Ueber die Abbildung algebraischer Flächen, insbesondere der vierten und fünften Ordnung.

Von A. CLEBSCH in GÖTTINGEN.

§. 1.

Ueber den Grad der Doppelcurve einer auf einer Ebene abbildbaren Fläche.

Denken wir uns eine Fläche N^{ter} Ordnung, welche die Eigenschaft hat, dass die Coordinaten ihrer Punkte als rationale Functionen dreier Parameter darstellbar sind. Diese Functionen seien von der Ordnung n ; bezeichnen wir die Parameter durch ξ_1, ξ_2, ξ_3 , so ist die Fläche dargestellt durch Gleichungen der Form:

$$\begin{aligned} (1) \quad \varrho x_1 &= f_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ \varrho x_2 &= f_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ \varrho x_3 &= f_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ \varrho x_4 &= f_4(\xi_1, \xi_2, \xi_3); \end{aligned}$$

wobei ϱ ein unbestimmter Factor ist, und die f homogene rationale Functionen n^{ter} Ordnung ihrer Argumente bedeuten. Nehmen wir an, dass aus den Gleichungen (1) sich auch, und zwar dann natürlich auf unendlich viele Arten; die ξ als rationale Functionen der x ausdrücken lassen. . Alsdann kann man die ξ als Coordinaten eines Punktes einer Ebene auffassen; jedem Punkte der Ebene entspricht dann im Allgemeinen ein Punkt der Fläche und umgekehrt, oder, wie ich mich ausdrücken will, die Fläche ist auf der Ebene eindeutig abgebildet. Im Folgenden sollen einige Fälle untersucht werden, in welchen eine solche Abbildung möglich ist.

Schneidet man die Fläche (1) mit der Ebene

$$(2) \quad \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0,$$

so erhält man eine Curve auf der Fläche, deren Abbildung die Gleichung hat:

$$(3) \quad \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 + \alpha_4 f_4 = 0.$$

Indem man den Coefficienten α alle möglichen Werthe beilegt, erhält man aus (3) alle möglichen Abbildungen ebener Schnitte, ein System von Curven n^{ter} Ordnung mit drei linear auftretenden Parametern.

Auf dieses System kann man zunächst einige ähnliche Betrachtungen anwenden, wie *Herr Cremona* (*Mem. dell' Acc. di Bologna ser. 2. tom. 5*) dieselben bezüglich eindeutig sich entsprechender ebener Systeme gemacht hat. Die Curven (3) werden im Allgemeinen gewisse Punkte sämmtlich gemein haben; und zwar seien dies a_1 einfache, a_2 doppelte, a_3 dreifache u. s. w. Punkte, welche allen Curven des Systems, oder, was dasselbe ist, den Curven

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 0, \quad f_4 = 0$$

gemeinsam sind. Und zwar nehme ich zunächst an, dass unter diesen Punkten keine solchen Systeme vorkommen, welche als vollständigen Schnittpunktsystemen angehörig besondern Bedingungen der Lage unterworfen sind.

Zwei der Curven (3) schneiden sich ausser in diesen festen Schnittpunkten noch in

$$n^2 - a_1 - 4a_2 - 9a_3 \dots$$

beweglichen Schnittpunkten. Diese Zahl muss gleich der Anzahl der Punkte sein, in welchen der Schnitt der entsprechenden beiden Ebenen, also eine Gerade, die Oberfläche trifft, also gleich N . Und so hat man die Gleichung:

$$(4) \quad N = n^2 - a_1 - 4a_2 - 9a_3 \dots$$

Eine zweite Gleichung gewinnt man, indem man das Geschlecht p_1 einer Curve (3) und der entsprechenden ebenen Schnittcurve der Oberfläche einander gleich setzt. Ist d der Grad der Doppelcurve der Oberfläche, gleichviel ob diese Curve eine einzige oder eine aus mehreren bestehende ist, und ist r der Grad der Rückkehrcurve, oder die Summe der Grade von solchen, so hat die ebene Schnittcurve d Doppelpunkte und r Rückkehrpunkte, besondere Lagen abgerechnet, wo sie deren mehr hat. Für eine allgemeine Lage der schneidenden Ebene ist also

$$(5) \quad p_1 = \frac{N-1 \cdot N-2}{2} - d - r.$$

Die in der Abbildungsebene liegende entsprechende Curve (3) ist von der Ordnung n , und hat a_2 Doppelpunkte, a_3 dreifache Punkte u. s. w. Besondere Werthe der Parameter abgerechnet, hat man also

$$(6) \quad p_1 = \frac{n-1 \cdot n-2}{2} - a_2 - 3a_3 - 6a_4 \dots$$

Endlich erhält man eine Ungleichung, indem man von der Forderung ausgeht, dass die Functionen f_i sich nicht aus dreien derselben linear zusammensetzen lassen, wie es sein muss, damit wirklich die Gleichungen (1) eine Fläche darstellen. Die in der Annahme der festen Punkte, Doppelpunkte u. s. w. der Abbildung liegenden Bestimmungen müssen daher wenigstens um 4 kleiner sein, als die Anzahl von willkürlichen Constanten, welche eine allgemeine Curve n^{ter} Ordnung mit sich führt. Es muss also sein:

$$(7) \quad 4 \leq \frac{n+1 \cdot n+2}{2} - a_1 - 3a_2 - 6a_3 \dots$$

Aus der Combination der Gleichungen (4) (6) (7) ergibt sich nun sofort die einfache Ungleichung:

$$(8) \quad p_1 \leq N - 2,$$

oder, wenn man aus (5) den Werth von p einführt:

$$(9) \quad d + r \leq \frac{N-2 \cdot N-3}{2}.$$

Hierdurch ist im Allgemeinen eine untere Grenze gegeben, welche die Ordnung der Doppelcurve einer Fläche erreichen muss, damit eine eindeutige Abbildung auf der Ebene denkbar sei. Aber allerdings kann es unter Umständen eintreten, dass gewisse Flächen mit einer Doppelcurve niederen Grades abbildbar werden, indem nämlich der oben gemachten Annahme entgegen, Fundamentalpunkte der Abbildung Schnittpunktsystemen angehören. In einem solchen Falle verringert sich die Anzahl von Bestimmungen, welche die gegebenen Fundamentaltunkte für die Curvenschaar (3) mit sich führen, und es wird, wenn etwa α diese Verringerung angiebt, die Gleichung (7) zu ersetzen sein durch

$$4 \leq \frac{n+1 \cdot n+2}{2} - a_1 - 3a_2 - 6a_3 \dots + \alpha,$$

wodurch zugleich (8) (9) übergehen in:

$$p_1 \leq N - 2 + \alpha, \quad d + r \leq \frac{N-2 \cdot N-3}{2} - \alpha.$$

So führt bei den Flächen 4^{ten} Grades die Gleichung (9) auf die Nothwendigkeit wenigstens einer geraden Doppellinie, bei den Flächen 5^{ten} Grades auf die Nothwendigkeit wenigstens einer Doppelcurve 3^{ter} Ordnung. Aber bei den Flächen 5^{ten} Grades tritt der besondere Umstand ein, dass schon eine Fläche 5^{ter} Ordnung mit einer Doppelcurve 2^{ten} Grades abbildbar wird, wenn diese in zwei sich nicht schneidende Gerade zerfällt.

§. 2.

Geometrische Abbildung der hier zu behandelnden Flächen auf einer Ebene.

Ob eine gegebene Flächenart sich eindeutig auf einer Ebene abbilden lässt, ist häufig einfach zu entscheiden, indem man eine Abbildung wirklich herstellt, unbekümmert darum, ob bei derselben die Functionen f_i möglichst niedern Grades sind oder nicht. So braucht man bei der Abbildung der Flächen 3^{ter} Ordnung nur zwei sich nicht schneidende Geraden der Fläche zu betrachten. Lässt man eine dritte Gerade sich so bewegen, dass sie beide stets trifft, so bestimmt

sie in jeder Lage einen Punkt der Fläche, und einen entsprechenden Punkt einer beliebig gewählten Ebene. Und zwar ist durch einen dieser letztern Punkte die jedesmalige Lage der Geraden vollständig bestimmt, so dass im Allgemeinen zu jedem Punkte der Fläche nur ein Punkt der Ebene und umgekehrt gehört, also eine eindeutige Abbildung eintritt. Ebenso kann man bei den Flächen 4^{ter} Ordnung mit einer zusammenhängenden Doppelcurve zweiten Grades die Möglichkeit der Abbildung sofort einsehen. Nehmen wir irgend eine der 16 Geraden, g , welche, wie ich an einem andern Orte gezeigt habe, den Doppelkegelschnitt treffen, und lassen wir eine Gerade g' sich so bewegen, dass sie stets sowohl jene Gerade g als diesen Kegelschnitt trifft. Die bewegte Gerade g' schneidet dann die Oberfläche nur noch in einem Punkte (A), und schneidet eine beliebig gegebene Ebene in einem Punkte B . Durch das gegenseitige Entsprechen der Punktpaare A, B ist die Fläche auf der Ebene eindeutig abgebildet. Denn ist einer dieser Punkte gegeben, so legt man durch ihn und g eine Ebene; diese schneidet den Doppelkegelschnitt nur noch einmal, und die Verbindungslinie des Schnittpunkts mit dem gegebenen Punkte giebt eindeutig die Gerade g' , also auch eindeutig den andern der beiden Punkte A, B .

Die gleiche Construction kann man auf Flächen vierter Ordnung mit einer Doppelgeraden anwenden, wenn nur zuvor bewiesen wird, wie unten geschehen soll, dass eine gewisse Zahl von Kegelschnitten existirt, welche ganz in der Fläche liegen, und einen Punkt mit der Doppelgeraden gemein haben.

