n \left(-M + 16 \frac{F_1(r)}{2r} \right).$$

Se indichiamo con λ la distanza dal punto (x_0, y_0) del punto del cerchio γ in cui F_1 assume il valore $F_1(r)$, abbiamo

$$\frac{F_1(r)}{2r} \leq \frac{F_1(r)}{\lambda};$$

e siccome in (x_0, y_0) la funzione F_1 è identicamente nulla, mentre negli altri punti è sempre $F_1 \geq 0$ (n° precedente), in (x_0, y_0) tale funzione ha un minimo ed è, per $\lambda \rightarrow 0$,

$$\frac{F_1(r)}{\lambda} \rightarrow 0.$$

Dunque, per ogni r minore di un certo r_1 , è

$$\int_{\gamma'_n} F ds < -\frac{\pi}{4} M r^2 n.$$

Questa disuguaglianza prova che, comunque si prenda una curva C_0 passante per (x_0, y_0) , su tale curva I_C non può essere semicontinuo inferiormente. Ed infatti, scelto ad arbitrio un numero positivo N e preso un $\rho > 0$ e piccolo quanto vuolsi, si con-

sideri la curva C composta: 1°) dell'arco di C_0 che dal primo estremo di questa curva va al punto (x_0, y_0) ; 2°) della curva γ'_n , dove si prenderà $r < \frac{\rho}{4}$, oltrechè soddisfacente alle condizioni dianzi indicate, e $n > \frac{4N}{\pi M r^2}$; 3°) dell'arco della C_0 che dal punto (x_0, y_0) va al secondo estremo della curva stessa. La curva così definita appartiene ordinatamente all'intorno (ρ) della C_0 e soddisfa alla disuguaglianza

$$\int_C F d\sigma < \int_{C_0} F ds - N,$$

dove con $d\sigma$ abbiamo indicato l'elemento d'arco di C e con ds quello della C_0 . Questa disuguaglianza, per essere $N > 0$ e ρ comunque piccolo, contraddice alla semicontinuità inferiore dell'integrale della F sulla curva C_0 .

31. Da quanto si è stabilito ai n° 29 e 30 risulta la proposizione:

Condizione necessaria affinché l'integrale I_C sia funzione semicontinua inferiormente, su ogni curva completamente interna al campo A , è che, in ogni punto interno a questo campo, sia sempre $F_1 \geq 0$, per tutte le coppie (x', y') di numeri non ambedue nulli, ed inoltre che, in ogni punto interno ad A in cui si abbia $F_1 \equiv 0$, per tutte le coppie (x', y') dette, sia $F_{x'y} \equiv F_{y'x}$ pure per tutte le stesse coppie (x', y') .

In particolare possiamo dire: Se $P(x, y)$, $Q(x, y)$ sono due funzioni continue nel campo A insieme con le due derivate $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$, condizione necessaria affinché, su ogni curva completamente interna ad A , l'integrale

$$\int_C \{x' P(x, y) + y' Q(x, y)\} ds$$

sia funzione semicontinua inferiormente o superiormente (oppure funzione continua) è che, in ogni punto interno o limite di punti interni al campo, sia $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

§ 7.

Condizioni necessarie per la semicontinuità.

b) La semicontinuità su una data curva.

32. Occupiamoci ora di determinare le condizioni necessarie affinché si abbia la semicontinuità di I_C su una determinata curva.

Cominciamo col dimostrare la seguente proposizione:

Condizione necessaria affinché su una data curva C_0 , completamente interna al campo A e dotata ovunque di tangente variabile in modo continuo, l'integrale I_C sia funzione

semicontinua inferiormente, è che in ogni punto (x_0, y_0) della curva si abbia

$$F_1(x_0, y_0, \cos \theta_0, \sin \theta_0) \geq 0,$$

dove θ_0 indica l'angolo che la direzione positiva della tangente alla curva stessa forma con la direzione positiva dell'asse delle x .

Supponiamo che in un punto (x_0, y_0) della C_0 sia

$$F_1(x_0, y_0, \cos \theta_0, \sin \theta_0) < 0.$$

Indicato, come al n° 29, con η un numero positivo soddisfacente alla disuguaglianza

$$F(x_0, y_0, \cos \theta_0, \sin \theta_0) < -\eta,$$

sia δ un altro numero positivo tale che risulti

$$F_1(x, y, \cos \omega, \sin \omega) < -\eta$$

ogni qualvolta si abbia

$$\begin{aligned} |x - x_0| &\leq 2\delta, & |y - y_0| &\leq 2\delta, \\ |\omega - \theta_0| &\leq 2\delta. \end{aligned}$$

Si indichi ancora con α un angolo positivo $< \delta$ e $< \frac{\pi}{4}$.

Ciò premesso, si consideri un arco γ della curva C_0 che abbia come primo estremo il punto (x_0, y_0) , lunghezza uguale o minore di δ e sia tale che l'angolo θ relativo alla sua tangente in un punto qualunque soddisfi sempre alla

$$|\theta - \theta_0| < \delta.$$

Indicheremo con P_0 e P_1 gli estremi di quest'arco e con la stessa lettera γ la sua lunghezza.

Inscriviamo in γ una poligonale Π , completamente interna al campo A , avente gli estremi in P_0 e P_1 ed i vertici susseguentisi su γ nello stesso ordine fissato dal verso dell'arco.

Siano $l_0, l_1, l_2, \dots, l_r$ i lati successivi di questa poligonale e consideriamone uno qualunque l_p . Se indichiamo con x_p, y_p le coordinate del primo estremo di l_p e con ω_p l'angolo che questo lato forma con la direzione positiva dell'asse delle x , la disuguaglianza

$$F_1(x, y, \cos \omega, \sin \omega) < -\eta$$

risulta verificata tosto che sia

$$\begin{aligned} |x - x_p| &\leq \delta, & |y - y_p| &\leq \delta, \\ |\omega - \omega_p| &\leq \delta. \end{aligned}$$

E poichè la lunghezza l_p è $\leq \gamma \leq \delta$, per quanto si è dimostrato al n° 29 possiamo

asserire che, comunque piccolo si fissi un intorno di l_p , è sempre possibile di costruire una poligonale Π_p , completamente interna al campo A , avente gli estremi comuni con l_p , appartenente ordinatamente a tale intorno e soddisfacente alla disuguaglianza

$$\int_{\Pi_p} F ds_{\Pi} - \int_{l_p} F ds_l < - \frac{\eta l_p (1 - \cos \alpha)}{2}.$$

Siccome l_p è uno qualunque dei lati della poligonale Π , abbiamo che, fissato ad arbitrio un intorno di Π , è sempre possibile costruire un'altra poligonale Γ , appartenente ordinatamente a tale intorno, completamente interna ad A e soddisfacente alla disuguaglianza

$$\int_{\Gamma} F ds_{\Gamma} - \int_{\Pi} F ds_{\Pi} < - \frac{\eta \Pi (1 - \cos \alpha)}{2},$$

dove abbiamo indicato con Π anche la lunghezza della poligonale Π .

Ora, potendosi determinare la poligonale Π in modo che essa appartenga ordinatamente ad un intorno comunque piccolo di γ , e poichè al tendere a zero di questo intorno la lunghezza Π tende a quella γ , l'integrale della F esteso a Π tende a quello della stessa funzione esteso a γ ³⁰⁾ e possiamo concludere che, fissato ad arbitrio un intorno di γ , è sempre possibile determinare una poligonale Γ appartenente ordinatamente a tale intorno, completamente interna ad A e tale da rendere soddisfatta la disuguaglianza

$$\int_{\Gamma} F ds_{\Gamma} - \int_{\gamma} F ds < - \frac{\eta \gamma (1 - \cos \alpha)}{4}.$$

Ciò prova che sulla curva C_0 , ammessa l'ipotesi dell'esistenza del punto (x_0, y_0) , indicato in principio, non può sussistere la semicontinuità inferiore dell'integrale I_C .

OSSERVAZIONE. — La condizione ora dimostrata necessaria per la semicontinuità inferiore dell'integrale I_C sulla curva C_0 , è necessaria anche se questa curva, pur sempre appartenendo al campo A , non è completamente interna ad esso, purchè nessun arco della C_0 sia tutto costituito di punti della *frontiera* di A , od anche purchè: 1°), fissato ad arbitrio un intorno (ρ) della C_0 , si possa sempre trovare una poligonale Π , ordinatamente appartenente a questo intorno, completamente interna ad A e tale che la sua lunghezza differisca da quella della curva C_0 per meno di ρ ; 2°) fissato un $\delta > 0$ qualsiasi ed un punto M pure qualsiasi di A , si possa sempre determinare un cerchio di centro M in modo che ogni suo punto appartenente ad A possa congiungersi con M mediante una curva continua, pure appartenente ad A , di lunghezza $< \delta$.

³⁰⁾ V. L. TONELLI, *Successioni di curve e derivazione per serie* (Rend. della R. Accademia dei Lincei, vol. XXV, 1° semestre 1916, pp. 22-30), n° 6.

Per i campi che comunemente si considerano nel Calcolo delle Variazioni, le condizioni 1°) e 2°) risultano soddisfatte per tutte le curve.

33. Se la curva C_0 non soddisfa alla condizione ammessa al n° precedente, vale a dire, non ha in ogni punto tangente variabile in modo continuo, la condizione che sia sempre verificata la

$$F_1(x_0, y_0, \cos \theta_0, \sin \theta_0) \geq 0,$$

là dove la tangente esiste, non è più necessaria. Ciò risulta senz'altro da quanto si è detto al n° 28 (Osservazione III). Per il caso qui contemplato possiamo però dimostrare la seguente proposizione:

Condizione necessaria affinché, su una data curva C_0 , completamente interna al campo A , l'integrale I_C sia funzione semicontinua inferiormente, è che abbia misura nulla l'insieme dei punti (x_0, y_0) di C_0 nei quali non è verificata la disuguaglianza

$$F_1(x_0, y_0, \cos \theta_0, \sin \theta_0) \geq 0,$$

dove θ_0 indica l'angolo che la direzione positiva della tangente alla curva stessa, là dove questa tangente esiste, forma con la direzione positiva dell'asse x .

Supponiamo che la misura (contata sulla curva) dei punti di C_0 nei quali la tangente alla curva esiste ed è $F_1(x_0, y_0, \cos \theta_0, \sin \theta_0) < 0$ non sia nulla. Indicatela con 2μ , possiamo trovare un $\eta > 0$ e un gruppo chiuso E di questi punti, che abbia misura maggiore di μ e in ogni punto del quale sia $F_1(x_0, y_0, \cos \theta_0, \sin \theta_0) < -\frac{3}{2}\eta$.

Per la continuità della funzione F_1 , possiamo determinare un numero positivo, δ in modo che, se (xy) è un punto di A , risulti sempre soddisfatta la disuguaglianza

$$F_1(x, y, \cos \omega, \sin \omega) < -\eta$$

ogni qualvolta sia

$$|x - \bar{x}_0| \leq 3\delta, \quad |y - \bar{y}_0| \leq 3\delta$$

$$|\omega - \bar{\theta}_0| \leq 2\delta,$$

e ciò per tutti i punti $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ di E . Si indichi poi anche qui con α un angolo positivo minore di δ e di $\frac{\pi}{4}$.

Dividiamo la curva C_0 in n archi tutti della stessa lunghezza $\frac{L_0}{n}$, dove L_0 indica la lunghezza della C_0 , e congiungiamo gli estremi di ogni arco con un segmento rettilineo. Avremo così una poligonale Π_n inscritta in C_0 ; e intenderemo che n sia sufficientemente grande perchè questa poligonale risulti completamente interna al campo A . Detta L_n la lunghezza della Π_n , risulta che, per $n \rightarrow \infty$, la Π_n tende uniformemente alla C_0 e L_n tende a L_0 . Indicata poi con s la lunghezza dell'arco della C_0 , a partire dal suo primo estremo P_0 , e con s_n quella dell'arco della Π_n , pure a partire da P_0 , e

fatto corrispondere ad ogni punto P di C_0 , individuato dal valore s del parametro, il punto P_n di Π_n individuato dal valore del parametro $s_n = \frac{L_n}{L_0} s$, abbiamo che, preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, possiamo determinare ³¹⁾ un indice $\bar{n}$ tale che, per ogni $n > \bar{n}$:

1°) la distanza fra due punti corrispondenti qualsiasi P e P_n sia sempre minore di δ ;

2°) si abbia

$$\left| \int_{\Pi_n} F ds_n - \int_{C_0} F ds \right| < \varepsilon;$$

3°) l'insieme E_n dei punti $\bar{P}_n$ di Π_n corrispondenti ai punti $\bar{P}$ di E ed in cui è $|\bar{\theta}_n - \bar{\theta}_0| < \delta$ — dove $\bar{\theta}_n$ è l'angolo che dà la direzione del lato di Π_n a cui $\bar{P}_n$ appartiene — risulti di misura (contata sulla Π_n) maggiore di μ .

Sia $n > \bar{n}$ e E'_n un insieme chiuso qualsiasi contenuto in E_n e di misura maggiore di μ . Se $\bar{P}'_n$ è un punto qualunque di E'_n , possiamo determinare il massimo intervallo che lo contiene, che ha gli estremi distanti da questo punto non più di $\frac{\delta}{2}$ e che

appartiene completamente al lato di Π_n di cui fa parte il punto $\bar{P}'_n$ stesso. Fra gli intervalli così determinati, possiamo sceglierne un numero finito che ricoprano tutto l'insieme E'_n ; e ordinati a piacere possiamo sopprimere in ciascuno di essi quelle parti che eventualmente appartenessero agli intervalli del gruppo stesso di indice minore. Otteniamo così dei segmenti non sovrappoventesi $l_n^{(1)}, l_n^{(2)}, \dots, l_n^{(m_n)}$, appartenenti a Π_n , ognuno di ampiezza $\leq \delta$ e tali che, se $P_n^{(r)}(x_n^{(r)}, y_n^{(r)})$ indica il primo estremo di $l_n^{(r)}$, risulta

$$F_1(x, y, \cos \omega, \sin \omega) < -\eta$$

tutte le volte che è

$$\begin{aligned} |x - x_n^{(r)}| &\leq \delta, & |y - y_n^{(r)}| &\leq \delta, \\ |\omega - \theta_n^{(r)}| &\leq \delta, \end{aligned}$$

dove $\theta_n^{(r)}$ è l'angolo che dà la direzione di $l_n^{(r)}$.