Was die Flächen fünfter Ordnung anbetrifft, so erkennt man bei denjenigen, deren Doppelcurve aus zwei sich nicht schneidenden Geraden besteht, sofort die Ausführbarkeit einer ähnlichen Construction. Denn man braucht nur eine bewegliche Gerade g sich so bewegen lassen, dass sie die beiden Doppelgeraden stets trifft, so schneidet g in jeder Lage die Fläche noch einmal, in A , und eine gegebene Ebene in einem entsprechenden Punkte B . Diese Punkte A und B entsprechen sich eindeutig, weil durch jeden derselben g eindeutig bestimmt ist, und die Fläche ist also auf der Ebene eindeutig abgebildet.

Wenn zweitens die Fläche fünfter Ordnung eine Doppelcurve dritten Grades hat, so kann diese nur eine Raumcurve sein, weil sonst die Ebene derselben die Fläche in einer doppelten Curve dritter Ordnung, also in einer Curve 6^{ter} Ordnung schneiden würde, was unmöglich ist. Die Raumcurve kann in eine Gerade und in einen Kegelschnitt zerfallen, welche sich treffen, oder in drei Gerade, deren zwei die dritte schneiden. In allen diesen Fällen kann man als Projectionsstrahlen der Abbildung die Sehnen der Raumcurve betrachten. Jede

solche Sehne schneidet die Fläche noch in einem Punkte A , eine gegebene Ebene in einem entsprechenden Punkte B . Das Entsprechen aber ist eindeutig; denn durch jeden Punkt des Raumes geht nur eine Sehne der Raumcurve, daher ist, wenn A oder B gegeben vorliegt, g und damit der andere der beiden Punkte A, B eindeutig bestimmt. — Dass die Doppelcurve dritten Grades nicht aus Gerade und Kegelschnitt, welche sich nicht schneiden, oder aus drei sich nicht schneidenden Geraden bestehen kann, ersieht man leicht. Im ersten Falle schneiden alle Geraden, die in der Ebene des Kegelschnitts liegen und zugleich die Doppelgerade treffen, die Fläche in 6 Punkten; daher muss die Fläche in eine Fläche 4^{ter} Ordnung und jene Ebene zerfallen. In dem andern Falle schneiden alle die 3 Geraden treffenden Geraden die Fläche in 6 Punkten und liegen also ganz in ihr; die Fläche zerfällt also in ein Hyperboloid und in eine Fläche dritter Ordnung. Ein Zerfallen der Doppelcurve kann demnach nur so eintreten, dass das Resultat ein specieller Fall der Raumcurve 3^{ter} Ordnung bleibt.

Ich wende mich nun zur Untersuchung der zuletzt genannten drei Flächenarten, und werde zeigen, wie man sie auf die einfachste Art, d. h. mittelst möglichst niedriger Functionen f auf einer Ebene abbildet.

§. 3.

Flächen 4^{ter} Ordnung mit einer Doppelgeraden. Gerade und Kegelschnitte auf denselben.

Bezeichnet man durch $A = 0, B = 0$ zwei Ebenen, welche sich in der Doppelgeraden einer mit einer solchen begabten Fläche vierter Ordnung durchschneiden, so nimmt die Gleichung der Fläche die Form an:

$$(10) \quad A^2w - 2BAv + B^2u = 0,$$

wo u, v, w Ausdrücke zweiter Ordnung sind. Diese Gleichungsform lehrt nach Hrn. Kummer (Monatsber. der Berl. Acad. Sitzung vom 16^{ten} Juli 1863) sofort, dass die Fläche eine Schaar von Kegelschnitten enthält, deren Ebenen sämmtlich durch die Doppelgerade gehen. In der That, wenn man die Gleichung des Ebenenbüschels $A + \lambda B = 0$ mit der Gleichung (10) combinirt, erhält man die Kegelschnittschaar als Durchschnitt des Büschels mit einer Schaar von Flächen zweiter Ordnung, indem für jeden Kegelschnitt und ein entsprechendes λ die Gleichungen zusammenbestehen:

$$(11) \quad A + \lambda B = 0, \quad u + 2\lambda v + \lambda^2 w = 0.$$

Aber die Fläche enthält noch gewisse andere Kegelschnitte, welche aus dreipunktig berührenden Ebenen entspringen, und auf welche man kommt, indem man zunächst gerade Linien auf der Fläche aufsucht.

Unter den Kegelschnitten (11) sind nämlich gewisse, welche in Linienpaare zerfallen. Ein solches Zerfallen tritt immer ein, wenn die Ebene $A + \lambda B = 0$ die entsprechende Fläche zweiter Ordnung berührt. Bezeichnet man durch $A_i, B_i, u_{ik}, v_{ik}, w_{ik}$ die Coefficienten in (11), so ist die Bedingung dafür die folgende:

$$\begin{vmatrix} u_{11} + 2\lambda v_{11} + \lambda^2 w_{11} & u_{21} + 2\lambda v_{21} + \lambda^2 w_{21} & u_{31} + 2\lambda v_{31} + \lambda^2 w_{31} & u_{41} + 2\lambda v_{41} + \lambda^2 w_{41} & A_1 + \lambda B_1 \\ u_1 + 2\lambda v_{12} + \lambda^2 w_{12} & u_{22} + 2\lambda v_{22} + \lambda^2 w_{22} & u_{32} + 2\lambda v_{32} + \lambda^2 w_{32} & u_{42} + 2\lambda v_{42} + \lambda^2 w_{42} & A_2 + \lambda B_2 \\ u_{13} + 2\lambda v_{13} + \lambda^2 w_{13} & u_{23} + 2\lambda v_{23} + \lambda^2 w_{23} & u_{33} + 2\lambda v_{33} + \lambda^2 w_{33} & u_{43} + 2\lambda v_{43} + \lambda^2 w_{43} & A_3 + \lambda B_3 \\ u_{14} + 2\lambda v_{14} + \lambda^2 w_{14} & u_{24} + 2\lambda v_{24} + \lambda^2 w_{24} & u_{34} + 2\lambda v_{34} + \lambda^2 w_{34} & u_{44} + 2\lambda v_{44} + \lambda^2 w_{44} & A_4 + \lambda B_4 \\ A_1 + \lambda B_1 & A_2 + \lambda B_2 & A_3 + \lambda B_3 & A_4 + \lambda B_4 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist eine Gleichung 8^{ten} Grades für λ ; es giebt also auf der Fläche 8 Paare von je zwei sich schneidenden Geraden, welche alle durch die Doppelgerade gehen. Es wird sich weiterhin zeigen, dass diese 16 Geraden die einzigen sind, welche auf der Fläche existiren.

Nehmen wir nun aus 7 der 8 Paare je eine Gerade, und suchen einen Kegelschnitt, welcher diese 7 Geraden und die Doppellinie selbst schneidet. Ich verdanke Hrn. Dr. Lüroth die folgende Ableitung der Modificationen, welche die für beliebig liegende 8 Gerade von ihm in Borchardt's Journal Bd. 68, p. 185 angestellten Betrachtungen bei diesem sehr speciellen Falle, wo 7 Gerade die 8^{te} treffen, erfahren.

Die a. a. O. gemachten Abzählungen lehren, dass die Classe einer Fläche, deren Tangentenebenen sechs gegebene Gerade in Punkten eines Kegelschnittes treffen, nicht grösser als 8, vielmehr im Allgemeinen gleich 8 ist. Nehmen wir als solche 6 Gerade die von den 7 andern (b, c, d, e, f, g, h) geschnittene Gerade (a) und fünf der andern (b, c, d, e, f). In diesem Falle schneidet offenbar jede durch den Schnitt von a mit b, c, d, e oder f gelegte Ebene die 6 Geraden in Punkten eines Kegelschnittes, nämlich in nur 5 Punkten. Daher muss die Fläche 8^{ter} Classe sich in die Gleichungen der fünf Schnittpunkte von a mit b, c, d, e, f auflösen und in eine Fläche 3^{ter} Classe. Andererseits kann man diese Fläche 3^{ter} Classe leicht direct nachweisen. Denn zunächst bestimmen 6 Gerade der gegebenen Art nach dem Principe der Dualität eine Fläche 3^{ter} Classe, welche dieselben enthält, genau analog, wie sie eine sie enthaltende Fläche 3^{ter} Ordnung bestimmen (vgl. Salmon, Geometry of three dimensions, 2. edition, Art. 498). Herr Lüroth aber hat folgenden Satz bemerkt:

Alle Tangentialebenen einer Fläche dritter Classe schneiden eine Gerade der Fläche und fünf solche Gerade, welche jene aber nicht einander schneiden, in 6 Punkten eines Kegelschnittes;

ein Satz, welchem dualistisch folgender entspricht:

Jeder Punkt einer Fläche 3^{ter} Ordnung ist Spitze eines

Kegels 2^{ter} Ordnung, welcher eine gegebene ihrer 27 Geraden und irgend 5 andere ihrer Geraden berührt, welche die erste aber nicht einander treffen.

Den letzteren Satz, welcher den ersten unmittelbar nach sich zieht, beweist man leicht an einer Abbildung der Fläche 3^{ter} Ordnung, welche unter allen die directeste ist, und folgendermassen entsteht. Wählen wir auf der Fläche eine Gerade a , und einen Kegelschnitt C_2 , welcher sie nur einmal, und ebenso je einmal jede der fünf Geraden b, c, d, e, f , die jene schneiden, trifft, was immer möglich ist. Um einen Punkt χ der Fläche abzubilden, zieht man durch ihn die einzige Gerade, welche zugleich a und C_2 trifft. Durch diese und einen beliebig aber fest auf C_2 gewählten Punkt P legt man sodann eine Ebene; sie schneidet die Bildebene in einer Geraden ξ , welche die Abbildung von χ ist. Bei dieser Abbildung entspricht also jedem Punkte χ der Fläche eine Gerade der Bildebene, und die ebenen Schnitte bilden sich als Curven 3^{ter} Classe mit 6 festen Tangenten ab, dualistisch entsprechend der Abbildung durch Curven 3^{ter} Ordnung mit 6 festen Punkten. Von den 6 festen Tangenten sind fünf die Bilder von b, c, d, e, f ; a bildet sich als Kegelschnitt ab, der diese berührt.

Der Punkt P kann durch andere Wahl von C_2 in jeden Punkt der Fläche verlegt werden. Daher genügt es, zu zeigen, dass von ihm aus ein Kegel 2^{ter} Ordnung gelegt werden kann, welcher a, b, c, d, e, f berührt, oder die durch P und diese Geraden gelegten Ebenen zu Tangentenebenen hat. Es ist leicht zu sehen, dass der Kegel, welcher durch das Bild von a geht, diese Eigenschaft hat. Derselbe wird beschrieben bei Abbildung der verschiedenen Punkte von a ; man legt in irgend einem Punkte P' von a die Tangentenebene der Fläche; diese schneidet C_2 in einem Punkte P'' , und die Ebene $PP'P''$ schneidet die Bildebene in einer Tangente des Bildes von a , also in einer Tangentenebene eines Kegels zweiter Ordnung, da dieses Bild ein Kegelschnitt ist. Aber hierbei benutzt man alle durch a gehenden Ebenen, also auch die Ebene von P nach a , und diese ist also Tangentenebene jenes Kegels. Und ebenso benutzt man alle von a durch b, c, d, e, f gelegte Ebenen, welche die Bilder von b, c, d, e, f liefern, indem man durch P und diese Geraden Ebenen legt, welche daher, wie die Abbildung lehrt, den Kegel ebenfalls berühren müssen; w. z. b. w.

Der geometrische Ort der Ebenen, welche a, b, c, d, e, f in Punkten von Kegelschnitten treffen, ohne durch einen ihrer Schnittpunkte zu gehen, ist also eine Fläche 3^{ter} Classe, welche diese 6 Geraden enthält.

Construiren wir nun ebenso die Flächen 3^{ter} Classe, welche a, b, c, d, e, g und a, b, c, d, e, h enthalten. Die gemeinsamen Tangenten-

ebenen aller drei Flächen sind dann die gesuchten Ebenen, welche die 8 Geraden in Punkten eines Kegelschnittes treffen. Aber diese drei Flächen haben 6 tangirende Ebenenbüschel gemeinsam, die nämlich, welche a, b, c, d, e und die zweite b, c, d, e gleichzeitig treffende Gerade a' zu Axen haben. Die Abzählung der Erniedrigung, welche die Anzahl der gemeinsamen Tangentenebenen hierdurch erfährt, berechnet man wie die Verminderung der Anzahl der Schnittpunkte, welche drei Flächen 3^{ter} Ordnung gemein haben, welche sich in einer Curve 6^{ter} Ordnung sämmtlich treffen; und zwar einer Curve 6^{ter} Ordnung, welche nicht auf einer Fläche 2^{ter} Ordnung liegt, und deren Ergänzungscurve also eine Raumcurve 3^{ter} Ordnung ist. Indem man nach Salmon's Raumgeometrie, Fiedler's Uebersetzung, p. 123, verfährt, erhält man als übrig bleibende Zahl von Tangentenebenen 1, und also den Satz:

Es giebt nur einen Kegelschnitt, welcher eine Gerade a , und sieben andere Gerade $b, c \dots h$ gleichzeitig trifft, welche sämmtlich die erste treffen, einander aber nicht.

Kehren wir nun zu der Fläche 4^{ter} Ordnung zurück. Die obige Entwicklung giebt einen Kegelschnitt, welcher die Doppelgerade und je eine Gerade aus 7 der 8 Paare trifft. Dieser Kegelschnitt schneidet also die Fläche 4^{ter} Ordnung, da der Schnittpunkt mit der Doppelgeraden doppelt zu nehmen ist, in 9 Punkten, und liegt daher ganz in der Fläche. Die Ebene des Kegelschnittes aber schneidet die Fläche noch in einem zweiten Kegelschnitt, welcher durch denselben Punkt der Doppelgeraden hindurchgeht. Betrachten wir nun den Schnitt der Ebene dieses Kegelschnittpaares mit der Ebene eines der Geradenpaare. Die Schnittlinie kann die Fläche ausser in der Doppelgeraden nur noch in zwei Punkten schneiden; sie schneidet aber jeden der Kegelschnitte noch einmal, und jede Gerade des Paares einmal. Daher müssen diese letzteren Punktpaare zusammenfallen, und man sieht also, dass jeder dieser Kegelschnitte auch noch eine Gerade des 8^{ten} Paares trifft. Aber während aus 7 Geradenpaaren je eine Gerade beliebig gewählt werden kann, ist sie bei dem 8^{ten} dadurch völlig bestimmt.

Ich fasse diese Resultate in folgenden Satz zusammen:

Es giebt 64 dreifach berührende Ebenen, welche die Fläche in je 2 (also im Ganzen in $2^7 = 128$) Kegelschnitten treffen, wobei denn immer ein Schnittpunkt eines Kegelschnittpaares auf der Doppellinie liegt. Jeder Kegelschnitt trifft je eine Gerade jedes Geradenpaares, der ergänzende immer die andern Geraden; und zwar giebt es immer einen Kegelschnitt, der je eine beliebig gewählte

Gerade aus 7 der Paare trifft, während die Gerade des 8^{ten} Paares dadurch bestimmt ist.

Die unmittelbare Aufsuchung dieser 64 Ebenen würde auf eine Gleichung 64^{ten} Grades führen. Man sieht, wie die Auflösung derselben auf die Auflösung von einer Gleichung 8^{ten} Grades (um die 8 Paare zu finden) und von 7 Gleichungen 2^{ten} Grades (um 7 Paare zu zerlegen) zurückkommt.

§. 4.

Niedrigste Abbildung dieser Flächen und geometrische Deutung derselben.

Die Auffindung der aus den dreifach berührenden Ebenen entspringenden Kegelschnitte führt sofort auf die Abbildung, und zwar auf die einfachste Abbildung der Fläche auf einer Ebene. Die Functionen f_i müssen in diesem Falle wenigstens von der 4^{ten} Ordnung sein; denn Flächen 4^{ter} Ordnung, für welche die f_i von der 3^{ten} Ordnung sind, haben eine Doppelcurve 2^{ten} Grades. Es wird sich im Folgenden zeigen, dass in der That eine Abbildung existirt, bei welcher die f_i vom 4^{ten} Grade sind.

Zu diesem Zwecke bezeichne ich durch $C = 0$ eine der dreipunktig berührenden Ebenen, welche oben gefunden wurden. Da $C = 0$ die Fläche in zwei Kegelschnitten schneidet, so muss mit Hilfe von $C = 0$ sich die Gleichung der Fläche in zwei Factoren 2^{ten} Grades zerfallen lassen, welche aber beide nach dem Obigen für $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ verschwinden müssen, und welche also nach Absonderung der mit C behafteten Terme mit $A = 0$, $B = 0$ verschwinden. Daher wird das Produkt dieser Factoren homogen vom 2^{ten} Grade in A , B gemacht werden können; und da wegen der Doppelgeraden die ganze Flächengleichung homogen vom 2^{ten} Grade in A , B gemacht werden kann, so muss der Rest der Flächengleichung, welcher den Factor C hat, in einem andern Factor ebenfalls homogen vom 2^{ten} Grade in A , B sein. Die Gleichung der Fläche nimmt also folgende Form an:

$$(12) \quad (AB' - BA')(AB'' - BA'') - C(PA^2 - 2NAB + MB^2) = 0,$$

wo A' , B' , A'' , B'' , M , N , P lineare Ausdrücke sind.

Diese Gleichungsform führt ohne Weiteres zu den gesuchten Abbildungen; denn man kann die Gleichung (12) in die Gleichungen auflösen:

$$(13) \quad \begin{aligned} \xi_1 A + \xi_2 B &= 0, \\ \xi_1 A' + \xi_2 B' + \xi_3 C &= 0, \\ \xi_3 (A'' \xi_1 + B'' \xi_2) + (M \xi_1^2 + 2 \xi_1 \xi_2 N + \xi_2^2 P) &= 0, \end{aligned}$$

welche für die x linear sind, und in welchen die Verhältnisse der ξ die Stelle von zwei Parametern vertreten. Indem man die Verhält-

nisse der x aus diesen Gleichungen berechnet, findet man die x proportional mit Functionen 4^{ter} Ordnung der ξ , wie es sein sollte.

Solcher Abbildungen giebt es 128, deren je zwei conjugirt sind. Denn die Form (12) lässt sich auf 64 Arten herstellen; aus der Form (12) aber kann man ausser den Gleichungen (13) noch andere, ganz ähnliche, ableiten, in denen nur A' , B' mit A'' , B'' vertauscht erscheinen, oder, was dasselbe ist, in welcher die beiden in der dreifach berührenden Ebene enthaltenen Kegelschnitte gerade umgekehrt benutzt sind, wie in (13). Sehen wir nun, wie sich die in (13) enthaltene Abbildung gestaltet.

Die Gleichungen (13) hängen genau mit der Abbildung zusammen, von welcher in §. 2 gesprochen wurde. Denn die ersten beiden Gleichungen (13) stellen für constante ξ , also für die Abbildung eines bestimmten Punktes der Fläche, zusammen eine Gerade dar, welche durch diesen Punkt geht. Aber diese Gerade geht ausserdem erstens durch die Doppelgerade, da für $A = 0$, $B = 0$ die eine jener Gleichungen identisch erfüllt ist; zweitens durch den Kegelschnitt, dessen Gleichungen sind:

$$(14) \quad C = 0, \quad AB' - BA' = 0,$$

da für $C = 0$ jene Gleichungen nach Elimination von ξ_1 , ξ_2 die zweite dieser Gleichungen liefern. Die ersten beiden Gleichungen (13) führen also in der That auf den oben benutzten Projectionsstrahl, und die dritte Gleichung dient nur dazu, die Lage des Punktes der Fläche auf diesem Projectionsstrahle zu fixiren. Aber die Grössen ξ sind keineswegs die Coordinaten des Punktes, welchen der Projectionsstrahl auf einer gegebenen Ebene trifft. Vielmehr kann man diese Grössen auf eine ganz andere Art unmittelbar geometrisch deuten.