Per quanto si è dimostrato al n° 29, possiamo allora affermare che, comunque piccolo si fissi un intorno dei segmenti $l_n^{(r)}$, è sempre possibile costruire per ciascuno di essi una poligonale $p_n^{(r)}$, avente gli estremi comuni con $l_n^{(r)}$, appartenente ordinatamente all'intorno fissato e soddisfacente alla disuguaglianza

$$\int_{p_n^{(r)}} F d\sigma' - \int_{l_n^{(r)}} F d\sigma < -\frac{\eta l_n^{(r)} (1 - \cos \alpha)}{2},$$

dove con $d\sigma$ e $d\sigma'$ si indicano gli elementi d'arco di $l_n^{(r)}$ e $p_n^{(r)}$, rispettivamente.

³¹⁾ Cfr. loc. cit. ³⁰⁾.

Considerando perciò la poligonale $\bar{\Pi}_n$ che coincide con Π_n fuori dei segmenti $l_n^{(r)}$ e che viene completata dalle poligonali $p_n^{(r)}$, abbiamo, indicando con $d\bar{s}_n$ il suo elemento d'arco

$$\int_{\bar{\Pi}_n} F d\bar{s}_n - \int_{\Pi_n} F ds_n < - \frac{\eta \mu (1 - \cos \alpha)}{2},$$

perchè la somma delle lunghezze dei segmenti $l_n^{(r)}$, che ricoprono interamente l'insieme E'_n , è certamente non inferiore alla misura di tale insieme. Scelto dunque il numero ε , introdotto più sopra, minore di $\frac{\eta \mu (1 - \cos \alpha)}{4}$, abbiamo, per la condizione 2^a,

$$\int_{\Pi_n} F d\bar{s}_n - \int_{C_0} F ds < - \frac{\eta \mu (1 - \cos \alpha)}{4}.$$

Siccome $\bar{\Pi}_n$ può esser scelto in modo da appartenere ad un intorno di Π_n prefissato ad arbitrio e Π_n , a sua volta, per n sufficientemente grande, appartiene ad un intorno qualsiasi di C_0 , abbiamo che, comunque si fissi un intorno di C_0 , possiamo sempre costruire una poligonale $\bar{\Pi}_n$ che appartenga ordinatamente ad esso e renda soddisfatta l'ultima disuguaglianza scritta. Ciò dimostra la nostra proposizione.

OSSERVAZIONE. — Vale qui quanto si è detto nell'osservazione posta in fine al n° precedente purchè, se non sono soddisfatte le condizioni 1°) e 2°) ivi indicate, la curva C_0 abbia al più sulla frontiera del campo un insieme di punti di misura (contata sulla curva stessa) nulla.

34. Alla condizione espressa dal teorema del n° precedente vogliamo aggiungere un'altra.

Consideriamo un punto $P_0(x_0, y_0)$ interno al campo A e supponiamo che esistano due angoli θ_0 e $\bar{\theta}$ tali da rendere soddisfatta la disuguaglianza

$$E(x_0, y_0; \cos \theta_0, \sin \theta_0; \cos \bar{\theta}, \sin \bar{\theta}) < 0$$

dove E è la funzione, già definita al n° 27,

$$E(x_0, y_0; \cos \theta_0, \sin \theta_0; \cos \bar{\theta}, \sin \bar{\theta}) \equiv F(x_0, y_0, \cos \bar{\theta}, \sin \bar{\theta}) - \{ \cos \bar{\theta} F_x(x_0, y_0, \cos \bar{\theta}, \sin \bar{\theta}) + \sin \bar{\theta} F_y(x_0, y_0, \cos \bar{\theta}, \sin \bar{\theta}) \}.$$

Per la continuità di questa funzione rispetto alle variabili da cui dipende, preso un numero positivo η , soddisfacente alla disuguaglianza

$$E(x_0, y_0; \cos \theta_0, \sin \theta_0; \cos \bar{\theta}, \sin \bar{\theta}) < -\eta,$$

è possibile determinarne un altro δ , pure positivo, tale che tutti i punti (x, y) che soddisfano alle condizioni

$$|x - x_0| \leq \delta, \quad |y - y_0| \leq \delta,$$

risultino *interni* al campo A e verifichino la disuguaglianza

$$(27) \quad E(x, y; \cos \theta_0, \sin \theta_0; \cos \bar{\theta}, \sin \bar{\theta}) < -\eta.$$

Premesso ciò, conduciamo per P_0 un segmento rettilineo $P_0 P_1$, di lunghezza $l < \frac{\delta}{2}$, che faccia con la direzione positiva dell'asse delle x l'angolo θ_0 , e dividiamolo in n parti uguali mediante i punti

$$P_{n,0} \equiv P_0, \quad P_{n,1}, \quad P_{n,2}, \dots, P_{n,n} \equiv P_1.$$

Per ciascun punto $P_{n,r}$ ($r = 0, 1, \dots, n-1$) conduciamo un segmento $P_{n,r} Q_{n,r}$ facente l'angolo $\bar{\theta}$ con la direzione positiva dell'asse delle x e di lunghezza l'_n minore di $\frac{l}{2n}$ ed anche di $\frac{\eta l}{12nM}$, dove con M abbiamo indicato il massimo modulo di $F_1(x, y, \cos \theta, \sin \theta)$ sul segmento $P_0 P_1$, per tutti i possibili valori di θ . Conduciamo poi gli n segmenti $Q_{n,r} P_{n,r+1}$ e indichiamo con C_n la spezzata ($P_{n,0} Q_{n,0} P_{n,1} Q_{n,1} \dots P_{n,n}$) così risultante, spezzata che risulta completamente interna al campo A .

Facciamo corrispondere ad ogni punto N_{nr} del segmento $P_{n,r} Q_{n,r}$ il punto N'_{nr} di $P_{n,r} P_{n,r+1}$, tale che la lunghezza di $P_{n,r} N'_{nr}$ sia uguale a quella di $P_{n,r} N_{nr}$. Detto Q'_{nr} il punto corrispondente di $Q_{n,r}$, facciamo corrispondere ad ogni punto N_{nr} di $Q_{n,r} P_{n,r+1}$ il punto N'_{nr} di $Q'_{nr} P_{n,r+1}$ tale che il rapporto della lunghezza di $Q_{n,r} N_{nr}$ e $Q'_{nr} N'_{nr}$ sia uguale a quello della lunghezza di $Q_{n,r} P_{n,r+1}$ e $Q'_{nr} P_{n,r+1}$. Questo rapporto, che indi-

cheremo con R , risulta compreso fra 1 e $\frac{\frac{1}{n}l + l'_n}{\frac{1}{n}l - l'_n}$ ossia fra 1 e 3.

Scegliamo la lunghezza s del segmento $P_0 N'_{nr}$ come parametro di una rappresentazione analitica simultanea del segmento $P_0 P_1$ e della spezzata C_n , la quale conservi la corrispondenza ora indicata. Avremo, per $P_0 P_1$, le equazioni

$$\begin{aligned} x &= x(s), & y &= y(s), & (0 \leq s \leq l) \\ \text{e per } C_n, & & & & \\ x &= x_n(s), & y &= y_n(s), & (0 \leq s \leq l); \end{aligned}$$

ed avremo anche, indicando con s_n la lunghezza dell'arco di C_n corrispondente all'intervallo $(0, s)$

$$(28) \quad \begin{cases} x'(s) = \cos \theta_0, & y'(s) = \sin \theta_0, \\ x'_n(s) = \frac{dx_n}{ds_n} \cdot \frac{ds_n}{ds} = \cos \bar{\theta}, & y'_n(s) = \sin \bar{\theta}, \end{cases}$$

se il punto di C_n corrispondente a s appartiene ad un segmento $P_{n,r} Q_{n,r}$ e, in caso contrario,

$$(28') \quad x'_n(s) = R \cos \bar{\theta}', \quad y'_n(s) = R \sin \bar{\theta}',$$

dove con θ' indichiamo l'angolo che $Q_{nr}P_{n,r+1}$ forma con la direzione positiva dell'asse delle x . Osserviamo, prima di proseguire, che, per la costruzione fatta, risulta

$$|\bar{\theta}' - \theta_0| < \frac{\pi}{2}.$$

Consideriamo ora la differenza

$$\Delta I = \int_{C_n} F ds_n - \int_{P_0 P_1} F ds = \int_0^1 \{F(x_n, y_n, x'_n, y'_n) - F(x, y, x', y')\} ds.$$

Essa può scriversi

$$\Delta I = \int_0^1 \{F(x_n y_n x'_n y'_n) - F(x y x'_n y'_n)\} ds + \int_0^1 \{F(x y x'_n y'_n) - F(x y x' y')\} ds,$$

ed anche, ricordando l'omogeneità della $F(x y x' y')$ rispetto a x', y' e la definizione della funzione E ,

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta I &= \int_0^1 \{F(x_n y_n x'_n y'_n) - F(x y x'_n y'_n)\} ds \\ &+ \int_0^1 \{(x'_n - x') F_{x'}(x y x' y') + (y'_n - y') F_{y'}(x y x' y')\} ds \\ &+ \int_0^1 E(x y; x', y'; x'_n, y'_n) ds. \end{aligned} \right.$$

Indicando con $s_{n,r}$ la lunghezza del segmento $P_0 P_{nr}$, e con $s'_{n,r}$ quella di $P_0 Q'_{nr}$, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \int_0^1 E(x, y; x', y'; x'_n, y'_n) ds &= \sum_{r=0}^{n-1} \int_{s_{n,r}}^{s'_{n,r}} E(x, y; x', y'; x'_n, y'_n) ds \\ &+ \sum_{r=0}^{n-1} \int_{s'_{n,r}}^{s_{n,r+1}} E(x, y; x', y'; x'_n, y'_n) ds, \end{aligned}$$

e rammentando le (28) e (28'),

$$\begin{aligned} &= \sum_{r=0}^{n-1} \int_{s_{n,r}}^{s'_{n,r}} E(x, y; \cos \theta_0, \sin \theta_0; \cos \bar{\theta}, \sin \bar{\theta}) ds \\ &+ R \sum_{r=0}^{n-1} \int_{s'_{n,r}}^{s_{n,r+1}} E(x, y; \cos \theta_0, \sin \theta_0; \cos \bar{\theta}', \sin \bar{\theta}') ds, \end{aligned}$$

ed anche per la (27) e per essere $R < 3$,

$$\begin{aligned} &\int_0^1 E(x, y; x', y'; x'_n, y'_n) ds < -\eta n l'_n \\ &+ 3 \sum_{r=0}^{n-1} \int_{s'_{n,r}}^{s_{n,r+1}} E(x, y; \cos \theta_0, \sin \theta_0; \cos \bar{\theta}', \sin \bar{\theta}') ds. \end{aligned}$$

Inoltre, dalla formula stabilita al n° 9, si ricava

$$\begin{aligned} & E(x, y, \cos \theta_0, \sin \theta_0; \cos \bar{\theta}', \sin \bar{\theta}') \\ &= F(x, y, \cos \bar{\theta}', \sin \bar{\theta}') - \{ \cos \bar{\theta}' F_{x'}(x, y, \cos \theta_0, \sin \theta_0) + \sin \bar{\theta}' F_{y'}(x, y, \cos \theta_0, \sin \theta_0) \\ &= \int_{\theta_0}^{\bar{\theta}'} F_1(x, y, \cos \alpha, \sin \alpha) \sin(\bar{\theta}' - \alpha) d\alpha \end{aligned}$$

e per essere $|F_1(x, y, \cos \alpha, \sin \alpha)| \leq M$,

$$E(x, y; \cos \theta_0, \sin \theta_0; \cos \bar{\theta}', \sin \bar{\theta}') \leq M(1 - \cos(\bar{\theta}' - \theta_0)).$$

Ma dal triangolo $P_{nr} Q_{nr} P_{n,r+1}$ si trae, per la relazione dei seni,

$$\frac{l'_n}{\sin |\bar{\theta}' - \theta_0|} = \frac{l''_n}{\sin |\bar{\theta} - \theta_0|},$$

dove si è indicato con l''_n la lunghezza del lato $Q_{nr} P_{n,r+1}$, e perciò

$$\sin^2(\bar{\theta}' - \theta_0) < \left(\frac{l'_n}{\frac{l}{n} - l'_n} \right)^2,$$

essendo $l''_n > \frac{1}{n}l - l'_n$. Si ha dunque, per essere, come già abbiamo osservato,

$$|\bar{\theta}' - \theta_0| < \frac{\pi}{2} \text{ e quindi}$$

$$\frac{1 - \cos(\bar{\theta}' - \theta_0)}{\sin^2(\bar{\theta}' - \theta_0)} < 1 \quad 3a),$$

$$1 - \cos(\bar{\theta}' - \theta_0) < \left(\frac{l'_n}{\frac{l}{n} - l'_n} \right)^2.$$

e

$$E(x, y; \cos \theta_0, \sin \theta_0; \cos \bar{\theta}', \sin \bar{\theta}') < M \left(\frac{l'_n}{\frac{l}{n} - l'_n} \right)^2,$$

$$\int_0^l E(x, y; x', y'; x'_n, y'_n) ds < -n n l'_n + 3n \left(\frac{l}{n} - l'_n \right) M \left(\frac{l'_n}{\frac{l}{n} - l'_n} \right)^2.$$

3a) Posto, infatti,

$$y = \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x},$$

è $y' > 0$ per $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$, e $y = 1$ per $x = \frac{\pi}{2}$.