Die zweite Gleichung (13) kann man, wenn in derselben ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 als Parameter betrachtet werden, als Gleichung eines Ebenenbündels ansehen, welches den Punkt $A' = 0$, $B' = 0$, $C = 0$ zum Scheitel hat. Nach den Gleichungen (14) ist dieses ein Punkt des Kegelschnittes (14) selbst, also des einen Kegelschnittes in der doppelt berührenden Ebene. Und zwar ist es ein beliebiger Punkt P dieses Kegelschnittes. Denn da die Functionen A' , B' nur aus der Gleichung der Fläche (12) bestimmt werden, so sind sie keineswegs absolut bestimmt, sondern man kann sie noch dadurch modificiren, dass man an Stelle von A' , B' die Ausdrücke $A' + mA$, $B' + mB$ setzt, in denen m eine Constante bedeutet. Benutzt man aber diese Ausdrücke an Stelle von A' , B' , so wird der Scheitel des Bündels durch die Gleichungen dargestellt:

$$C = 0, \quad A' + mA = 0, \quad B' + mB = 0,$$

welche einen beliebigen Punkt des Kegelschnittes bezeichnen.

Nehmen wir also an, man hätte A', B' in bestimmter Weise gewählt, und den Scheitel des Bündels demnach vollständig gegeben. Da nun jedem Punkte der Fläche ein Projectionsstrahl entspricht, und durch diesen wiederum nur eine Ebene (im Allgemeinen) des Bündels geht, so kann man als Bild des Punktes die Gerade ansehen, in welcher die Ebene des Bündels eine gegebene feste Ebene schneidet. Auf der festen Ebene entsteht dann das Bild der Fläche, wobei allerdings jedem Punkte der Fläche eine Gerade entspricht, und welches man dualistisch übertragen muss, um zu der Abbildung zu gelangen, in welcher jedem Punkte ein Punkt entspricht.

Ich behaupte nun, dass ξ_1, ξ_2, ξ_3 die Coordinaten der dem Punkte x entsprechenden Geraden in dieser beliebig gegebenen festen Ebene sind. Hierbei lege ich als Definition von Coordinaten eines Punktes und einer Geraden im Dreieckcoordinatensystem folgende Definitionen zu Grunde, welche ich in meinen Vorlesungen zu geben pflege, und welche, von den üblichen leicht abweichend, sich in vielen Beziehungen empfehlen:

Coordinaten eines Punktes in der Ebene sind drei Zahlen, welche sich zu einander verhalten, wie die Abstände des Punktes von den Seiten des Coordinatendreiecks, multiplicirt mit drei beliebig gewählten Constanten;

Coordinaten einer Geraden in der Ebene sind drei Zahlen, welche sich zu einander verhalten, wie die Abstände der Geraden von den Ecken des Dreiecks, multiplicirt mit drei beliebig gewählten Constanten.

Die Constanten, welche in der einen Definition vorkommen, sind von der in der andern auftretenden abhängig; man bestimmt sie so, dass, wenn x_1, x_2, x_3 die Coordinaten eines Punktes, u_1, u_2, u_3 die einer Geraden sind, die Bedingung, dass der Punkt auf der Linie liege, durch die Gleichung

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

ausgedrückt wird. Aehnliche Definitionen nehme ich in Bezug auf das Coordinatentetraeder im Raume an.

Wenn man nun in dem Ausdrucke $\frac{\xi_1 A' + \xi_2 B' + \xi_3 C}{N}$, welcher, gleich Null gesetzt, eine beliebige Ebene des Bündels repräsentirt, und in welchem $N = 0$ die Gleichung der unendlich fernen Ebene bedeutet, die Coordinaten irgend welcher Punkte im Raume einsetzt, so erhält man Zahlen, welche sich zu einander verhalten, wie die Abstände dieser Punkte von der Ebene des Bündels. Als solche Punkte wähle ich nun die Ecken des Dreiecks, in welchem die Ebenen $A' = 0, B' = 0, C = 0$, die Grundebenen des Bündels, die beliebig für die

Abbildung gegebene Ebene schneiden. Für jede dieser Ecken verschwinden zwei der Ausdrücke A', B', C , während der Quotient des dritten durch N einen constanten Werth annimmt. Man erhält daher aus dem obigen Ausdrucke der Reihe nach die ξ , multiplicirt mit Constanten. Die Grössen ξ verhalten sich also wie die Abstände der Ecken des durch A', B', C auf der Abbildungsebene bestimmten Dreiecks von der beweglichen Ebene des Bündels, deren Parameter die ξ sind. Und diese Abstände verhalten sich offenbar wieder, wie die Abstände der Dreiecksecken von der Geraden, in welcher die Abbildungsebene von der Ebene des Bündels geschnitten wird. Die Grössen ξ sind also die Coordinaten dieser Schnittlinie in Bezug auf das durch die Grundebenen des Büschels gegebene Dreieck.

§. 5.

Eigenschaften der entwickelten Abbildung.

Sehen wir jetzt, welchen Charakter die Abbildung hat. Da die x Functionen 4^{ter} Ordnung der ξ proportional werden, so führt die Gleichung einer Ebene auf eine Gleichung 4^{ter} Ordnung in den ξ , oder jeder ebene Schnitt wird durch eine Curve 4^{ter} Classe abgebildet.

Das System von Curven 4^{ter} Classe, welches so das System ebener Schnittcurven abbildet, hat 8 feste einfache, und eine feste Doppeltangente, und ist dadurch vollständig definirt. Das letztere ist sofort klar, wenn man erwägt, dass die allgemeine Curve 4^{ter} Classe 15 willkürliche Constanten homogen enthält. Die 8 einfachen und die Doppeltangente führen 11 lineare Bedingungen für diese Constanten mit sich; es bleiben also nur 4 übrig, d. h. so viel, als das System nothwendig enthalten muss.

Eine feste einfache Tangente erhält man jedesmal für den Durchschnittpunkt des abzubildenden Schnittes mit einer der 8 Geraden, welche den Kegelschnitt (14) treffen. Denn da eine solche Gerade sowohl die Doppelgerade als den Kegelschnitt trifft, so wird sie Projectionsstrahl für jeden ihrer Punkte; nehmen wir von dem Scheitel des Ebenenbündels nur an, dass er nicht auf einer dieser Geraden liege, so giebt also unsere Construction, auf jeden Punkt einer solchen Geraden angewandt, in der Abbildung immer dasselbe, nämlich die Schnittlinie der Abbildungsebene mit der durch die Gerade gehenden Ebene des Bündels. So entstehen also 8 Gerade in der Abbildung, welche nicht Punkten, sondern wieder Geraden entsprechen, und welche Tangenten an die Abbildung jedes ebenen Schnittes sind, weil jeder ebene Schnitt einen Punkt mit jeder der entsprechenden Geraden im Raume gemein hat.

Dagegen wird man auf eine feste Doppeltangente geführt durch Betrachtung des Kegelschnittes, welcher sich mit dem Kegelschnitt (14) zu einem ebenen Schnitte ergänzt. Wenden wir unsere Construction auf einen Punkt dieses durch die Gleichungen

$$(15) \quad C = 0, \quad AB'' - BA'' = 0$$

dargestellten Kegelschnitts an, so sehen wir, dass der Projectionsstrahl ganz in die Ebene $C = 0$ fallen muss. Er ist also die Verbindungslinie eines Punktes in dem Kegelschnitte (15) mit demjenigen Punkte, in welchem die Doppelgerade von der Ebene $C = 0$ des Kegelschnittes getroffen wird. Und da der Scheitel des Ebenenbündels in eben dieser Ebene liegt, so wird es immer die Ebene $C = 0$ selbst sein, welche als projectirende Ebene auftritt, und jedem Punkte des Kegelschnittes (15) entspricht also dieselbe Gerade, der Durchschnitt von $C = 0$ mit der Bildebene. Aber jeder ebene Schnitt der Fläche hat mit dem Kegelschnitt (15) zwei Punkte gemeinsam. Daher ist jene feste Gerade zweimal Tangente der Bildcurve des ebenen Schnittes, und alle solche Curven haben sie zur festen Doppeltangente.

Obgleich diese Art der Abbildung auf solche Weise geometrisch entstanden ist, so werde ich doch im Folgenden der Bequemlichkeit wegen nicht sie, sondern ihre dualistische Uebertragung gebrauchen. In dieser also bildet sich jeder ebene Schnitt als Curve 4^{ter} Ordnung ab; und zwar bilden alle diese Abbildungscurven das vollständige System von Curven 4^{ter} Ordnung, welches einen festen Doppelpunkt und 8 feste einfache Punkte gemein hat.

Man kann darauf aufmerksam machen, dass die 9 Punkte, welche hier als Fundamentalpunkte der Abbildung erscheinen, nicht die Schnittpunkte zweier Curven 3^{ter} Ordnung sein können. In der That, wäre dies der Fall, und wären $u = 0$, $v = 0$ zwei solche Curven 3^{ter} Ordnung, so müsste die Abbildung jedes ebenen Schnittes die Form haben

$$Mu + Nv = 0,$$

wo M , N lineare Ausdrücke wären. Da nun in einem der Schnittpunkte von $u = 0$, $v = 0$ diese Curven einen festen Doppelpunkt haben sollen, so müssten M , N für diesen Punkt ebenfalls verschwinden, oder, wenn $P = 0$, $Q = 0$ zwei durch diesen Punkt gehende Gerade wären, müsste die allgemeine Form der Gleichung für die Abbildung eines ebenen Schnittes diese sein:

$$(\alpha_1 P + \alpha_2 Q) u + (\alpha_3 P + \alpha_4 Q) v = 0.$$

Man könnte also setzen, um die Coordinaten eines Punktes der Fläche auszudrücken:

$$\varrho x_1 = Pu, \quad \varrho x_2 = Qu, \quad \varrho x_3 = Pv, \quad \varrho x_4 = Qv,$$

und man erhielte $x_1 x_4 - x_2 x_3 = 0$, was die Gleichung einer Fläche 2^{ter} Ordnung wäre.

Ausserdem werde ich im Folgenden diejenigen Besonderheiten ausschliessen, welche eintreten, wenn von den 9 Fundamentalpunkten der Abbildung drei auf einer Geraden oder 6 auf einem Kegelschnitte liegen.

Im Vorbeigehen bemerke ich, dass die hier entwickelte Abbildung ganz ebenso bei den Flächen 3^{ter} Ordnung eintritt, wo nur an Stelle der Doppelgeraden eine einfache zu setzen ist (vgl. p. 259).

§. 6.

Allgemeines über Flächen, welche auf einer Ebene abbildbar sind. Vollständige Durchschnitte.

Gehen wir jetzt von der Abbildung aus, um die auf der Fläche liegenden krummen Linien zu untersuchen. Ich will, ehe ich zu den Anwendungen der hier in Rede stehenden Abbildung übergehe, die nöthigsten allgemeinen Principien entwickeln. Es seien

$$(16) \quad \varphi x_1 = f_1, \quad \varphi x_2 = f_2, \quad \varphi x_3 = f_3, \quad \varphi x_4 = f_4,$$

wie in (1) die Gleichungen einer Oberfläche, die f seien vom Grade n ; die Curven $f_i = 0$, also auch das System der Abbildungen ebener Schnitte

$$(17) \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0$$

mögen a_1 einfache, a_2 doppelte u. s. w. Punkte gemein haben. Zunächst hat man dann den Satz:

Ein r facher gemeinsamer Schnittpunkt der Curven (17) (Fundamentalpunkt der Abbildung) stellt eine auf der Fläche liegende Curve r ^{ter} Ordnung dar, welche die Eigenschaft hat, ihre Coordinaten als rationale Functionen eines Parameters ausdrücken zu lassen.

In der That braucht man nur die Form der Grenze zu untersuchen, welche die Gleichungen (16) annehmen, wenn man die ξ sich einem r fachen Fundamentalpunkte nähern lässt. Zu diesem Ende kann man eines der ξ , etwa ξ_3 , constant lassen, dagegen ξ_1 durch $\xi_1 + \varepsilon \lambda$, ξ_2 durch $\xi_2 + \varepsilon \lambda$ ersetzen; sind dann ξ_1, ξ_2, ξ_3 die Coordinaten des Fundamentalpunktes, und ordnet man nach den Potenzen von ε , um diese Grösse schliesslich gegen Null convergiren zu lassen, so verschwinden rechts in (16) alle Glieder bis zu ε^r , und indem man diesen Factor in φ eingehen lässt, dann aber ε gleich Null setzt, erhält man:

$$(17^a) \quad \varphi x_i = \frac{\partial^r f_i}{\partial \xi_1^r} x^r + r \cdot \frac{\partial^r f_i}{\partial \xi_1^{r-1} \partial \xi_2} x^{r-1} \lambda \dots + \frac{\partial^r f_i}{\partial \xi_2^r} \lambda^r,$$

also die ξ als rationale Functionen r^{ter} Ordnung von $\frac{\lambda}{\kappa}$, was zu beweisen war.

Dass, wenn zwei Curven in der Abbildung sich in einem Fundamentalpunkte schneiden, daraus kein Schnitt der entsprechenden Curven auf der Fläche folgt, ist schon oben benutzt. Haben wir also eine Curve m^{ter} Ordnung in der Abbildung, und untersuchen wir die entsprechende Curve M^{ter} Ordnung im Raume, so finden wir zunächst ihre Ordnung M , wenn wir die Anzahl der beweglichen Schnittpunkte der Abbildungcurve mit der Abbildung eines ebenen Schnittes bestimmen. Die Curve m^{ter} Ordnung gehe $\alpha_1, \alpha_2 \dots$ mal durch die einfachen, $\beta_1, \beta_2 \dots$ mal durch die doppelten Fundamentalpunkte u. s. w. Dann ist hiernach:

$$(18) \quad M = nm - \Sigma \alpha - 2 \Sigma \beta - 3 \Sigma \gamma \dots$$

Hat die Curve m^{ter} Ordnung ausserdem noch d Doppelpunkte und r Rückkehrpunkte, so ist ihr Geschlecht, welches mit dem der Raumcurve übereinstimmen muss:

$$(19) \quad p = \frac{m-1 \cdot m-2}{2} - d - r - \sum \frac{\alpha \cdot \alpha - 1}{2} - \sum \frac{\beta \cdot \beta - 1}{2} - \sum \frac{\gamma \cdot \gamma - 1}{2} \dots$$

Zwischen den Zahlen $m, \beta, \gamma \dots$ besteht, wenn die Fundamentalpunkte keinen Schnittpunktsystemen angehören (§. 1), noch immer die Bedingung, dass die durch sie geforderten Bedingungsgleichungen für die Coefficienten der ebenen Curve an Zahl nicht grösser seien, als die Anzahl der Coefficienten selbst, weniger 1, also:

$$(20) \quad 1 \leq \frac{m+1 \cdot m+2}{2} - \sum \frac{\alpha \cdot \alpha + 1}{2} - \sum \frac{\beta \cdot \beta + 1}{2} - \sum \frac{\gamma \cdot \gamma + 1}{2} \dots - 3d - 4r.$$

Hat, wie ich annehmen will, die Fläche keine Rückkehrcurve, so können in der Raumcurve im Allgemeinen keine Rückkehrpunkte enthalten sein, die nicht auch in der Abbildung solche wären. Die Anzahl der Rückkehrpunkte der Raumcurve ist dann also:

$$(21) \quad B = r.$$

Und aus (18) (19) (20) folgt sofort mit Hilfe der Gleichungen, welche ich in Crelle's Journal Bd. 67, p. 8 gegeben habe,*) für $\text{Rang}(R)$ und Classe (K) der Curve, so wie für die Zahl A ihrer 4punktig berührenden Ebenen:

$$(22) \quad \begin{aligned} R &= m(m-3+2n) - 2d - 3r - \Sigma \alpha(\alpha+1) - \Sigma \beta(\beta+3) - \Sigma \gamma(\gamma+5) \dots \\ K &= 3m(m-3+n) - 6d - 8r - 3 \Sigma \alpha^2 - 3 \Sigma \beta(\beta+1) - 3 \Sigma \gamma(\gamma+2) \dots \\ A &= 2m(3m+2n-9) - 12d - 15r - 2 \Sigma \alpha(3\alpha-1) - 2 \Sigma \beta(3\beta+1) \\ &\quad - 2 \Sigma \gamma(3\gamma+3) \dots \end{aligned}$$

*) $R = 2p - 2 + 2M - B$
 $K = 2p - 2 + 2R - M$
 $A = 2p - 2 + 2K - R.$

Diese Formeln gehen in eine sehr merkwürdige und einfache Form über, wenn man sie auf den vollständigen, nicht zerfallenden Durchschnitt der gegebenen Fläche mit einer beliebigen Fläche L^{ter} Ordnung anwendet. In diesem Falle ist die Ordnung der Schnittcurve

$$(23) \quad M = LN.$$

Die Gleichung der Abbildungscurve erhält man, indem man in die Gleichung der Fläche L^{ter} Ordnung für die Coordinaten die Functionen f_i einsetzt. Dieselbe ist also von der Ln^{ten} Ordnung, oder es ist $m = Ln$. Ferner wird jede durch einen einfachen Fundamentalpunkt dargestellte Gerade von der Fläche L^{ter} Ordnung in L Punkten geschnitten; daher muss in der Abbildung von dem Bilde der Schnittcurve jeder einfache Fundamentalpunkt L mal getroffen werden, oder jeder solche Fundamentalpunkt muss ein L facher Punkt der Bildeurve sein. Jeder doppelte Fundamentalpunkt repräsentirt einen Kegelschnitt, welcher von der Fläche L^{ter} Ordnung in $2L$ Punkten geschnitten wird. Durch jeden solchen Punkt muss also die Bildeurve $2L$ mal gehen, u. s. w. Man sieht also, dass alle α gleich L , alle β gleich $2L$, alle γ gleich $3L$ zu setzen sind, u. s. w. Endlich mögen sich die Fläche L^{ter} Ordnung und die Fläche N^{ter} Ordnung in d Punkten so berühren, dass im Berührungspunkte ein Doppelpunkt der Schnittcurve entsteht, und in r Punkten so, dass im Berührungspunkte ein Rückkehrpunkt erscheint. Dann verwandelt sich also die Gleichung (19) in folgende:

$$(24) \quad p = \frac{Ln-1 \cdot Ln-2}{2} - d - r - a_1 \frac{L \cdot L-1}{2} - a_2 \frac{2L \cdot 2L-1}{2} - a_3 \frac{3L \cdot 3L-1}{2} \dots$$

$$= \frac{Ln-1 \cdot Ln-2}{2} - d - r - \frac{L^2}{2} (a_1 + 4a_2 + 9a_3 \dots) + \frac{L}{2} (a_1 + 2a_2 + 3a_3 \dots).$$