Essendo poi $l'_n < \frac{l}{2n}$, il secondo membro di questa disuguaglianza è minore di

$$nl'_n \left(-\eta + \frac{6Mnl'_n}{l} \right),$$

ed essendo anche $l'_n < \frac{\eta l}{12nM}$, questa espressione è minore di

$$nl'_n \left(-\eta + \frac{\eta}{2} \right) < -\frac{\eta l \lambda}{2},$$

dove abbiamo indicato con λ il valore del rapporto $\frac{l'_n}{\frac{1}{n}l}$.

È dunque

$$\int_0^l E(x, y; x', y'; x'_n, y'_n) ds < -\frac{\eta l \lambda}{2}.$$

Circa gli altri integrali che figurano nel secondo membro di (29), possiamo affermare che, per $n \rightarrow \infty$, tendendo x_n e y_n uniformemente, su tutto l'intervallo $(0, l)$, a $x(s)$ e $y(s)$, rispettivamente, ed essendo sempre $1 \leq x_n'^2 + y_n'^2 < 3$, per la continuità della funzione F l'integrale

$$\int_0^l \{F(x_n, y_n, x'_n, y'_n) - F(x, y, x'_n, y'_n)\} ds$$

tende a zero e che a zero tende anche

$$\int_0^l \{(x'_n - x')F_{x'}(x, y, x', y') + (y'_n - y')F_{y'}(x, y, x', y')\} ds,$$

in forza del lemma del n° 8.

Resta così provato che, per ogni n maggiore di un certo $\bar{n}$, è

$$\Delta I < -\frac{\eta l \lambda}{4};$$

e siccome, preso comunque un numero $\rho > 0$, si può sempre trovare un n per il quale la spezzata C_n appartenga ordinatamente all'intorno (ρ) del segmento $P_0 P_1$, resta anche provato che su questo segmento l'integrale della F non può esser funzione semicontinua inferiormente, se è verificata l'ipotesi formulata al principio di questo n°.

35. Dal risultato ottenuto al n° precedente, ragionando in modo perfettamente analogo a quanto si è fatto ai n° 32 e 33, deduciamo le due proposizioni che seguono:

a) *Condizioni necessaria affinché su una data curva C_0 , completamente interna al campo A e dotata ovunque di tangente variabile in modo continuo, l'integrale I_C sia funzione semicontinua inferiormente, è che in ogni punto (x_0, y_0) della curva si abbia, per*

tutti i possibili valori di θ ,

$$E(x_0, y_0; \cos \theta_0, \sin \theta_0; \cos \theta, \sin \theta) \geq 0,$$

dove θ_0 indica l'angolo che la direzione positiva della tangente alla curva stessa forma con la direzione positiva dell'asse delle x .

b) Condizione necessaria affinché, su una data curva C_0 , completamente intorna al campo A , l'integrale I_C sia funzione semicontinua inferiormente, è che abbia misura nulla l'insieme dei punti (x_0, y_0) di C_0 nei quali non è verificata, per tutti i possibili valori di θ , la disuguaglianza

$$E(x_0, y_0; \cos \theta_0, \sin \theta_0; \cos \theta, \sin \theta) \geq 0,$$

dove θ_0 indica l'angolo che la direzione positiva della tangente alla curva stessa, là dove questa tangente esiste, forma con la direzione positiva dell'asse x .

OSSERVAZIONE. — Quanto si è detto nelle Osservazioni poste in fine ai n° 32 e 33 può ripetersi per le precedenti proposizioni a) e b).

CAPITOLO II.

GLI INTEGRALI PER LE CURVE IN FORMA NON PARAMETRICA.

§ 1.

Definizioni.

36. Considereremo sempre, nel seguito, curve C del piano (xy) definite da un'equazione

$$y = y(x),$$

dove la x assume tutti i valori di un intervallo (a, b) , non necessariamente lo stesso per tutte le curve, e la $y(x)$ è una funzione assolutamente continua in tutto l'intervallo indicato.

Rammentiamo che una funzione $y(x)$ dicesi assolutamente continua ³³⁾ in un in-

³³⁾ Cfr. G. VITALI, *Sulle funzioni integrali* [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, Vol. XL (1904-1905), pp. 1021-1034].

tervallo (a, b) se, preso un numero positivo σ qualunque, si può poi sempre determinarne un altro $\mu > 0$ tale che sia

$$\left| \sum_i \{y(\beta_i) - y(\alpha_i)\} \right| < \sigma,$$

dove la sommatoria è estesa ad un qualsiasi gruppo di intervalli (α_i, β_i) di (a, b) , non sovrapponentisi e aventi una somma totale minore di μ . Rammentiamo, inoltre, che se $y(x)$ è funzione assolutamente continua in (a, b) , in questo intervallo esiste quasi ovunque la derivata $y'(x)$ finita ed è

$$y(x_2) - y(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} y'(x) dx,$$

per due qualunque punti x_1 e x_2 di (a, b) . Reciprocamente, ogni funzione integrale è assolutamente continua.

37. Diremo che una curva

$$C: \quad y = y(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

appartiene all'intorno (ρ) della curva

$$C_0: \quad y = y_0(x) \quad (a_0 \leq x \leq b_0),$$

se, in ogni punto x comune ai due intervalli (a_0, b_0) , (a, b) , è

$$|y(x) - y_0(x)| < \rho,$$

e se, inoltre, i punti che appartengono all'uno o all'altro dei due intervalli, senza appartenere ad entrambi, costituiscono dei segmenti (due al massimo) di lunghezza minore di ρ , e ciascuno degli archi delle curve C_0 e C che corrispondono a questi segmenti è interno al cerchio, di raggio ρ , avente il centro nell'estremo corrispondente di C_0 .

38. Sia A un campo (insieme di punti), del piano (xy) tale che:

1°) i suoi punti appartenenti ad un qualsiasi cerchio dello stesso piano costituiscano sempre un insieme *chiuso*;

2°) considerata una qualunque curva C_0 (n° 36) costituita tutta di punti di A , si possa sempre trovare un numero positivo ρ in guisa che, se C è un'altra qualsiasi curva (n° 36), anch'essa costituita tutta di punti di A e appartenente all'intorno (ρ) della C , facciano parte del campo A tutti i punti del piano (xy) le cui coordinate soddisfino alle disuguaglianze

$$a_0 \leq x \leq b_0,$$

$$a \leq x \leq b,$$

$$y_0(x) \leq y \leq y(x),$$

intendendo che nell'ultima figuri il segno di minore o di maggiore secondo che è $y_0(x)$ minore o maggiore di $y(x)$.

39. Sia $f(x, y, y')$ una funzione, definita per ogni punto (xy) del campo A e per ogni valore finito di y' , e soddisfacente alle seguenti condizioni:

1°) sia continua in ogni punto (x, y, y') in cui è definita;

2°) ammetta, in tutti gli stessi punti, le derivate parziali $f_{y'}$, $f_{y'y'}$, $f_{y'x}$, e queste derivate risultino continue.

40. Considerata una curva C (n° 36) del campo A per la quale esista l'integrale (nel senso del LEBESGUE)

$$\int_a^b f(x, y(x), y'(x)) dx,$$

si indicherà brevemente quest'integrale con la scrittura

$$\int_C f dx$$

ed anche con I_C .

L'integrale I_C risulta evidentemente una funzione della curva C , definita per ogni curva del n° 36, appartenente al campo A , per la quale l'integrale stesso esista.

Nel seguito considereremo soltanto curve che soddisfino alle condizioni ora indicate.

Per semplicità di ragionamento, supporremo poi sempre che gli intervalli su cui sono definite le funzioni $y(x)$, relative alle nostre curve, siano tutte fra loro coincidenti.

I risultati che otterremo al § 5 valgono peraltro indipendentemente da questa ipotesi e cioè per tutte le curve C sopra definite; altrettanto può dirsi per quelli dei §§ 2, 3, 4, purchè però gli estremi delle curve considerate siano *interni* al campo A . È facile vedere che, per poter togliere la restrizione relativa agli estremi, basta:

a) che la funzione $f(x, y, y')$ possa definirsi anche fuori del proprio campo, in un campo A' che contenga come punti *interni* quelli di A , e in modo da ammettere, anche nei nuovi punti, compresa la frontiera di A , le proprietà enunciate al n° 39;

b) oppure, che la parte della frontiera di A contenuta in ogni porzione limitata di piano sia costituita di un numero finito di curve continue, senza punti multipli, aventi due a due al più un numero finito di punti comuni, ciascuna delle quali risulti composta di un numero finito di archi a tangente variabile in modo continuo;

c) oppure, che la f resti sempre maggiore o sempre minore di un numero fisso;

d) oppure, che in nessun punto della frontiera di A sia $f_{y'y'}(x, y, y') = 0$ per tutti i valori di y' .

41. Diremo che I_C è una *funzione semicontinua inferiormente (superiormente)* sulla curva C_0 se, preso un numero positivo ϵ , ad arbitrio, è sempre possibile di determinarne un altro, pure positivo, ρ tale che la disuguaglianza

$$I_C > I_{C_0} - \epsilon, \quad (< I_{C_0} + \epsilon)$$

sia verificata da tutte le curve che appartengono all'intorno (ρ) di C_0 . Qualora sia invece sempre verificata la disuguaglianza

$$|I_C - I_{C_0}| < \varepsilon,$$

la I_C sarà detta *funzione continua* sulla curva C_0 .

42. Diremo, infine, che l'integrale I_C è *regolare* se, in ogni punto del campo A e per ogni y' finito, la derivata $f_{y'y'}$ conserva sempre uno stesso segno, senza mai annullarsi; quando invece, pur conservando sempre lo stesso segno, la $f_{y'y'}$ può annullarsi, l'integrale I_C lo diremo *quasi-regolare*.

§ 2.

Condizioni sufficienti per la semicontinuità.

a) Il caso lineare.

43. Considereremo qui il caso più semplice, quello cioè in cui la funzione $f(x, y, y')$ è lineare rispetto alla y' . Supporremo dunque

$$f(x, y, y') \equiv P(x, y) + Q(x, y)y'.$$

Per le ipotesi fatte al n° 39, le funzioni $P(x, y)$, $Q(x, y)$ saranno funzioni continue in tutto il campo A , nel quale esisterà pure e sarà continua la derivata parziale $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Nel caso attuale abbiamo evidentemente, $f_{y'y'} \equiv 0$ per tutte le terne (x, y, y') ammesse: abbiamo anche che l'esistenza dell'integrale I_C è conseguenza immediata dell'assoluta continuità delle funzioni $y(x)$.

Siano C_0 e C due curve di A (n° 40), rappresentate rispettivamente dalle equazioni

$$y = y_0(x),$$

$$y = y(x),$$

sull'intervallo comune (a, b) , e esaminiamo la differenza $I_C - I_{C_0}$. Essa può scriversi

$$\int_a^b \{P(x, y(x)) - P(x, y_0(x))\} dx + \int_C Qy' dx - \int_{C_0} Qy' dx.$$

Il primo integrale, per la continuità della funzione $P(x, y)$, può rendersi piccolo a piacere col prendere convenientemente piccolo l'intorno di C_0 cui appartiene la C ; vale a dire, preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, possiamo determinare un $\rho_1 > 0$ tale che, per ogni curva C appartenente all'intorno (ρ_1) della C_0 , si abbia

$$(30) \quad \left| \int_a^b \{P(x, y(x)) - P(x, y_0(x))\} dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Studiamo ora la differenza

$$\int_C Q y' dx - \int_{C_0} Q y' dx,$$

che possiamo scrivere

$$\int_C Q dy - \int_{C_0} Q dy.$$

Indichiamo con γ la curva composta del segmento rettilineo avente per estremi, punti $(a, y_0(a))$, $(a, y(a))$, della curva C , del segmento rettilineo avente per estremi i punti $(b, y(b))$, $(b, y_0(b))$, e della curva C_0 percorsa in senso negativo, cioè secondo le x decrescenti. Abbiamo

$$\begin{aligned} \int_C Q dy - \int_{C_0} Q dy &= \int_{\gamma} Q dy - \int_{y_0(a)}^{y(a)} Q(a, y) dy - \int_{y(b)}^{y_0(b)} Q(b, y) dy \\ &= \int_{\gamma} Q dy - \{y(a) - y_0(a)\} Q(a, \bar{y}) - \{y_0(b) - y(b)\} Q(b, \bar{\bar{y}}), \end{aligned}$$

dove $\bar{y}$ e $\bar{\bar{y}}$ indicano due valori di y compresi fra $y_0(a)$ e $y(a)$ e fra $y(b)$ e $y_0(b)$, rispettivamente. Se con M rappresentiamo il massimo modulo di Q in un campo limitato che contenga la curva C_0 e tutte quelle che appartengono all'intorno (ρ_1) di essa, abbiamo

$$\int_C Q dy - \int_{C_0} Q dy = \int_{\gamma} Q dy - 2\rho_1 M\theta,$$

con $-1 \leq \theta \leq 1$.

Per la formula di GREEN, se Γ indica il campo racchiuso dalla curva γ ³⁴), è

$$\left| \int_{\gamma} Q dy \right| \leq \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial Q}{\partial x} \right| d\Gamma;$$

e siccome l'area di Γ è minore di $\rho_1(b-a)$, detto M_1 il massimo modulo di $\frac{\partial Q}{\partial x}$ nel campo limitato sopra indicato, è anche

$$\left| \int_{\gamma} Q dy \right| < M_1 \rho_1 (b-a)$$

e perciò

$$\left| \int_C Q dy - \int_{C_0} Q dy \right| < \rho_1 (M_1 (b-a) + 2M).$$

³⁴) Un punto $(\bar{x}, \bar{y})$ del piano (x, y) appartiene a Γ se è solamente se è $a \leq \bar{x} \leq b$ e $\bar{y}$ è compreso fra $y_0(\bar{x})$ e $y(\bar{x})$, estremi inclusi.