Nun kann man die beiden Summen

$$a_1 + 4a_2 + 9a_3 \dots, \quad a_1 + 2a_2 + 3a_3 \dots$$

durch die Ordnung N der gegebenen Fläche und durch das Geschlecht p_1 ihrer ebenen Schnittcurven ausdrücken. Es wird nämlich nach (4) (6):

$$(25) \quad a_1 + 4a_2 + 9a_3 \dots = n^2 - N$$

$$a_2 + 3a_3 + 6a_4 \dots = \frac{n-1 \cdot n-2}{2} - p_1,$$

daher auch, wenn man das Doppelte der zweiten Gleichung von der ersten abzieht:

$$(26) \quad a_1 + 2a_2 + 3a_3 \dots = 3n - 2 - N + 2p_1.$$

Mit Hilfe der Gleichungen (25) (26) aber verwandelt sich (24) in:

$$(26^a) \quad p = Lp_1 + \frac{(LN-2)(L-1)}{2} - d - r.$$

Aus dieser Gleichung ist die Zahl n , die Ordnung der abbildenden Functionen f_i ganz verschwunden, und dasselbe gilt also auch von den aus p gebildeten Zahlen R, K, A . Die Singularitäten des vollständigen Durchschnitts hängen also nur von der Ordnung der beiden Flächen, von der Zahl ihrer Berührung, und dem Geschlecht p_1 des ebenen Schnittes der gegebenen Fläche ab. Und zwar findet man sofort:

$$\begin{aligned} R &= L^2 N + L(N + 2p_1 - 2) - 2d - 3r \\ (27) \quad K &= 3L^2 N + 6L(p_1 - 1) - 6d - 8r \\ A &= 6L^2 N + L(12(p_1 - 1) - 2N) - 12d - 15r. \end{aligned}$$

Unter den Fällen, wo die Schnittcurve zerfällt, hebe ich nur einen hervor, welcher von besonderem Interesse ist. Wenn nämlich die vollständige Schnittcurve eine derjenigen Curven enthält, welche durch Fundamentalpunkte abgebildet werden, etwa die einem r -fachen Fundamentalpunkte entsprechende, so ist der Rest des vollständigen Durchschnittes von der Ordnung $LN - r$. Trotzdem entsteht dieser Rest in der Abbildung noch immer, indem man die Functionen f_i statt der x in die Gleichung der Fläche L^{ter} Ordnung einsetzt. Die Erniedrigung des Grades der Raumcurve kann also nur dadurch entstehen, dass die Abbildung öfters, als im Allgemeinen bei der Abbildung des vollständigen Durchschnittes geschieht, durch einen oder mehrere der Fundamentalpunkte geht. Nun sieht man aber sogleich folgenden Satz ein:

Wenn die Abbildung des vollständigen Durchschnittes der gegebenen Fläche mit einer Fläche L^{ter} Ordnung durch einen r -fachen Fundamentalpunkt $(rL + 1)$ mal hindurch geht, so besteht der vollständige Durchschnitt nicht nur aus der entsprechenden Raumcurve, sondern auch aus der durch den Fundamentalpunkt selbst dargestellten Raumcurve r^{ter} Ordnung.

In der That sah man bei Ableitung der Gleichung (17^a), dass jeder Fortschreitungsrichtung, in welcher man sich in der Bildebene von einem r -fachen Fundamentalpunkte aus bewegen konnte, ein Punkt α, λ der durch den Fundamentalpunkt dargestellten Curve entspricht. Die in dem eben ausgesprochenen Satze aufgestellte Bedingung sagt also aus, dass die Curve r^{ter} Ordnung von der Fläche L^{ter} Ordnung in $rL + 1$ Punkten geschnitten werde, also der Fläche L^{ter} Ordnung ganz angehört. Diese Curve ist also ein Bestandtheil des vollständigen Durchschnittes der Fläche L^{ter} Ordnung mit der gegebenen Fläche. In Verbindung mit dem Vorhergehenden folgt nun aber auch umgekehrt; dass nur bei dem in Rede stehenden Falle die durch den Fundamentalpunkt dargestellte Curve aus dem vollständigen Durchschnitt ausgeschiedet.

§. 7.

Allgemeines. Die Abbildung der Doppelcurve.

Die Doppelcurve der Fläche N^{ter} Ordnung ist dadurch charakterisirt, dass jeder ihrer Punkte durch zwei Punkte der Abbildung dargestellt wird; so dass also die Abbildung der Doppelcurve dem Geschlechte nach mit ihr selbst nicht übereinstimmt. Sind ξ, η zwei Punkte der Abbildung, welche sich zu einem Punkte der Doppelcurve vereinigen; so hat man die nothwendigen und hinreichenden Gleichungen:

$$(28) \quad \begin{aligned} f_1(\xi) &= f_1(\eta) \\ f_2(\xi) &= f_2(\eta) \\ f_3(\xi) &= f_3(\eta) \\ f_4(\xi) &= f_4(\eta). \end{aligned}$$

In diesen Gleichungen ist unter den Functionszeichen der Kürze wegen immer nur ein Buchstabe geschrieben, an Stelle der drei entsprechenden Coordinaten.

Um aus diesen Gleichungen die Gleichung der Abbildung der Doppelcurve zu erhalten, eliminirt man die η . Und zwar kann man dies auf folgende Art ausgeführt denken. Aus den Gleichungen

$$(29) \quad x_i = f_i(\eta)$$

erhält man durch Elimination der η die Gleichung der Fläche N^{ter} Ordnung selbst:

$$(30) \quad F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0.$$

Wollte man nun, um von der Resultante der Gleichungen (29) zu der Resultante der Gleichungen (28) überzugehen, in (30) an Stelle der x_i die Grössen $f_i(\xi)$ setzen, so würde identisch Null entstehen, weil diese Functionen, für die x gesetzt, die Gleichung der Oberfläche für alle Werthsysteme der ξ befriedigen. Man muss daher in (30) für die x_i die Ausdrücke

$$(31) \quad x_i = f_i(\xi) + \varepsilon \cdot z_i$$

setzen, wo die z beliebige Grössen sind, und dann ε gegen Null convergiren lassen. Durch Eintragung der Werthe (31) in (30) erhält man aber einen Ausdruck, dessen erstes Glied bei einer Entwicklung nach Potenzen von ε verschwindet. Daher dividirt man durch ε , setzt sodann ε gleich Null, und erhält:

$$(32) \quad \Omega = 0 = z_1 F'(x_1) + z_2 F'(x_2) + z_3 F'(x_3) + z_4 F'(x_4),$$

in welcher Gleichung jetzt die x_i durch die $f_i(\xi)$ ersetzt werden können. Der so entstehende Ausdruck muss in zwei Factoren zerfallen; in die Gleichung der gesuchten Abbildung, und in einen von den willkürlichen Grössen z abhängigen überflüssigen Factor. Um diesen zu

ermitteln, geht man auf die Gleichungen zurück, in welche die Gleichungen (29) durch Einführung der Werthe (31) übergehen. Diese Gleichungen werden:

$$(33) \quad f_i(\eta) = f_i(\xi) + \varepsilon z_i.$$

Diese Gleichungen werden erfüllt, wenn man die η den ξ gleich setzt, vermehrt um die Grössen von der Ordnung ε , also wenn man setzt:

$$(34) \quad \eta_i = \xi_i + \varepsilon \xi_i.$$

Indem man diese Werthe einführt, durch ε dividirt, und dann ε gleich Null setzt, erhält man:

$$(35) \quad \frac{\partial f_i(\xi)}{\partial \xi_1} \xi_1 + \frac{\partial f_i(\xi)}{\partial \xi_2} \xi_2 + \frac{\partial f_i(\xi)}{\partial \xi_3} \xi_3 = z_i.$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen die ξ , so erhält man die Gleichung

$$(36) \quad \Theta = 0 = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1(\xi)}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_1(\xi)}{\partial \xi_2} & \frac{\partial f_1(\xi)}{\partial \xi_3} & z_1 \\ \frac{\partial f_2(\xi)}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_2(\xi)}{\partial \xi_2} & \frac{\partial f_2(\xi)}{\partial \xi_3} & z_2 \\ \frac{\partial f_3(\xi)}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_3(\xi)}{\partial \xi_2} & \frac{\partial f_3(\xi)}{\partial \xi_3} & z_3 \\ \frac{\partial f_4(\xi)}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_4(\xi)}{\partial \xi_2} & \frac{\partial f_4(\xi)}{\partial \xi_3} & z_4 \end{vmatrix},$$

welche linear in den z ist. Da im Allgemeinen die Coefficienten der z keinen gemeinschaftlichen Factor besitzen (dasselbe tritt beim Vorhandensein von Rückkehrcurven ein, welche ich ausschloss, oder wenn drei der Functionen f_i einen gemeinsamen Factor besitzen, so dass ein Punkt der Fläche als Curve abgebildet wird), so muss Θ ein Factor von Ω sein, und indem die z aus dem Quotienten ausscheiden, wird die Gleichung der Abbildung der Doppelcurve:

$$(37) \quad \frac{\Omega}{\Theta} = 0.$$

Da nun Ω von der Ordnung $(N-1)n$ in den ξ , Θ von der Ordnung $3(n-1)$ ist, so wird die Abbildung der Doppelcurve von der Ordnung $(N-4)n+3$.

Untersuchen wir jetzt, wie oft die Abbildung der Doppelcurve durch die verschiedenen Fundamentalpunkte hindurchgeht. Da jede der Curven $f_i = 0$ einen r -fachen Fundamentalpunkt zum r -fachen Punkte hat, so hat die Curve $\Omega = 0$ einen solchen zum $(N-1)r$ -fachen Punkt. Aber die aus je drei f_i gebildete Jacobi'sche Curve hat denselben (vgl. Cremona, sulla trasformazioni geometriche delle curve piane, Nota 2^a, Bd. 5, Ser. 2 der Abhandlungen der Akademie von Bologna) zum $3r-1$ -fachen Punkte, die Curve $\frac{\Omega}{\Theta}$ also zum $(N-4)r+1$ -fachen. Und man hat also den Satz:

Die Abbildung der Doppelcurve geht durch einen n -fachen Fundamentalpunkt $(N-4)r+1$ mal.

Für das Geschlecht p' der Doppelcurve ergibt sich hieraus, wenn man voraussetzt, dass die Curve nicht zerfällt, und dass keine weiteren Doppel- und Rückkehrpunkte eintreten, welche übrigens dann auch in der Raumcurve solche wären, und demnach einfach in Abzug zu bringen wären:

$$p' = \frac{(N-4)n+1 \cdot (N-4)n+2}{2} - \sum a_r \frac{(N-4)r+1 \cdot (N-4)r}{2},$$

oder, wenn man die Gleichungen (25) (26) zu Hilfe nimmt:

$$p' = \frac{N^2-4N+2 \cdot N-3}{2} - (N-4)p_1,$$

oder wenn $g = \frac{N-1 \cdot N-2}{2} - p_1$ die Ordnung der Doppelcurve ist, $p' = (N-4)g+1$, was von der Ordnungszahl n der Abbildungsfunktionen und von den Fundamentalpunkten ganz unabhängig ist.

Das Geschlecht der Abbildung der Doppelcurve ist also das nämliche für eine gegebene Fläche, wie auch die Abbildung geschehen mag. Dies Resultat war vorausszusehen. Denn zwei verschiedene Abbildungsarten derselben Fläche auf einer Ebene geben zwei ebene Systeme, welche sich, bis auf die Punkte der Doppelcurve, eindeutig entsprechen. Solche Systeme gehören also zu denen, welche Hr. Cremona a. a. O. betrachtet hat. In diesen aber giebt es niemals Ausnahmscurven, sondern nur Ausnahmepunkte. Daher müssen auch die beiden Abbildungen der Doppelcurve einander Punkt für Punkt entsprechen, d. h. beide müssen dasselbe Geschlecht haben, was zu beweisen war. — Beiläufig folgt aus dieser Betrachtung, dass alle Abbildungen einer Fläche aus einer derselben durch Cremona'sche Transformationen abgeleitet werden können.

Verbindet man je zwei aus demselben Punkte der Doppelcurve entspringende Punkte ihrer Abbildung durch eine Gerade, so umhüllen diese eine Curve, deren Tangenten den Punkten der Doppelcurve eindeutig entsprechen, und deren Geschlecht daher dem der Doppelcurve selbst gleich ist.

Man sieht daraus, dass die Abbildung der Doppelcurve ausser den oben angeführten Doppelpunkten noch gewisse Specialitäten besitzt, welche sie von anderen Curven mit gleichem Grade und Geschlecht unterscheiden. Sind nämlich die Coordinaten eines Punktes der Doppelcurve durch Ausdrücke der Form

$$\varphi x_i = \varphi_i(\lambda, \mu)$$

gegeben, wo zwischen den Parametern λ, μ eine algebraische Gleichung

$$\psi(\lambda, \mu) = 0$$

stattfindet, so müssen die Coordinaten einer Geraden in der Abbildung, welche die beiden einem Punkte der Doppelcurve entsprechenden Punkte verbindet, sich ähnlich darstellen; die Coordinaten eines Punktes der Abbildung der Doppelcurve müssen also die Form annehmen:

$$\varrho \xi_i = \chi_i(\lambda, \mu) + \vartheta_i(\lambda, \mu) \sqrt{\Omega(\lambda, \mu)},$$

wo χ_i , ϑ_i , Ω rationale Functionen ihrer Argumente sind. Ist also insbesondere für die Doppelcurve $p = 0$, und kann man also μ durch λ rational ausdrücken, so führt die Abbildung der Doppelcurve niemals auf allgemeine Abel'sche, sondern immer auf hyperelliptische Functionen.

§. 8.

Flächen 4^{ter} Ordnung mit einer Doppelgeraden. Vollständige Discussion ihrer Geraden und Kegelschnitte.

Indem ich mich nunmehr zur Betrachtung der Fläche 4^{ter} Ordnung mit einer Doppelgeraden zurückwende, will ich zunächst eine für die weitere Discussion wichtige Ungleichung ableiten, welche gilt, wenn die Fundamentalpunkte keine Schnittpunktsysteme enthalten, und wenn ausser einem Doppelpunkte nur einfache Fundamentalpunkte vorhanden sind. Diese Ungleichung bezieht sich auf die ebenen Curven, welche Abbildungen auf der Fläche gelegener Raumcurven werden können. Indem ich von Doppelpunkten und Rückkehrpunkten der Raumcurve abstrahire, erhalte ich für diesen Fall aus (18) (19) (20):

$$\begin{aligned} M &= nm - 2\beta - \Sigma \alpha \\ (38) \quad p &= \frac{m-1 \cdot m-2}{2} - \frac{\beta \cdot \beta - 1}{2} - \sum \frac{\alpha \cdot \alpha - 1}{2} \\ 1 &\leq \frac{m+1 \cdot m+2}{2} - \frac{\beta \cdot \beta + 1}{2} - \sum \frac{\alpha \cdot \alpha + 1}{2}. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen folgt sogleich:

$$\begin{aligned} M + p - 1 &\geq nm - 3m - \beta \\ \text{oder} \\ (39) \quad m &\leq \frac{M + p - 1 + \beta}{n - 3}. \end{aligned}$$

Dagegen ist, wenn man von dem Falle $\beta = 1$ absieht, ein β facher Punkt der Abbildung erst bei einer Curve $(\beta + 1)$ ^{ter} Ordnung möglich, also für $\beta > 1$ immer

$$(40) \quad m \geq \beta + 1.$$

Aus beiden Ungleichungen zusammen folgt nun für $n > 4$ die folgende Begrenzung für β :

$$(41) \quad \beta < \frac{M + p + 2 - n}{n - 4},$$

während zugleich m in die Grenzen (39) (40) eingeschlossen ist.

Aber für den vorliegenden Fall, wo $n = 4$, gehen die Ungleichungen über in

$$(40) \quad m \leq M + p - 1 + \beta, \quad m \geq 1 + \beta \quad (\text{für } \beta > 1).$$

Es knüpfen sich daran sofort folgende Schlüsse:

I. Gerade Linien auf der Fläche geben $M = 1$, $p = 0$; ferner, da der durch den Doppelpunkt dargestellte Kegelschnitt von einer Geraden höchstens in zwei Punkten geschnitten wird, kann β höchstens 2, also $\beta = 0, 1, 2$ sein. Im ersten Falle wäre $m = 0$; in der That geben die 8 einfachen Fundamentalpunkte Gerade der Fläche. Im zweiten Falle kann $m = 1$ sein; man erhält Gerade, die durch den Doppelpunkt gehen. Diese stellen Gerade im Raume vor, wenn eine der Zahlen α auch noch $= 1$ ist; man erhält also die 8 Verbindungslinien des Doppelpunkts mit den einfachen Fundamentalpunkten. Jede hierdurch dargestellte Gerade bildet mit der dem zugehörigen Fundamentalpunkte entsprechenden ein Paar. Für $\beta = 2$ müsste $m \leq \beta$ und $m \geq 1 + \beta$ sein, was unmöglich ist. Es giebt ausser den oben (§. 3) gefundenen 8 Paaren keine Geraden auf der Fläche.

II. Kegelschnitte. $M = 2$, $p = 0$. Die Zahl β der Durchschnitte mit dem durch den Doppelpunkt dargestellten Kegelschnitt kann 4 werden, also $\beta = 0, 1, 2, 3, 4$. Die beiden Grenzen von m fallen für $\beta > 1$ zusammen, und man erhält für $\beta > 1$ immer $m = 1 + \beta$. Man hat daher folgende Fälle:

1) $\beta = 0$, $m \leq 1$. Abgesehen von dem durch den Doppelpunkt dargestellten Kegelschnitt erhält man als Bilder von Kegelschnitten die Geraden, welche die einfachen Fundamentalpunkte verbinden. Ihre Zahl ist $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$.

2) $\beta = 1$, $m = 1$, oder $m = 2$. Die Annahme $m = 1$ giebt den Strahlbüschel, dessen Scheitel der Doppelpunkt ist. Er stellt eine Schaar von Kegelschnitten dar. Die Annahme $m = 2$ fordert, dass vier der α gleich 1 seien, und führt daher auf Kegelschnitte, welche durch den Doppelpunkt und durch vier einfache Fundamentalpunkte gehen. Ihre Zahl ist $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 70$.

3) $\beta = 2$, $m = 3$. Die erste Gleichung (38) giebt $2 = 4 \cdot 3 - 4 - \Sigma \alpha$, oder $\Sigma \alpha = 6$. Man hat also völlig bestimmte Curven dritter Ordnung in der Abbildung, welche durch 6 einfache Fundamentalpunkte gehen, und in dem doppelten einen Doppelpunkt haben. Ihre Zahl ist $\frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28$.

4) $\beta = 3$, $m = 4$. Die erste Gleichung (38) giebt $\Sigma \alpha = 8$. Man hat eine Curve vierter Ordnung, welche in dem doppelten Fundamen-

talpunkte einen dreifachen Punkt hat, und durch alle einfachen Fundamentalpunkte geht. Sie ist vollständig bestimmt.

5) $\beta = 4$, $m = 5$. Wenigstens eines der α müsste > 1 sein, wodurch die Curve fünfter Ordnung zerfallen würde. Dieser Fall liefert also nichts.