Da questa disuguaglianza e dalla (30) deduciamo

$$|I_C - I_{C_0}| < \varepsilon,$$

per ogni curva C appartenente all'intorno (ρ) della C_0 , dove ρ è $< \rho_1$ ed anche minore di $\frac{\varepsilon}{2\{M_1(b-a) + 2M\}}$. Ciò dimostra il seguente teorema:

L'integrale

$$\int_C \{P(x, y) + Q(x, y)y'\} dx,$$

dove P e Q sono funzioni continue nel campo A insieme con la derivata $\frac{\partial Q}{\partial x}$, è funzione continua della curva C (n° 40).

44. OSSERVAZIONE I. — Nel capitolo precedente, al n° 31 abbiamo veduto che se si considerano le curve in forma parametrica, se cioè non si impone la condizione che ogni curva sia incontrata in un sol punto al più da una qualsiasi parallela all'asse delle y , l'integrale

$$\int_C P dx + Q dy$$

non è sempre una funzione continua della curva d'integrazione, pur essendo soddisfatte tutte le possibili condizioni di continuità e derivabilità relative alle P e Q . La differenza fra i due casi sta in questo che, per la condizione, indicata or ora, a cui soddisfano le curve che si considerano in questo capitolo, l'area Γ tende a zero con ρ , il che invece non accade quando la condizione detta non si pone e si consente perciò alle curve di compiere infiniti giri intorno ad un punto e quindi all'area Γ di ricoprire infinite volte la stessa porzione di piano.

OSSERVAZIONE II. — È facile verificare che, per la validità del teorema del n° precedente, è sufficiente supporre che le P e Q siano funzione continue nel campo A e che, inoltre, la Q , come funzione della x , risulti assolutamente continua ed abbia la derivata parziale $\frac{\partial Q}{\partial x}$ (che per l'assoluta continuità della Q esiste quasi dappertutto) superficialmente integrabile.

45. È interessante rilevare che la continuità dell'integrale dell'espressione $P + Qy'$ può mancare pur essendo le funzioni P e Q continue. Consideriamo infatti il seguente esempio.

Fissiamo, sul segmento $(0, 1)$ dell'asse della x , l'intervallo $\left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}\right)$ ($n = 1, 2, \dots$) e dividiamolo in tre parti uguali mediante i punti

$$\alpha_{2n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n(2n-1)}, \quad \beta_{2n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n(2n-1)},$$

e poniamo

$$\begin{aligned} Q(x, y) &= Q(x) \\ Q\left(\frac{1}{2n}\right) &= Q\left(\frac{1}{2n-1}\right) = 0 \\ Q(\alpha_{2n}) &= Q(\beta_{2n}) = \frac{1}{\sqrt{2n}}, \end{aligned}$$

imponendo alla $Q(x)$ di avere in $\left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}\right)$ un sol massimo e nessun minimo (relativo). Sarà dunque sempre, in quest'intervallo, $Q(x) \geq 0$.

Dividiamo in tre parti uguali anche l'intervallo $\left(\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}\right)$ ($n=1, 2, \dots$), mediante i punti

$$\alpha_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{6n(2n+1)}, \quad \beta_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3n(2n+1)},$$

e poniamo

$$\begin{aligned} Q(xy) &= Q(x), \\ Q\left(\frac{1}{2n+1}\right) &= Q\left(\frac{1}{2n}\right) = 0, \\ Q(\alpha_{2n+1}) &= Q(\beta_{2n+1}) = -\frac{1}{\sqrt{2n+1}}, \end{aligned}$$

imponendo alla $Q(x)$ di avere in $\left(\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}\right)$ un sol minimo e nessun massimo (relativo), il che porta che, in questo intervallo, sia sempre $Q(x) \leq 0$.

Poniamo, infine, $Q(0) = 0$.

Definiamo ora una funzione $\varphi(x)$ nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \text{in } \left(\frac{1}{2n}, \alpha_{2n}\right) & \quad \text{sia } \varphi(x) = Q(\alpha_{2n}), \\ \text{» } \left(\beta_{2n}, \frac{1}{2n-1}\right) & \quad \text{» } \varphi(x) = 0, \\ \text{» } (\alpha_{2n}, \beta_{2n}) & \quad \text{la } \varphi(x) \text{ sia lineare;} \\ \text{» } \left(\frac{1}{2n+1}, \alpha_{2n+1}\right) & \quad \text{» } \varphi(x) = 0 \\ \text{» } \beta_{2n+1} & \quad \text{» } \varphi(\beta_{2n+1}) = -Q(\beta_{2n+1}) \\ \text{» } (\alpha_{2n+1}, \beta_{2n+1}) & \quad \text{la } \varphi(x) \text{ sia lineare} \\ \text{» } \left(\beta_{2n+1}, \frac{1}{2n}\right) & \quad \text{la } \varphi(x) \text{ sia lineare} \\ \text{» } 0 & \quad \text{» } \varphi(0) = 0. \end{aligned}$$

E ciò sia per ogni $n = 1, 2, \dots$

È evidentemente

$$\int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n-1}} Q(x) \varphi'(x) dx < -\frac{1}{2n},$$

$$\int_{\frac{1}{2n+1}}^{\frac{1}{2n}} Q(x) \varphi'(x) dx < -\frac{1}{2n+1},$$

e perciò

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_x^1 Q(x) \varphi'(x) dx \leq -\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} \right) = -\infty.$$

Ciò posto, definiamo la curva C_n , di equazione $y = y_n(x)$, ponendo

$$\begin{aligned} y_n(x) &= 0 && \text{in} && \left(0, \frac{1}{4n+1} \right), \\ y_n(x) &= \varphi(x) && \text{»} && \left(\frac{1}{4n+1}, \frac{1}{2n+1} \right), \\ y_n(x) &= 0 && \text{»} && \left(\frac{1}{2n+1}, 1 \right). \end{aligned}$$

È allora, in tutto $(0, 1)$,

$$(31) \quad 0 \leq y_n(x) < \frac{1}{\sqrt{2n}},$$

e

$$\begin{aligned} \int_0^1 Q(x) y_n'(x) dx &< -\left(\frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n-1} + \dots + \frac{1}{2(n+1)} \right) \\ &< -\frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Questa disuguaglianza, unita alla (31), mostra che sulla curva costituita dal segmento $(0, 1)$ dell'asse delle x , per la quale è

$$\int_0^1 Q(x) y'(x) dx = 0,$$

l'integrale dell'espressione $Q(x) y'(x)$ non è funzione continua e neppure semicontinua inferiormente.

Altrettanto accade per lo stesso integrale, in cui sia

$$\begin{aligned} Q(xy) &= \sqrt{x} \sin \frac{1}{x} && \text{per} && x > 0, \\ Q(xy) &= 0 && \text{per} && x = 0. \end{aligned}$$

46. Quando non siano soddisfatte le condizioni dell'enunciato del n° 43 o dell'Osservazione II del n° 44, può riuscire utile il seguente teorema:

« Se $P(xy)$ e $Q(xy)$ sono due funzioni continue in tutto il campo A , l'integrale

$$\int_C \{P(xy) + Q(xy)y'\} dx$$

è funzione continua della curva d'integrazione nella classe delle curve C (n° 40) per le quali si ha

$$\int_a^b |y'|^{1+\alpha} dx < M,$$

dove α e M sono due numeri fissi positivi o nulli.

Questa proposizione non è che un corollario di quella del n° 25.

§ 3.

Condizioni sufficienti per la semicontinuità:

b). Il caso quasi regolare.

47. Analogamente a quanto si è fatto nel capitolo precedente per le curve in forma parametrica, tratteremo anche qui soltanto il caso in cui sia

$$f_{y,y'}(x, y, y') \geq 0,$$

per tutte le terne di valori x, y, y' che devonsi considerare, potendosi l'altro, in cui sia invece verificata sempre la disuguaglianza $f_{y,y'} \leq 0$, dedurre da questo cambiando la funzione $f(x, y, y')$ in $-f(x, y, y')$.

48. Cominciamo con il dimostrare che:

L'integrale quasi regolare I_C , con $f_{y,y'} \geq 0$, è funzione semicontinua inferiormente su ogni curva C_0 , di equazione $y = y_0(x)$, per la quale la $y_0(x)$ abbia numeri derivati costantemente inferiori ad un numero fisso.

La dimostrazione che ora daremo sarà fondata sulla sostituzione della funzione $f(x, y, y')$ con un'altra funzione E la quale:

1°) differisca dalla f per una funzione il cui integrale vari con continuità al variare della curva d'integrazione;

2°) renda sempre positivo o nullo il suo integrale relativo ad una qualsiasi curva;

3°) renda minore di una quantità, arbitrariamente prefissabile, il suo integrale relativo alla curva C_0 .

Rammentiamo, innanzi tutto, che, se inscriviamo nella curva C_0 una poligonale i cui vertici abbiano ascisse crescenti, al tendere a zero del massimo lato di questa poligonale la funzione che definisce la poligonale stessa converge uniformemente alla $y_0(x)$,

e la sua derivata converge *in misura* alla $y'_0(x)$, vale a dire, la differenza tra la sua derivata e la $y'_0(x)$ resta, in modulo, inferiore ad un $\varepsilon > 0$ e comunque scelto, in un insieme di punti di (a, b) la cui misura tende a $b - a$ ³⁵).

Preso allora ad arbitrio un numero positivo ε , inscriviamo nella curva C_0 una poligonale i cui vertici abbiano ascisse crescenti ed i cui lati siano sufficientemente piccoli, in modo che, *smussati* gli angoli con curve, in ciascuna delle quali la tangente vari sempre nello stesso senso, si abbia una curva rappresentata da una equazione.

$$y = \pi_\varepsilon(x),$$

con $\pi_\varepsilon(x)$ funzione continua insieme con le sue derivate prima e seconda, soddisfacente, in tutto (a, b) , alla disuguaglianza

$$|y_0(x) - \pi_\varepsilon(x)| < \varepsilon,$$

e in tutto (a, b) ad eccezione al più di un insieme di punti $\mathfrak{E}_\varepsilon$ di misura $m(\mathfrak{E}_\varepsilon) < \varepsilon$, anche all'altra

$$(32) \quad |y'_0(x) - \pi'_\varepsilon(x)| < \varepsilon.$$

Indicando con R un numero positivo di cui resti sempre inferiore il modulo della derivata $y'_0(x)$, considerata là soltanto dove esiste, abbiamo anche, per la costruzione fatta,

$$|\pi'_\varepsilon(x)| \leq R,$$

e ciò in tutto (a, b) .

Poniamo, allora,

$$E(x, y; \pi'_\varepsilon, y') \equiv f(x, y, y') - f(x, y, \pi'_\varepsilon) - (y' - \pi'_\varepsilon)f_{y'}(x, y, \pi'_\varepsilon).$$

Essendo, per lo sviluppo del TAYLOR,

$$E(x, y; \pi'_\varepsilon, y') = \frac{1}{2}(y' - \pi'_\varepsilon)^2 f_{y'y'}(x, y, \pi'_\varepsilon + \theta(y' - \pi'_\varepsilon)),$$

con $0 < \theta < 1$, segue, dalla condizione posta nell'enunciato della nostra proposizione, che è sempre

$$(33) \quad E(x, y; \pi'_\varepsilon, y') \geq 0.$$

Detto M il massimo modulo di $f_{y'y'}(x, y_0(x), y')$ nel campo

$$a \leq x \leq b, \quad |y'| \leq R,$$

abbiamo, sul complementare dell'insieme $\mathfrak{E}_\varepsilon$ rispetto all'intervallo (a, b) , sul quale com-

³⁵) Cfr. L. TONELLI, *Successioni di curve e derivazioni per serie* Nota II (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XXV, 1° semestre 1916, pp. 85-91).

plementare è verificata la (32)

$$E(x, y_0(x); \pi'_\varepsilon(x), y'_0(x)) < 2\varepsilon M,$$

e quindi

$$(34) \quad \int_a^b E(x, y_0(x); \pi'_\varepsilon(x), y'_0(x)) dx < 2\varepsilon M(b-a) + 4RMm(E_\varepsilon) \\ < 2M((b-a) + 2R)\varepsilon.$$

Sia ora C un'altra qualsiasi curva (n° 40) avente per equazione

$$y = y(x).$$

È per la (33)

$$\int_a^b E(x, y(x); \pi'_\varepsilon(x), y'(x)) dx \geq 0$$

ed anche per la (34)

$$\int_a^b E(x, y(x); \pi'_\varepsilon(x), y'(x)) dx - \\ - \int_a^b E(x, y_0(x); \pi'_\varepsilon(x), y'_0(x)) dx > -2M(b-a+2R)\varepsilon.$$

Si ha dunque, dalla definizione stessa della funzione E ,

$$\int_a^b f(x, y, y') dx - \int_a^b f(x, y_0, y'_0) dx > -2M(b-a+2R)\varepsilon \\ + \int_a^b \{f(x, y, \pi'_\varepsilon) - \pi'_\varepsilon f_{y'}(x, y, \pi'_\varepsilon) + y' f_{y'}(x, y, \pi'_\varepsilon)\} dx - \\ - \int_a^b \{f(x, y_0, \pi'_\varepsilon) - \pi'_\varepsilon f_{y'}(x, y_0, \pi'_\varepsilon) + y'_0 f_{y'}(x, y_0, \pi'_\varepsilon)\} dx.$$

Osserviamo qui che l'integrale

$$\int_a^b \{[f(x, y, \pi'_\varepsilon(x)) - \pi'_\varepsilon f_{y'}(x, y, \pi'_\varepsilon(x))] + y' f_{y'}(x, y, \pi'_\varepsilon(x))\} dx,$$

essendo π'_ε e π''_ε funzioni continue, per costruzione, soddisfa alla condizione dell'enunciato del n° 43 ed è pertanto una funzione continua della curva d'integrazione.

Potremo dunque determinare un numero $\rho > 0$ in modo che, per ogni curva C , di equazione $y = y(x)$, appartenente all'intorno (ρ) della C_0 , la differenza degli integrali del secondo membro dell'ultima disuguaglianza scritta risulti, in valore assoluto, minore di ε .

E per tutte queste curve varrà la disuguaglianza

$$\int_a^b f(x, y, y') dx - \int_a^b f(x, y_0, y'_0) dx > -[2M(b-a+2R) + 1]\varepsilon,$$

il che dimostra precisamente la semicontinuità inferiore di I_C sulla curva C_0 .

49. Si tratta ora di liberare la proposizione dimostrata al n° precedente dalla condizione che la $y_0(x)$ abbia numeri derivati limitati. Per riuscire a ciò è necessario considerare dapprima una forma particolare della funzione $f(x, y, y')$.

Dimostriamo pertanto che:

Se in ogni parte limitata del campo A la derivata parziale $f_{y'}(x, y, y')$ resta limitata in modulo, e ciò per tutti i possibili valori di y' , se, inoltre, è sempre, in tutto A e per tutti gli y' , $f_{y'y'} \geq 0$ ³⁶⁾, l'integrale I_C è funzione semicontinua inferiormente della curva d'integrazione.

Considerata una curva C_0 (n° 40) di equazione $y = y_0(x)$, inscriviamo in essa una poligonale avente i vertici ad ascisse crescenti e provenienti dalla divisione in n parte uguali del segmento (a, b) . Sia $y = \pi_n(x)$ l'equazione di questa poligonale.

Dall'ipotesi fatta sulla derivata $f_{y'}$, scende che, se ρ è un numero positivo e consideriamo il campo A' costituito dai punti di A di ascissa x compresa fra a e b (estremi inclusi) e di ordinata compresa fra $y_0(x) - \rho$ e $y_0(x) + \rho$ (estremi inclusi), detto M il limite superiore dei moduli di $f_{y'}$ in A' e per tutti i possibili y' , abbiamo in A'

$$f(x, y, y') = f(x, y, 0) + y' f_{y'}(x, y, \bar{y}'),$$

$$|f(x, y, y')| \leq |f(x, y, 0)| + M |y'|.$$

Abbiamo dunque che, per tutti gli y' in modulo superiori al massimo di $|f(x, y, 0)|$ in A' , è, in questo campo,

$$|f(x, y, y')| < (M + 1) |y'|.$$

Rileviamo, inoltre, che la curva C_0 , per essere $y_0(x)$ funzione assolutamente continua, ha lunghezza finita; che la funzione $\pi_n(x)$, per $n \rightarrow \infty$, converge uniformemente, in tutto (a, b) , verso la $y_0(x)$, e che la lunghezza della poligonale corrispondente converge alla lunghezza della C_0 . Ci troviamo dunque nelle condizioni volute per l'applicazione dei risultati contenuti nei n° 1, 2, 3, 4 della Nota già citata [loc. cit. ³⁵⁾] e possiamo asserire che, preso un numero positivo ε , è possibile determinare un $\bar{n}$ tale che, per ogni $n > \bar{n}$:

1°) la poligonale $y = \pi_n(x)$ appartenga all'intorno (ρ) della C_0 ;

2°) l'insieme $\mathfrak{E}_n$ dei punti di (a, b) nei quali non è $|y'_0(x) - \pi'_n(x)| < \varepsilon$ renda soddisfatte le disuguaglianze

$$\int_{\mathfrak{E}_n} |\pi'_n(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \int_{\mathfrak{E}_n} |y'_0(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2};$$

³⁶⁾ Per questa seconda condizione, la prima è equivalente a quest'altra, che in ogni parte limitata del campo A sia $|f| < L |y'|$, per tutti gli y' in modulo superiori ad un numero fisso L_1 , i numeri L ed L_1 potendo variare con la parte del campo considerata.

3°) sia

$$\left| \int_a^b f(x, y_0, y'_0) dx - \int_a^b f(x, y_0, \pi'_n) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ciò fatto *smussiamo* i vertici della poligonale $y = \pi_n(x)$, in modo che ne risulti una curva di equazione $y = \bar{\pi}_n(x)$ la quale:

1°) ammetta per la $\bar{\pi}_n(x)$ le derivate prima e seconda continue;

2°) giaccia tutta nell'intorno (ρ) della C_0 ;

3°) renda soddisfatte le disuguaglianze

$$\int_{\bar{\mathfrak{E}}_n} |\bar{\pi}'_n(x)| dx < \varepsilon, \quad \int_{\bar{\mathfrak{E}}_n} |y'_0(x)| dx < \varepsilon,$$

dove $\bar{\mathfrak{E}}_n$ rappresenta l'insieme dei punti di (a, b) nei quali non è $|y'_0(x) - \bar{\pi}'_n(x)| < \varepsilon$;

4°) soddisfi alla disuguaglianza

$$(35) \quad \left| \int_a^b f(x, y_0, y'_0) dx - \int_a^b f(x, y_0, \bar{\pi}'_n) dx \right| < \varepsilon.$$

Conservando alla funzione $E(x, y; \bar{\pi}'_n, y')$ il significato del n° precedente, abbiamo ancora che è sempre

$$E(x, y; \bar{\pi}'_n, y') \geq 0,$$

per tutti gli (xy) di A e per tutti i possibili y' ; ed abbiamo anche, per quello che precede,

$$\left| \int_{\bar{\mathfrak{E}}_n} (y'_0 - \bar{\pi}'_n) f_{y'}(x, y_0, \bar{\pi}'_n) dx \right| \leq 2M\varepsilon.$$

E siccome, indicando con $C(\bar{\mathfrak{E}}_n)$ il complementare di $\bar{\mathfrak{E}}_n$ rispetto ad (a, b) , è

$$\left| \int_{C(\bar{\mathfrak{E}}_n)} (y'_0 - \bar{\pi}'_n) f_{y'}(x, y_0, \bar{\pi}'_n) dx \right| < \varepsilon M(b - a),$$

segue, sommando,

$$\left| \int_a^b (y'_0 - \bar{\pi}'_n) f_{y'}(x, y_0, \bar{\pi}'_n) dx \right| < M(2 + b - a)\varepsilon.$$

Da questa disuguaglianza e dalla (35) deduciamo

$$\int_a^b E(x, y_0; \pi'_n, y'_0) dx < \{1 + M(2 + b - a)\}\varepsilon.$$

Dopo ciò non vi è che da proseguire il ragionamento come al n° precedente per giungere a stabilire la proposizione enunciata.

50. Sfruttando la proposizione dimostrata or ora, possiamo pervenire al teorema generale:

L'integrale I_C quasi regolare — con $f_{y'y'} \geq 0$ — è funzione semicontinua inferiormente della curva d'integrazione.

Riprendiamo la funzione E già definita al n° 48 e consideriamo

$$E(x, y; 0, y') \equiv f(x, y, y') - \{f(x, y, 0) + y' f_{y'}(x, y, 0)\}.$$

Per quello che si è detto al n° citato, dalla condizione $f_{y'y'} \geq 0$ segue che è, per ogni punto (x, y) del campo A e per tutti i possibili y' ,

$$E(x, y; 0, y') \geq 0.$$

Se dunque poniamo

$$\bar{f}(x, y, y') \equiv E(x, y; 0, y'),$$

abbiamo:

1°) per tutte le terne x, y, y' dette, è $\bar{f} \geq 0$;

2°) in tutto A , è $\bar{f}(x, y, 0) = 0$;

3°) $\bar{f}$ è funzione continua di (x, y, y') in tutti i punti indicati più sopra ed ammette le derivate parziali continue $\bar{f}_{y'}$, $\bar{f}_{y'y'}$, $\bar{f}_{y'x}$, e ciò come la funzione f da cui deriva;

4°) in A è sempre $\bar{f}_{y'y'} = f_{y'y'} \geq 0$;

5°) per $y' < 0$ è, in A , sempre $\bar{f}_{y'} \leq 0$, e per $y' > 0$, sempre $\bar{f}_{y'} \geq 0$ [come risulta da 4°) e da $f_{y'}(x, y, 0) = 0$];

6°) è

$$\int_C \bar{f} dx = \int_C f dx - \int_C \{f(x, y, 0) + y' f_{y'}(x, y, 0)\} dx;$$

e siccome l'ultimo integrale, soddisfacendo alle condizioni della proposizione del n° 43, è funzione continua della curva C , se noi dimostreremo la semicontinuità inferiore di

$\int_C \bar{f} dx$ risulterà dimostrata anche quella di $\int_C f dx$.

Sia C_0 una curva (n° 40) del campo A . Scelto ad arbitrio un numero positivo ε , possiamo determinare, per l'assoluta continuità della funzione $y_0(x)$ e per la esistenza dell'integrale

$$\bar{I}_{C_0} = \int_{C_0} \bar{f} dx$$

(conseguenza della supposta esistenza di I_{C_0}), un numero positivo R tale che si abbia

$$(36) \quad \int_{\mathcal{E}} \bar{f}(x, y_0, y'_0) dx < \varepsilon,$$

dove $\mathcal{E}$ rappresenta l'insieme dei punti di (a, b) nei quali o manca la derivata y'_0 oppure questa derivata ha un valore assoluto $\geq R$.

Definiamo allora, per ogni punto (x, y) di A appartenente ad un intorno (ρ) della C_0 , comunque scelto, una funzione $g(x, y, y')$ la quale sia:

- a) uguale a $\bar{f}$, per ogni y' tale che $|y'| \leq R$;
 b) minore o uguale a $\bar{f}$ e ≥ 0 , per $|y'| > R$;
 c) lineare rispetto ad y' , per $|y'| \geq 2R$;
 d) finita e continua, insieme con le sue derivate parziali $g_{y'}$, $g_{y'y'}$, $g_{y'x}$, in tutto un intorno (ρ_1) di C_0 , con $\rho_1 \leq \rho$, e per tutti i possibili valori di y' ;
 e) soddisfacente sempre, nell'intorno ora detto, alla disuguaglianza $g_{y'y'} \geq 0$.
 Ciò è possibile in un'infinità di modi ³⁷⁾.

Siccome per c) e d) possiamo determinare un numero positivo M tale che sia sempre, in tutto l'intorno (ρ_1) di C_0 ,

$$|g_{y'}(x, y, y')| < M,$$

dalla proposizione del n° 49 segue che l'integrale $\int_C g(x, y, y') dx$, il quale per a) e b) esiste sulle curve sulla quale esiste I_C e quindi $\bar{I}_C$, è sulla curva C_0 una funzione semicontinua inferiormente. È dunque possibile determinare un numero positivo $\rho_2 < \rho_1$ tale che, per ogni curva C (n° 40) appartenente all'intorno (ρ_2) di C_0 , si abbia

$$(37) \quad \int_C g dx > \int_{C_0} g dx - \varepsilon.$$

Osserviamo che è, da una parte,

$$(38) \quad \int_C g dx \leq \int_C \bar{f} dx,$$

e dall'altra, indicando con $C(\mathfrak{E})$ il complementare, rispetto ad (a, b) , dell'insieme $\mathfrak{E}$,

$$\int_{C_0} g dx = \int_{C(\mathfrak{E})} g(x, y_0, y'_0) dx + \int_{\mathfrak{E}} g(x, y_0, y'_0) dx$$

e per a) e b),

$$\int_{C_0} g dx \geq \int_{C(\mathfrak{E})} \bar{f}(x, y_0, y'_0) dx,$$

e ancora per (36)

$$(39) \quad \int_{C_0} g dx \geq \int_{C_0} \bar{f} dx - \varepsilon.$$

³⁷⁾ Si può prendere ad esempio, per

$$R \leq y' \leq 2R, \quad g = 2\bar{f} - \frac{y'}{R}\bar{f} + \frac{2}{R} \int_R^{y'} \bar{f} dy' - \frac{y'}{R}\bar{f}(R) + \bar{f}(R),$$

e per $-2R \leq y' \leq -R$ la stessa funzione in cui si cambi R su $-R$, per

$$-2R \leq y', \quad g = \frac{y'}{R} \{\bar{f}(2R) - \bar{f}(R)\} - 2\bar{f}(2R) + \bar{f}(R) + \frac{2}{R} \int_R^{2R} \bar{f} dy',$$

e analogamente per $y' \leq -2R$.

Da (37), (38) e (39) segue immediatamente

$$\int_C \bar{f} dx > \int_{C_0} \bar{f} dx - 2\varepsilon,$$

la quale disuguaglianza dimostra la semicontinuità di $\bar{I}_C$ sulla curva C_0 e quindi, per quanto abbiamo già osservato, anche quella di I_C ³⁸⁾.

§ 4.

Condizioni sufficienti per la semicontinuità.

c) La semicontinuità su una data curva.

51. È evidente che se in tutto un'intorno di una curva C_0 (n° 40) risulta soddisfatta la condizione $f_{y'y'} \geq 0$, per tutti i possibili valori di y' , l'integrale I_C è funzione semicontinua inferiormente sulla curva C_0 . Vogliamo ora occuparci di un caso notevole in cui non sempre la condizione ora menzionata è soddisfatta. E precisamente vogliamo dimostrare la proposizione che segue:

Sia C_0 una curva (n° 40) avente per equazione $y = y_0(x)$. Se:

a) per ogni punto $\bar{x}$ di (a, b) in cui esiste finita la derivata $y'_0(\bar{x})$, si può determinare un numero positivo $\rho(\bar{x})$ tale che, per tutte le terne (x, y, y') soddisfacenti alle disuguaglianze

$$|x - \bar{x}| \leq \rho(\bar{x}), \quad |y - y_0(\bar{x})| \leq \rho(\bar{x}), \\ |y' - y'_0(\bar{x})| \leq \rho(\bar{x}),$$

e per le quali il punto (x, y) risulta appartenente al campo A , e per $\bar{y}' \neq y'$ sia

$$(40) \quad E(x, y; y', \bar{y}') \equiv f(x, y, \bar{y}') - f(x, y, y') - (\bar{y}' - y')f_{y'}(x, y, y') > 0;$$

b) per ogni punto $\bar{x}$ di (a, b) dove $y'_0(x)$ è infinita o manca, esistono due numeri $\bar{\bar{y}}'$ e $\rho(\bar{x})$, dei quali il secondo positivo, in modo che soddisfatte le disuguaglianze

$$|x - \bar{x}| \leq \rho(\bar{x}), \quad |y - y_0(\bar{x})| \leq \rho(\bar{x}), \\ |y' - \bar{\bar{y}}'| \leq \rho(\bar{x}),$$

ed appartenendo (x, y) al campo A sia, per ogni $\bar{y}' \neq y'$, ancora verificata la (40);

³⁸⁾ Quando si abbia sempre $f_{y'y'} \geq m > 0$, ed anche in casi più generali, la dimostrazione della semicontinuità di I_C si può ottenere più brevemente deducendola da un lemma estensione di quello del n° 8 [Cfr. loc. cit. 4)].

allora l'integrale I_C risulta funzione semicontinua inferiormente sulla curva C_0 .

La funzione $\rho(x)$ definita in questo enunciato la supporremo misurabile (nel senso del LEBESGUE).

Consideriamo un punto $\bar{x}$ di (a, b) ove esiste finita la derivata $y'_0(\bar{x})$. La funzione $f(\bar{x}, y_0(\bar{x}), y')$ della sola y' , per le condizioni poste, ha una derivata $f_{y'}$, sempre crescente in tutto l'intervallo $(y'_0(\bar{x}) - \rho(\bar{x}), y'_0(\bar{x}) + \rho(\bar{x}))$. Ed infatti, se y'_1 e y'_2 sono due valori qualsiasi di questo intervallo, con $y'_1 < y'_2$, è, per la (40),

$$E(\bar{x}, y_0(\bar{x}); y'_1, y'_2) > 0$$

e quindi, per essere (Cfr. n° 48)

$$(41) \quad \begin{aligned} E(\bar{x}, y_0(\bar{x}); y'_1, y'_2) &= \frac{1}{2}(y'_2 - y'_1)^2 f_{y'y'}(\bar{x}, y_0(\bar{x}), y'_1 + \theta(y'_2 - y'_1)), \\ f_{y'y'}(\bar{x}, y_0(\bar{x}), y'_1 + \theta(y'_2 - y'_1)) &> 0, \end{aligned}$$

e facendo tendere y'_2 a y'_1

$$f_{y'y'}(\bar{x}, y_0(\bar{x}), y'_1) \geq 0.$$

È dunque, nell'intervallo detto, sempre $f_{y'y'}(\bar{x}, y_0(\bar{x}), y') \geq 0$ senza che [per la (41)] l'uguaglianza possa esser sempre verificata in tutto un segmento parziale di esso. La $f_{y'}$ è perciò, in quell'intervallo, sempre crescente ed è

$$(42) \quad f_{y'}(\bar{x}, y_0(\bar{x}), y'_0(\bar{x}) - \rho(\bar{x})) < f_{y'}(\bar{x}, y_0(\bar{x}), y'_0(\bar{x})) < f_{y'}(\bar{x}, y_0(\bar{x}), y'_0(\bar{x}) + \rho(\bar{x})).$$

Essendo poi

$$E(\bar{x}, y_0(\bar{x}), y'_0(\bar{x}) - \rho(\bar{x}), \hat{y}') > 0,$$

$$E(\bar{x}, y_0(\bar{x}), y'_0(\bar{x}) + \rho(\bar{x}), \hat{y}') > 0,$$

se consideriamo in un piano la curva rappresentativa della funzione $f(\bar{x}, y_0(\bar{x}), \hat{y}')$, dove assumiamo come variabile indipendente la $\hat{y}'$, la tangente r_1 a questa curva nel punto corrispondente a $\hat{y}' = y'_0(\bar{x}) - \rho(\bar{x})$ giace tutta al disotto della curva medesima, e lo stesso accade per la tangente r_2 nel punto corrispondente a $\hat{y}' = y'_0(\bar{x}) + \rho(\bar{x})$.

Ne viene dunque, per le (42), che, essendo il primo e l'ultimo termine di tali disuguaglianze i coefficienti angolari della retta r_1 e r_2 , per $\hat{y}' \leq y'_0(\bar{x}) - \rho(\bar{x})$ l'ordinata di r_1 è sempre maggiore di quella di r_2 , e per $\hat{y}' \geq y'_0(\bar{x}) + \rho(\bar{x})$ è invece l'ordinata di r_2 sempre maggiore di quella di r_1 . Pertanto la retta r che ha per ordinata generica la semisomma delle ordinate di r_1 e r_2 , e cioè

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\{f(\bar{x}, y_0(\bar{x}), y'_0(\bar{x}) + \rho(\bar{x})) + f(\bar{x}, y_0(\bar{x}), y'_0(\bar{x}) - \rho(\bar{x}))\} \\ &+ \frac{1}{2}\{(\hat{y}' - y'_0(\bar{x}) - \rho(\bar{x}))f_{y'}(\bar{x}, y_0(\bar{x}), y'_0(\bar{x}) + \rho(\bar{x})) \\ &\quad + (\hat{y}' - y'_0(\bar{x}) + \rho(\bar{x}))f_{y'}(\bar{x}, y_0(\bar{x}), y'_0(\bar{x}) - \rho(\bar{x}))\}, \end{aligned}$$

resta tutta al disotto della curva rappresentativa della funzione $f(\bar{x}, y_0(\bar{x}), \bar{y}')$, e la differenza fra le ordinate di questa curva e della retta r si mantiene maggiore di un numero positivo.

Sia $\rho_1(\bar{x})$ un numero positivo $\leq \rho(\bar{x})$ e tale che, soddisfatte le disuguaglianze

$$|x - \bar{x}| \leq \rho_1(\bar{x}), \quad |y - y_0(\bar{x})| \leq \rho_1(\bar{x}),$$

la $f(x, y, \bar{y}')$ risulti sempre maggiore di quell'ordinata della retta r detta che corrisponde allo stesso valore di $\bar{y}'$, se (x, y) appartiene ad A . Perchè ciò sia basterà prendere $\rho_1(\bar{x})$ in modo che, soddisfatte le disuguaglianze precedenti, la funzione $f(x, y, \bar{y}')$ sia maggiore della corrispondente ordinata della retta r , per ogni $\bar{y}'$ dell'intervallo $\{y'_0(\bar{x}) - \rho(\bar{x}), y'_0(\bar{x}) + \rho(\bar{x})\}$, e le tangenti alla curva che rappresenta $f(x, y, \bar{y}')$ come funzione della $\bar{y}'$, nei punti corrispondenti a $\bar{y}' = y'_0(\bar{x}) - \rho(\bar{x})$ e $\bar{y}' = y'_0(\bar{x}) + \rho(\bar{x})$, abbiano ordinate maggiori della retta r , la prima per ogni $\bar{y}' \leq y'_0(\bar{x}) - \rho(\bar{x})$, la seconda per ogni $\bar{y}' > y'_0(\bar{x}) + \rho(\bar{x})$. Si convenga, per fissare le idee, di scegliere $\rho_1(\bar{x})$ uguale alla metà del limite superiore dei valori per esso possibili.

Quanto si è fatto per i punti $\bar{x}$, si ripeta per quelli $\bar{\bar{x}}$ nei quali la derivata $y'_0(\bar{x})$ o manca o non è finita, sostituendo nel ragionamento ad $y'_0(\bar{x})$ il valore $\bar{\bar{y}}'$.

Ne viene così che, per ogni punto x_0 di (a, b) (sia esso un $\bar{x}$ o un $\bar{\bar{x}}$) risultano determinate una funzione $\rho_1(x_0) > 0$ e $< \rho(x_0)$, e una retta r_0 , in modo che, per ogni punto (x, y) di A soddisfacente alle disuguaglianze

$$|x - x_0| \leq \rho_1(x_0), \quad |y - y_0(x_0)| \leq \rho_1(x_0),$$

la $f(x, y, \bar{y}')$ sia, per tutti i valori di $\bar{y}'$, maggiore della corrispondente ordinata della retta r_0 .

Ad ogni punto x_0 si faccia anche corrispondere un numero $\rho_2(x_0)$, uguale al minore fra i due $\frac{1}{2}\rho_1(x_0)$ e $\sigma(x_0)$, dove $\sigma(x_0)$ è positivo e tale che nell'intervallo $(x_0 - \sigma(x_0), x_0 + \sigma(x_0))$ l'oscillazione della funzione $y_0(x)$ sia $\leq \frac{1}{2}\rho_1(x_0)$.

In base ad un noto teorema di BOREL ³⁹⁾ potremo allora scegliere un numero finito di punti di (a, b) : $x_1, x_2, \dots, x_n$, in modo che gli intervalli

$$\{x_s - \rho_2(x_s), x_s + \rho_2(x_s)\}, \quad (s = 1, 2, \dots, n),$$

ricoprono tutto l'intervallo (a, b) ; e dopo aver soppresso le parti di ciascuno di essi

³⁹⁾ loc. cit. ¹⁸⁾.

eventualmente ricoperte da altri intervalli dello stesso gruppo corrispondenti ad indici minori, risulteranno degli intervalli in numero finito

$$\delta^{(1)}, \quad \delta^{(2)}, \quad \dots, \quad \delta^{(m)},$$

non sovrappoventisi, ricoprenti interamente il segmento (a, b) e tali che ad essi corrispondano le rette

$$r^{(1)}, \quad r^{(2)}, \quad \dots, \quad r^{(m)}$$

ed i numeri positivi

$$\rho^{(1)}, \quad \rho^{(2)}, \quad \dots, \quad \rho^{(m)},$$

così che, per ogni x di $\delta^{(s)}$ ($s = 1, 2, \dots, m$), per ogni y soddisfacente alla $|y - y_0(x)| \leq \rho^{(s)}$ e per tutti i valori finiti di y' , la funzione $f(x, y, y')$ resti sempre maggiore dell'ordinata

$$p^{(s)} + y' q^{(s)}$$

della retta $r^{(s)}$, $p^{(s)}$ e $q^{(s)}$ essendo delle costanti, indipendenti da x, y, y' .

È ben evidente che, per dimostrare la semicontinuità dell'integrale I_C basta dimostrare quella dell'integrale corrispondente agli archi di curva che si proiettano sul segmento $\delta^{(s)}$; e siccome, per la proposizione del n° 43, l'integrale della funzione $p^{(s)} + y' q^{(s)}$ varia con continuità al variare della curva d'integrazione, basta anche provare la semicontinuità dell'integrale della funzione

$$f^{(s)} \equiv f - (p^{(s)} + y' q^{(s)}),$$

relativamente all'intervallo $\delta^{(s)}$ 4°).

Se indichiamo con $E^{(s)}$ la funzione E corrispondente alla $f^{(s)}$, abbiamo

$$E^{(s)} \equiv E.$$

4°) Qualora la $y'_0(x)$ esista ovunque e sia continua, la retta $r^{(s)}$ si può scegliere in modo che in tutto $\delta^{(s)}$ si abbia sempre, prefissato con $\varepsilon < 0$,

$$f(x, y_0(x), y'_0(x)) - (p^{(s)} + y'_0(x) q^{(s)}) < \varepsilon$$

e quindi

$$\int_{\delta^{(s)}} f(x, y_0(x), y'_0(x)) dx - \varepsilon < \int_{\delta^{(s)}} (p^{(s)} + y'_0(x) q^{(s)}) dx.$$

E siccome è, per ogni altra curva dell'intorno ($\rho^{(s)}$) della C_0 ,

$$\int_{\delta^{(s)}} (p^{(s)} + y' q^{(s)}) dx < \int_{\delta^{(s)}} f(x, y, y') dx$$

e l'integrale della $p^{(s)} + y' q^{(s)}$ è funzione continua della curva d'integrazione, ne viene senz'altro la continuità dell'integrale della f sull'arco di C_0 che corrisponde a $\delta^{(s)}$.

Ciò porta a concludere che, per dimostrare la nostra proposizione, si può supporre la f sempre positiva.

52. Ammessa questa ipotesi e preso ad arbitrio un numero positivo σ , scegliamone un altro, pure positivo, R in modo che si abbia

$$(43) \quad \int_{C(\mathfrak{E})} f(x, y_0, y'_0) dx < \sigma,$$

dove $C(\mathfrak{E})$ rappresenta il complementare dell'insieme $\mathfrak{E}$ dei punti di (a, b) nei quali la derivata $y'_0(x)$ esiste ed è in valore assoluto $\leq R$. Questa scelta è possibile per l'assoluta continuità della funzione $y_0(x)$ e dell'integrale

$$\int_a^x f(x, y_0, y'_0) dx.$$

Riprendendo il ragionamento fatto al n° precedente si vede che ad ogni $\bar{x}$ di $\mathfrak{E}$ si può far corrispondere una funzione $\bar{p} + y' \bar{q}$ — l'ordinata della retta r — la quale sia sempre minore di $f(\bar{x}, y_0(\bar{x}), y')$, per ogni y' . Si vede di più che, sostituendo al numero $\rho(\bar{x})$ un $\rho_1(\bar{x})$ minore e convenientemente piccolo, si può far in modo che, per ogni y' dell'intervallo $\{y'_0(\bar{x}) - \rho_1(\bar{x}), y'_0(\bar{x}) + \rho_1(\bar{x})\}$, sia

$$(44) \quad 0 < f(\bar{x}, y_0(\bar{x}), y') - (\bar{p} + y' \bar{q}) < \sigma;$$

e il coefficiente angolare della retta r , ossia il numero $\bar{q}$, è poi sempre compreso fra i coefficienti angolari delle rette r_1 e r_2 , i quali sono dati $f_{y'}(\bar{x}, y_0(\bar{x}), y'_0(\bar{x}) - \rho_1(\bar{x}))$ e $f_{y'}(\bar{x}, y_0(\bar{x}), y'_0(\bar{x}) + \rho_1(\bar{x}))$. Prenderemo $\rho_1(\bar{x})$ minore anche di R .

Sia, allora, $\rho_2(\bar{x})$ un numero positivo minore di $\rho_1(\bar{x})$ e tale che; soddisfatte le disuguaglianze

$$|x - \bar{x}| \leq \rho_2(\bar{x}), \quad |y - y_0(\bar{x})| \leq \rho_2(\bar{x}), \\ |y' - y'_0(\bar{x})| \leq \rho_2(\bar{x}),$$

(xy) essendo un punto di A appartenente all'intorno (ρ) della C_0 , si abbia

$$(45) \quad 0 < f(x, y, y') - (\bar{p} + y' \bar{q}) < \sigma;$$

$\rho_2(\bar{x})$ sia poi anche tale che per gli stessi punti (xy) e per ogni y' si abbia

$$(46) \quad f(x, y, y') - (\bar{p} + y' \bar{q}) > 0.$$

Per fissare le idee, scegliamo fra gli infiniti possibili $\rho_1(\bar{x})$ la metà del loro limite superiore; e altrettanto facciamo per $\rho_2(\bar{x})$. È importante rilevare che, per essere

$|y'_0(\bar{x})| \leq R$ e per la condizione imposta a $\rho_1(\bar{x})$ di essere $< R$, è sempre

$$|\bar{q}| < M',$$

dove con M' indichiamo il massimo modulo di $f_{y'}$ nei punti dell'intorno (ρ) della C_0 e per $|y'| \leq 2R$. In tutti i punti (x, y, y') del campo ora indicato, la funzione $f(x, y, y')$ ha un massimo modulo; si ricava dunque dalla (45) che esiste anche un numero positivo M'' per il quale è sempre

$$|\bar{p}| < M''.$$

Indicando con M il maggiore dei due numeri M' , M'' , abbiamo sempre,

$$(47) \quad |\bar{p}| < M, \quad |\bar{q}| < M.$$

Indichiamo ora con $\mathbb{E}_n$ l'insieme dei punti di $\mathbb{E}$ in cui è $\rho_2(\bar{x}) > \frac{1}{n}$.

Siccome è sempre $\rho_2(x) > 0$ su $\mathbb{E}$, la misura di $\mathbb{E}_n$ tende, per $n \rightarrow \infty$, a quella di $\mathbb{E}$. Sia $\bar{n}$ un valore di n tale che

$$(48) \quad \int_{C(\mathbb{E}_{\bar{n}})} f(x, y_0, y'_0) dx < \sigma;$$

questo $\bar{n}$ esiste certamente perchè vale la (43), dove $C(\mathbb{E})$ è contenuto in $C(\mathbb{E}_{\bar{n}})$ ed ha una misura che è il limite, per $n \rightarrow \infty$, di quella di quest'ultimo insieme. In ogni punto di $\mathbb{E}_{\bar{n}}$ è per definizione, $\rho_2(x) > \frac{1}{\bar{n}}$.

Dopo ciò, indichiamo con ρ_3 un numero positivo minore di $\frac{1}{4\bar{n}}$, e con procedimento analogo a quello seguito al n° 49 per la determinazione della funzione $\bar{\pi}_n(x)$, definiamo una funzione $P(x)$, in tutto (a, b) , la quale:

- 1°) sia continua insieme con la sua derivata prima;
- 2°) soddisfi a tutto (a, b) alla disuguaglianza $|y_0(x) - P(x)| < \rho_3$;
- 3°) soddisfi alla disuguaglianza $|y'_0(x) - P'(x)| < \rho_3$; in un componente chiuso $\mathbb{E}_{n,1}$ di $\mathbb{E}_n$ il cui complementare verifichi ancora la (48), vale a dire la

$$\int_{C(\mathbb{E}_{n,1})} f(x, y_0, y'_0) dx < \sigma.$$

Per la continuità della $P(x)$ e della $P'(x)$, è possibile di determinare un numero positivo δ , minore di ρ_3 , tale da rendere soddisfatte le disuguaglianze

$$(49) \quad |P(x) - P(x')| < \rho_3, \quad |P'(x) - P'(x')| < \rho_3,$$

quando sia $|x - x'| \leq \delta$; e in virtù del già citato teorema di BOREL, si può, fra tutti gli intervalli di ampiezza δ avente per centro un punto dell'insieme chiuso $\mathfrak{E}_{n,1}$, sceglierne un numero finito così da ricoprire con esso tutto l'insieme detto.

Si ordinino, con un qualsiasi criterio, questi intervalli e da ciascuno di essi si tolgano quelle parti che risultassero sovrapposte ad altri intervalli di indice minore; si sopprima poi dai nuovi intervalli risultanti un certo numero di quelle loro parti che eventualmente non contenessero alcun punto di $\mathfrak{E}_{n,1}$, in modo che la somma delle lunghezze degli intervalli restanti $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$, sia tanto prossima alla misura di $\mathfrak{E}_{n,1}$ che, detto $\mathfrak{E}'$ l'insieme dei punti di tutti questi ω che non appartengono a $\mathfrak{E}_{n,1}$, si abbia

$$(50) \quad m(\mathfrak{E}') < \frac{\sigma}{M}, \quad \int_{\mathfrak{E}'} |y'_0| dx < \frac{\sigma}{M}, \quad \int_{\mathfrak{E}'} f(x, y_0, y'_0) dx < \sigma.$$

Per la loro costruzione gli intervalli ω risultano non sovrapponentisi, ricoprenti interamente $\mathfrak{E}_{n,1}$ e tutti di ampiezza minore di δ .

Consideriamo uno qualunque di questi ω , ad esempio ω_s , e sia x_s un punto di $\mathfrak{E}_{n,1}$ appartenente ad esso (per esempio quello più a sinistra). Questo x_s appartiene necessariamente anche a $\mathfrak{E}_n$ e a $\mathfrak{E}$: sia pertanto $p_s + y'_s q_s$ la funzione $\bar{p} + y' \bar{q}$ della disuguaglianza (44), che gli corrisponde. Detto x un qualsiasi punto di ω_s appartenente a $\mathfrak{E}_{n,1}$, è, per le proprietà 2°) e 3°) cui soddisfa la $P(x)$ e per le (49),

$$|x - x_s| < \delta < \rho_s < \frac{1}{4n} < \rho_2(x_s),$$

$$|y_0(x) - y_0(x_s)| < 3\rho_s < \frac{3}{4n} < \rho_2(x_s),$$

$$|y'_0(x) - y'_0(x_s)| < 3\rho_s < \frac{3}{4n} < \rho_2(x_s).$$

Dunque, per la x detta, si ha (45)

$$(51) \quad 0 < f(x, y_0(x), y'_0(x)) - (p_s + y'_s q_s) < \sigma.$$

Se poi x è un altro qualsiasi punto di ω_s , ed è $|y - y_0(x)| < \rho_s$, avendosi

$$y - y_0(x_s) = (y - y_0(x)) + (y_0(x) - P(x)) + (P(x) - P(x_s)) + (P(x_s) - y_0(x_s)),$$

$$|y - y_0(x_s)| < 4\rho_s < \frac{1}{n} < \rho_2(x_s),$$

si ha, per la (46), e qualunque sia la y' ,

$$(52) \quad f(x, y, y') - (p_s + y'_s q_s) > 0.$$

Indichiamo con $\mathfrak{E}^{(s)}$ la parte di $\mathfrak{E}_{n,1}$ contenuta in ω_s , con $\mathfrak{E}_1^{(s)}$ il complementare di $\mathfrak{E}^{(s)}$ rispetto a ω_1 . Abbiamo, per la (51),

$$0 < \int_{\mathfrak{E}^{(s)}} f(x, y_0(x), y'_0(x)) dx - \int_{\mathfrak{E}^{(s)}} (p_s + y'_0 q_s) dx < \sigma \cdot m(\mathfrak{E}^{(s)}),$$

e per le (47) e (52)

$$\begin{aligned} & 0 < \int_{\omega_s} f(x, y_0(x), y'_0(x)) dx - \int_{\omega_s} (p_0 + y'_0 q_s) dx \\ & < \sigma \cdot m(\mathfrak{E}^{(s)}) + \int_{\mathfrak{E}_1^{(s)}} f(x, y_0(x), y'_0(x)) dx + M \left\{ m(\mathfrak{E}_1^{(s)}) + \int_{\mathfrak{E}_1^{(s)}} |y'_0| dx \right\}, \end{aligned}$$

e sommando rispetto ad s e tenendo conto delle (50),

$$\begin{aligned} 0 < \sum_s \int_{\omega_s} f(x, y_0(x), y'_0(x)) dx - \sum_s \int_{\omega_s} (p_s + y'_0 q_s) dx & < \sigma(b-a) + \sigma + 2\sigma \\ & = \sigma(b-a+3). \end{aligned}$$

E poichè le parti di (a, b) esterne agli intervalli ω_s sono comprese in $C(\mathfrak{E}_{n,1})$, dalla condizione 3° cui soddisfa la $P(x)$, scende, per la disuguaglianza ora scritta,

$$(53) \quad 0 < \int_a^b f(x, y_0(x), y'_0(x)) dx - \sum_s \int_{\omega_s} (p_s + y'_0 q_s) dx < \sigma(b-a+4).$$

Osserviamo ora che, essendo p_s e q_s delle costanti, l'integrale

$$\int_{\omega_s} (p_s + y' q_s) dx$$

è (n° 43) funzione continua della curva d'integrazione. Possiamo dunque determinare un intorno $(\bar{\rho})$ di C_0 , con $\bar{\rho} < \rho_3$, in guisa che, per ogni curva C , di equazione $y = y(x)$, ad esso appartenente, sia per tutti gli indici s , da 1 ad m ,

$$\left| \int_{\omega_s} (p_s + y'_0 q_s) dx - \int_{\omega_s} (p_s + y' q_s) dx \right| < \frac{\sigma}{m},$$

e perciò

$$\left| \sum_s \int_{\omega_s} (p_s + y'_0 q_s) dx - \sum_s \int_{\omega_s} (p_s + y' q_s) dx \right| < \sigma.$$

Ma la (52) dà

$$\sum_s \int_{\omega_s} f(x, y, y') dx - \sum_s \int_{\omega_s} (p_s + y' q_s) dx > 0,$$

onde

$$\sum_s \int_{\omega_s} f(x, y, y') dx > \sum_s \int_{\omega_s} (p_s + y'_0 q_s) dx - \sigma,$$

ed anche, per essere sempre $f \geq 0$,

$$\int_a^b f(x, y, y') dx > \sum_s \int_{\omega_s} (p_s + y'_0 q_s) dx - \sigma.$$

Da questa e dalla (53) si ha

$$\int_a^b f(x, y, y') dx > \int_a^b f(x, y_0, y'_0) dx - \sigma(b - a + \delta);$$

la quale risulta soddisfatta per ogni curva C appartenente all'intorno $(\bar{\rho})$ della C_0 .

La proposizione enunciata al n° 51 è dunque completamente provata.

53. OSSERVAZIONE I. — Nell'enunciato della proposizione del n° 51 si può sostituire alla disuguaglianza $E(x, y; y', \hat{y}') > 0$ l'altra

$$E(x, y; y', \hat{y}') \geq 0,$$

e ciò tanto nella condizione $a)$ che in quella $b)$, purchè si abbia, per ogni $\hat{y}' \neq y'_0(x)$,

$$(54) \quad E(x, y_0(x); y'_0(x), \hat{y}') > 0$$

e per ogni $\hat{y}' \neq \bar{y}'$

$$(55) \quad E(\bar{x}, y_0(\bar{x}); \bar{y}', \hat{y}') > 0.$$

Le (54), (55) sono certamente soddisfatte se è $f_{y'y'}(\bar{x}, y_0(\bar{x}), y'_0(\bar{x})) > 0$, $f_{y'y'}(\bar{x}, y_0(\bar{x}), \bar{y}') > 0$.

OSSERVAZIONE II. — La proposizione del n° 51 continua a sussistere:

1°) se, fra i punti di (a, b) in cui esiste finita la $y'_0(x)$, ve n'è un insieme di misura nulla che, invece di soddisfare alla condizione $a)$, soddisfano alla $b)$;

2°) oppure se, essendo la funzione $f(x, y, y')$ sempre maggiore di un numero fisso N , è verificata soltanto la condizione $a)$, ed essa lo è in tutti i punti in cui esiste finita la $y'_0(x)$, ad eccezione al più di un insieme di misura nulla.

Nell'uno e nell'altro di questi casi le condizioni di cui si tratta possono essere verificati nella forma dell'Osservazione I.

54. Analogamente a quanto è stato notato al n° 28, per il caso delle curve in forma parametrica, si può rilevare anche qui che, in forza dell'Osservazione II, ora fatta la condizione

$$f_{y'y'}(x, y_0(x), y'_0(x)) \geq 0$$

può non essere verificata su un insieme di punti di misura nulla, senza che per questo venga a mancare la semicontinuità inferiore di I_C sulla curva C_0 .

Lo stesso esempio addotto al n° citato serve anche per il caso attuale.

§ 5.

Condizioni necessarie per la semicontinuità.

55. Procedendo con lo stesso metodo seguito ai n° 29 e 32, si provano le proposizioni che seguono:

a) *Condizione necessaria affinchè su ogni curva (n° 40) del campo A l'integrale I_C sia funzione semicontinua inferiormente, è che si abbia*

$$f_{y,y'}(x, y, y') \geq 0$$

per ogni y' finito e in tutti i punti (xy) interni al campo A o limiti di punti interni.

b) *Condizione necessaria affinchè su una data curva C_0 (n° 40), completamente interna al campo A e per la quale esista ovunque e sempre sia continua la derivata $y'_0(x)$, l'integrale I_C sia funzione semicontinua inferiormente, è che si abbia, in ogni punto di C_0 .*

$$f_{y,y'}(x, y_0(x), y'_0(x)) \geq 0.$$

OSSERVAZIONE I. — I campi che comunemente si presentano sono tali che ogni loro punto o è interno o è punto limite di punti interni al campo stesso.

Per tali campi, la condizione trovata in a) come necessaria è anche sufficiente (n° 50) per la semicontinuità inferiore di I_C su ogni curva appartenente al campo considerato.

OSSERVAZIONE II. — La proposizione b) sussiste anche se la curva C_0 ha un numero finito di punti non interni al campo A o, più generalmente, se tali suoi punti si proiettano ortogonalmente sull'asse x in un insieme di misura nulla. Essa vale pure se, fissato ad arbitrio un intorno (ρ) della C_0 , si può sempre trovare una poligonale appartenente a quest'intorno, completamente interna ad A e tale che sia incontrata in un sol punto al più da ogni parallela all'asse y , che i suoi lati abbiano coefficienti angolari inferiori in modulo ad un numero fisso, indipendente da ρ , e che la sua lunghezza differisca da quella della curva C_0 per meno di ρ . La stessa proposizione ha poi piena validità, qualunque sia la curva C_0 (n° 40) del campo A , se la frontiera di questo campo soddisfa alle condizione b) del n° 40 e, oltre ad eventuali, segmenti rettilinei paralleli all'asse y , in numero finito, ha al più un numero, pure finito, di punti con tangente parallela al medesimo asse.

56. Si può inoltre dimostrare, analogamente a quanto si è fatto al n° 33, che:

Condizione necessaria affinché, su una data curva C_0 ($n^\circ 40$) completamente interna al campo A , l'integrale I_C sia funzione semicontinua inferiormente, è che risulti di misura nulla l'insieme dei valori di x nei quali non è verificata la disuguaglianza.

$$f_{y'y'}(x, y_0(x), y'_0(x)) \geq 0.$$

Supponiamo che la misura dei punti dell'asse x per i quali esiste finita la derivata $y'_0(x)$ ed è

$$f_{y'y'}(x, y_0(x), y'_0(x)) < 0.$$

non sia nulla. Indicatela con 2μ possiamo un insieme chiuso E di questi punti tale che abbia misura $> \mu$ e che in esso sia sempre $f_{y'y'}(x, y_0(x), y'_0(x)) < -\frac{3}{2}\eta$ il modulo di $y'_0(x)$ ammetta un limite superiore finito, che rappresenteremo con M .

Per la continuità della funzione $f_{y'y'}$, possiamo determinare un numero positivo δ in modo che, soddisfatte le disuguaglianze

$$|x - \bar{x}| \leq 2\delta, \quad |y - y_0(\bar{x})| \leq 2\delta, \quad |y' - y'_0(\bar{x})| \leq 2\delta,$$

ed essendo (xy) un punto di A , sia

$$f_{y'y'}(x, y, y') < -\eta,$$

e ciò qualunque sia il punto $\bar{x}$ di E .

Scelto poi ad arbitrio un altro numero positivo ε , possiamo determinare un σ maggiore di zero e minore di $\frac{1}{2}\delta$, così che:

1°) se x è un qualsiasi punto dell'intervallo (a, b) su cui è definita la $y_0(x)$ e (x, y) è un punto di A e sono soddisfatte le disuguaglianze $|y - y_0(x)| < \sigma$, $|y' - \bar{y}'| < \sigma$, $|y'| \leq M + \delta$, sia

$$|f(x, y_0(x), \bar{y}') - f(x, y, y')| < \varepsilon;$$

2°) sia anche, su ogni insieme a di (a, b) di misura $m(a) \leq \sigma$,

$$\left| \int_a f(x, y_0(x), y'_0(x)) dx \right| < \varepsilon;$$

3°) sia $\sigma \cdot N < \varepsilon$, dove N indica il massimo modulo della funzione f nel campo

$$a \leq x \leq b, \quad |y - y_0(x)| \leq \delta, \quad |y'| \leq M + \delta;$$

4°) La funzione $y_0(x)$ abbia, in ogni intervallo di ampiezza non superiore a σ , un'oscillazione $\leq \frac{1}{2}\delta$.

Ciò premesso, dividiamo il segmento (a, b) in n parti uguali e congiungiamo fra loro con segmenti rettilinei i consecutivi punti di C_0 che hanno per ascisse i punti di

divisione ottenuti. Avremo così una poligonale Π_n , inscritta in C_0 , la cui equazione potrà scriversi $y = y_n(x)$. Per $n \rightarrow \infty$ la $y_n(x)$ tende uniformemente alla $y_0(x)$ su tutto (a, b) e la lunghezza della poligonale Π_n tende alla lunghezza della curva C_0 . Possiamo dunque ⁴¹⁾ determinare in intero $\bar{n}$ in modo che, per ogni $n > \bar{n}$:

a) sia, per tutti gli x di (a, b) ,

$$|y_n(x) - y_0(x)| < \sigma;$$

b) si abbia, in tutto (a, b) ad eccezione al più di un insieme di misura minore di σ ,

$$|y'_n(x) - y'_0(x)| < \sigma;$$

c) l'insieme E_n dei punti di E in cui è

$$|y'_n(x) - y'_0(x)| < \sigma$$

risulti di misura maggiore di μ .

Sia $n > \bar{n}$ e E'_n un insieme chiuso qualsiasi contenuto in E_n e di misura maggiore di μ .

Se $\bar{x}$ è un punto qualunque di E'_n , possiamo determinare il massimo intervallo di (a, b) contenente $\bar{x}$, avente gli estremi distanti da questo punto al più $\frac{\sigma}{2}$ e tutto contenuto nella proiezione sull'asse x del lato di Π_n a cui appartiene il punto $(\bar{x}, y_n(\bar{x}))$. Fra gli intervalli così determinati possiamo sceglierne un numero finito che ricoprono tutto l'insieme E'_n ; e ridotti gli intervalli di questo gruppo in modo che essi non si ricoprano scambievolmente, avremo un sistema di intervalli $l_{n,1}, l_{n,2}, \dots, l_{n,m_n}$, non sovrappoventesi, ciascuno di ampiezza $\leq \sigma < \delta$, ricoprenti interamente E'_n . Inoltre, per quanto precede, detto $x_{n,r}$ il primo estremo di $l_{n,r}$, è

$$f_{y,y'}(x, y, y') < -n,$$

per tutte le terne (x, y, y') soddisfacenti alle disuguaglianze

$$|x - x_{n,r}| \leq \delta, \quad |y - y_n(x_{n,r})| \leq \delta, \quad |y' - y'_n(x_{n,r})| \leq \delta \quad 42).$$

Ora, conformemente a quanto si è dimostrato al n° 29 possiamo asserire che, comunque piccolo si fissi un intorno delle parti dei lati di Π_n corrispondenti ai segmenti

⁴¹⁾ loc. cit. 35).

⁴²⁾ Per essere $l_{n,r} < \sigma < \delta$, è, se indichiamo con $\bar{x}$ il punto di E'_n dal cui intervallo è derivato $l_{n,r}$, $|x_{n,r} - \bar{x}| < \sigma < \delta$ e, per a) e 4°), $|y_n(x_{n,r}) - y_0(x_{n,r})| + |y_0(x_{n,r}) - y_0(\bar{x})| < \sigma + \frac{1}{2}\delta < \delta$, ed ancora, essendo $y'_n(x_{n,r}) = y'_n(\bar{x})$, $|y'_n(x_{n,r}) - y'_0(\bar{x})| = |y'_n(\bar{x}) - y'_0(\bar{x})| < \sigma < \delta$, per c).

$l_{n,r}$, è sempre possibile costruire per ciascuna di esse una poligonale $p_{n,r}$, aventi gli stessi estremi della parte considerata, appartenente all'intorno fissato e soddisfacente alla disuguaglianza

$$(56) \quad \int_{x_{n,r}}^{x'_{n,r}} f(x, y_{n,r}, y'_{n,r}) dx - \int_{x_{n,r}}^{x'_{n,r}} f(x, y_n, y'_n) dx < -\frac{1}{4} \eta l_{n,r} \delta^2,$$

dove $x'_{n,r}$ indica il secondo estremo di $l_{n,r}$ e $y = y_{n,r}(x)$ è l'equazione della poligonale $p_{n,r}$, con $y'_{n,r}(x) = y'_n(x) \pm \delta$.

Consideriamo allora la curva C_n formata con tutte le poligonali $p_{n,r}$ ($r = 1, 2, \dots, m_n$), con le parti dei lati di Π_n necessarie per collegare le $p_{n,r}$ alla curva C_0 , e delle parti di quest'ultima curva indispensabili per il completamento della C_n su tutto l'intervallo (a, b) . Indicata con $y = \varphi_n(x)$ l'equazione della C_n e detti $\omega_{n,1}, \omega_{n,2}, \dots, \omega_{n,m'_n}$ gli intervalli di (a, b) sui quali è $\varphi_n(x) = y_n(x)$, abbiamo

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(x, \varphi_n(x), \varphi'_n(x)) dx - \int_a^b f(x, y_0(x), y'_0(x)) dx \\ &= \sum_{r=1}^{m_n} \left\{ \int_{l_{n,r}} f(x, y_{n,r}, y'_{n,r}) dx - \int_{l_{n,r}} f(x, y_0, y'_0) dx \right\} \\ &+ \sum_{r=1}^{m'_n} \left\{ \int_{\omega_{n,r}} f(x, y_n, y'_n) dx - \int_{\omega_{n,r}} f(x, y_0, y'_0) dx \right\}. \end{aligned}$$

Ma è

$$\begin{aligned} & \int_{l_{n,r}} f(x, y_{n,r}, y'_{n,r}) dx - \int_{l_{n,r}} f(x, y_0, y'_0) dx \\ &= \left\{ \int_{l_{n,r}} f(x, y_{n,r}, y'_{n,r}) dx - \int_{l_{n,r}} f(x, y_n, y'_n) dx \right\} \\ &+ \left\{ \int_{l_{n,r}} f(x, y_n, y'_n) dx - \int_{l_{n,r}} f(x, y_0, y'_0) dx \right\} \end{aligned}$$

e per la (56),

$$< -\frac{1}{4} \eta l_{n,r} \delta^2 + \left\{ \int_{l_{n,r}} f(x, y_n, y'_n) dx - \int_{l_{n,r}} f(x, y_0, y'_0) dx \right\}.$$

La somma delle lunghezze dei segmenti $l_{n,r}$ ($r = 1, 2, \dots, m_n$) non potendo risultare minore della misura dell'insieme E'_n , completamente ricoperto dagli $l_{n,r}$, misura che è maggiore di μ , abbiamo

$$(57) \quad \left\{ \int_a^b f(x, \varphi_n, \varphi'_n) dx - \int_a^b f(x, y_0, y'_0) dx < -\frac{1}{4} \eta \mu \delta^2 \right. \\ \left. + \sum_{r=1}^{m_n} \left\{ \int_{q_{n,r}} f(x, y_n, y'_n) dx - \int_{q_{n,r}} f(x, y_0, y'_0) dx \right\} \right\},$$

dove con $q_{n,r}$ si indicano quelle proiezioni su (a, b) dei lati di Π_n le quali contengono i segmenti $l_{n,r}$ e gli $\omega_{n,r}$.

Osserviamo che, per la scelta fatta dell'indice n [condiz. a) e b)] e per la 1°), su tutti gli intervalli $q_{n,r}$ ad eccezione al più di un insieme di punti di misura $< \sigma$, è

$$(58) \quad |f(x, y_n, y'_n) - f(x, y_o, y'_o)| < \varepsilon,$$

perchè ogni $q_{n,r}$ contiene almeno un punto di E'_n , e in tal punto è $|y'_n - y'_o| < \sigma$ [cond. c)] e perciò $|y'_n| < M + \sigma < M + \delta$, la quale disuguaglianza risulta verificata su tutto $q_{n,r}$, essendo, su ciascuno di questi seguenti, y'_n costante. Se dunque teniamo conto della (58) e delle condizioni a), 2°), 3°), abbiamo

$$\left| \sum_{r=1}^{m_n} \left\{ \int_{q_{n,r}} f(x, y_n, y'_n) dx - \int_{q_{n,r}} f(x, y_o, y'_o) dx \right\} \right| < \varepsilon(b-a) + \varepsilon + \varepsilon = \varepsilon(b-a+2),$$

e per la (57)

$$\int_a^b f(x, y_n, y'_n) dx - \int_a^b f(x, y_o, y'_o) dx < -\frac{1}{4} \eta \mu \delta^2 + \varepsilon(b-a+2).$$

Siccome ε è in nostro arbitrio, possiamo prenderlo in modo che sia

$$\varepsilon < \frac{\eta \mu \delta^2}{8(b-a+2)};$$

ne viene allora

$$\int_a^b f(x, y_n, y'_n) dx - \int_a^b f(x, y_o, y'_o) dx < -\frac{1}{8} \eta \mu \delta^2.$$

La curva C_n potendo prendersi in modo da appartenere ad un intorno prefissato a piacere della C_o , la nostra proposizione è completamente dimostrata.

OSSERVAZIONE. — Si può qui ripetere integralmente l'Osservazione II posta in fine al n° precedente.

57. Ripetendo il ragionamento fatto or ora, con l'avvertenza di sostituire alla disuguaglianza (56) l'altra:

$$\int_{x_{n,r}}^{x'_{n,r}} f(x, y_{n,r}, y'_{n,r}) dx - \int_{x_{n,r}}^{x'_{n,r}} f(x, y_n, y'_n) dx < -\frac{1}{4} \eta l_{n,r} \lambda,$$

che si ottiene procedendo come al n° 34, si giunge alle proposizioni:

a) *Condizione necessaria affinchè su una data curva C_o (n° 40), completamente interna al campo A e per la quale esista ovunque e sempre sia continua la derivata $y'_o(x)$, l'integrale I_C sia funzione semicontinua inferiormente, è che si abbia in ogni punto di C_o*

$$E(x, y_o(x); y'_o(x), y') \geq 0,$$

per tutti i possibili valori di y' .

b) Condizione necessaria affinchè su una data curva C_0 (n. 40), completamente interna al campo A , l'integrale I_C sia funzione semicontinua inferiormente, è che abbia misura nulla l'insieme dei valori di x nei quali non è verificata, per tutti i possibili valori di y' , la disuguaglianza

$$E(x, y_0(x); y'_0(x), y') \geq 0.$$

OSSERVAZIONE. — Vale anche per queste due proposizioni quanto si è detto nell'Osservazione II del n° 55.

Parma, agosto 1919.

LEONIDA TONELLI.