Bemerken wir, dass alle Curven vierter Ordnung, welche einen gegebenen Doppelpunkt haben und durch 8 gegebene Punkte gehen, 11 Bedingungen genügen, also nur vier Parameter enthalten, so erkennt man, dass jede diesen Bedingungen in der vorliegenden Abbildung genügende Curve vierter Ordnung auch die Abbildung eines ebenen Schnittes ist. Dies trifft für die unter 4) behandelte Curve zu; und zwar tritt der in §. 6 erwähnte Fall ein, in welchem die durch den doppelten Fundamentalpunkt dargestellte Curve dem vollständigen Durchschnitte zuzuzählen ist. Die Curve 4) gehört also mit der durch den doppelten Fundamentalpunkt dargestellten Curve dem vollständigen Schnitte einer dreifach berührenden Ebene zu. Der vierte Schnittpunkt der Kegelschnitte liegt auf der Doppelcurve, und erscheint also in der Abbildung in zwei Punkte aufgelöst. — Ebenso vereinigt sich je eine der Curven 1) mit je einer der Curven 3), und 35 Paare der 70 Curven 2) zu Abbildungen vollständiger Durchschnitte.

Ausser den $1 + 28 + 70 + 28 + 1 = 128$ Kegelschnitten, die von den 64 dreifach berührenden Ebenen herrühren, giebt es also nur noch die unter 2) erwähnte Schaar von Kegelschnitten auf der Fläche. Sie stellt also die Schaar dar, in der ein durch die Doppelgerade gelegter Ebenenbüschel die Fläche schneidet.

Bezüglich der Lage dieser Kegelschnitte zu einander und zu den 16 Geraden genügt es, das Verhalten eines Kegelschnittes zu betrachten, etwa des durch den doppelten Fundamentalpunkt dargestellten. Denn die verschiedenen Kegelschnitte verhalten sich ganz gleichförmig, indem nach §. 3 jeder in einer entsprechenden Abbildung die Stelle des doppelten Fundamentalpunktes einnimmt.

Jeder der 128 Kegelschnitte ist acht Geraden zugeordnet, welche ihn treffen. Und zwar haben zwei Kegelschnitte unter ihren zugeordneten Geraden immer eine gerade Anzahl gemein. Man erkennt nun aus der Betrachtung der Kegelschnitte (1), (2), (3) sofort Folgendes:

Jeder der 128 Kegelschnitte wird **nicht** getroffen von den 28 Kegelschnitten, deren zugeordnete Geradensysteme mit dem seinigen 6 Gerade gemein haben; einmal getroffen von den 70 Kegelschnitten, deren Geradensysteme mit dem seinigen vier Gerade gemein haben; zweimal von den

28 Kegelschnitten, deren Geradensysteme mit dem seini-
gen nur 2 Gerade gemein haben.

Unter den dreifach berührenden Ebenen giebt es daher
 $\frac{64 \cdot 28}{2} = 896$ Paare, welche sich so schneiden, dass immer
ein Kegelschnitt einer Ebene einen der andern zweimal
trifft; hingegen $\frac{64 \cdot 35}{2} = 1120$ Paare, welche sich so schnei-
den, dass jeder Kegelschnitt der einen Ebene jeden der
andern trifft.

Jeder Kegelschnitt der **Schaar** wird von jedem der 128
einzelnen Kegelschnitte einmal getroffen.

§. 9.

Raumcurven und ebene Curven dritter Ordnung, welche auf der Fläche liegen.

III. Raumcurven dritter Ordnung. $M = 3$, $p = 0$, $m \leq 2 + \beta$.
Ein Kegelschnitt kann eine Raumcurve dritter Ordnung höchstens in
drei Punkten schneiden, wenn sie nicht zerfallen soll; daher ist β
höchstens 3. Man hat also folgende Fälle:

1) $\beta = 0$; $m = 1$ oder $m = 2$. Für $m = 1$ erhält man acht ein-
fache Schaaren, abgebildet durch Strahlbüschel, deren Scheitel die
einfachen Fundamentalpunkte sind. Für $m = 2$ giebt es die $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$
einzelnen Curven, deren Bilder Kegelschnitte durch fünf einfache Fun-
damentalpunkte sind.

2) $\beta = 1$; $m = 1, 2, 3$. Der Fall $m = 1$ giebt nichts, denn Ge-
rade durch den festen Doppelpunkt stellen Kegelschnitte dar. Aus
 $m = 2$ erhält man die $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$ Schaaren, deren Bilder Kegel-
schnitte durch den doppelten und drei einfache Fundamentalpunkte
sind. Aus $m = 3$ findet man eine Anzahl von einzelnen Curven, deren
Bilder Curven dritter Ordnung sind, welche durch den doppelten Fun-
damentalpunkt gehen, und fünf einfache Fundamentalpunkte zu ein-
fachen, einen sechsten zum Doppelpunkt haben. Sie sind hierdurch
völlig bestimmt (9 Bedingungen); ihre Zahl ist $8 \cdot \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 168$.

3) $\beta = 2$; $m = 3, 4$. Für $m = 3$ haben wir einfache Curvenschaar-
en 3^{ten} Ordnung, welche in dem doppelten Fundamentalpunkte einen
Doppelpunkt haben, und durch 5 der einfachen hindurchgehen. Die
Zahl dieser Schaaren ist $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$. — Für $m = 4$ erhalten wir
Curven 4^{ter} Ordnung, welche in dem doppelten und in zwei einfachen

Fundamentalkurven Doppelpunkte haben und durch fünf weitere einfache Fundamentalkurven hindurchgehen. Diese Curven sind hierdurch völlig bestimmt (14 Bedingungen); ihre Zahl ist $\frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} \cdot 6 = 168$.

4) $\beta = 3$; $m = 4, 5$. Bei $m = 4$ erhält man 8 Schaaren von Curven vierter Ordnung, welche in dem doppelten Fundamentalkurven einen dreifachen Punkt haben, und durch je 7 einfache Fundamentalkurven hindurchgehen (13 Bedingungen). Bei $m = 5$ könnten zwei verschiedene Fälle eintreten. Damit $p = 0$ sei, muss die Curve 5ter Ordnung ausser dem in den doppelten Fundamentalkurven fallenden dreifachen Punkt noch entweder drei Doppelpunkte in dreien der einfachen Fundamentalkurven, oder einen weiteren dreifachen Punkt in einem derselben haben. Indessen ist der zweite Fall nicht möglich, denn es müsste $\Sigma\alpha = 11$ sein, also nach Abzug von 3 noch $\Sigma\alpha = 8$ übrig bleiben, während doch nur 7 Fundamentalkurven übrig sind, deren keiner der Curve mehr als einfach angehören kann. In dem erstern Falle hingegen bleiben von $\Sigma\alpha = 11$ nach Abzug von 6 wegen der drei in drei Fundamentalkurven fallenden Doppelpunkte noch 5 übrig; durch jeden der übrigen Fundamentalkurven geht also die Curve einmal hindurch. Solcher Curven giebt es $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$; sie sind durch $6 + 3 \cdot 3 + 5 = 20$ Bedingungen völlig bestimmt.

Es giebt also im Ganzen $8 + 56 + 56 + 8 = 128$ einfache Schaaren von Raumcurven 3ter Ordnung auf der Fläche; ausserdem aber $56 + 168 + 168 + 56 = 448$ einzelne Raumcurven 3ter Ordnung, welche keiner der Schaaren angehören.

Die hier auftretenden Zahlen erklären sich leicht, wenn man das Verhalten der Curven 3ter Ordnung zu den 8 Paaren von Geraden ins Auge fasst. Was zunächst die Schaaren von Raumcurven betrifft, so muss man sich erinnern, dass es 128 Combinationen von je 8 Geraden, je eine aus jedem Paar, gab, welche je von einem Kegelschnitt getroffen wurden. Aber es giebt noch 128 andere Combinationen von je 8 Geraden, je eine aus jedem Paar. Jede Schaar von Curven 3ter Ordnung hat nun die Eigenschaft, die Geraden einer solchen Combination einmal, die übrigen gar nicht zu treffen; was aus der Abbildung sofort erkannt wird.

Die einer solchen Curvenschaar 3ter Ordnung zugeordnete Combination von Geraden hat mit der einem der 128 Kegelschnitte zugeordneten immer eine ungerade Combination gemein. Eine Curve aus einer Schaar dritter Ordnung schneidet einen jener Kegelschnitte gar nicht, 1mal, 2mal, 3mal, je nachdem die zugeordneten Combinationen 7, 5, 3, 1 Gerade gemein-

sam haben. Die Curven einer Schaar treffen also 8 Kegelschnitte gar nicht, 56 einmal, 56 zweimal, 8 dreimal. Eine Curve der Kegelschnittschaar wird von jeder Curve aus den Schaaren 3^{ter} Ordnung einmal geschnitten.

Curven 3^{ter} Ordnung aus derselben Schaar schneiden einander nicht; Curven verschiedener Schaaren schneiden sich in 1, 2, 3, 4 Punkten, je nachdem die zugeordneten Combinationen 6, 4, 2, 0 Gerade gemein haben; dies tritt bei jeder Schaar beziehungsweise 28, 70, 28, 1mal ein.

Die 448 einzelnen Raumcurven 3^{ter} Ordnung, welche ausserdem auf der Fläche existiren, zerfallen in 56 Gruppen zu 8. Jede Gruppe ist 5 Paaren von Geraden zugeordnet, deren Gerade die 8 Curven der Gruppe sämmtlich einmal schneiden. Ausserdem schneidet jede der 8 Curven je eine Gerade der 3 übrigen Paare zweimal, die andern keinmal.

Nach den drei einzelnen Geraden, welche eine solche Curve trifft, richtet sich ihr Schnitt mit den einzelnen Kegelschnitten. Ein Kegelschnitt wird von der Curve 0, 1, 2, 3mal geschnitten, je nachdem unter der dem Kegelschnitte conjugirten Combination sich 3, 2, 1, 0 jener drei Geraden befinden. Demnach schneidet jede jener Curven 16 Kegelschnitte 0mal, 48 einmal, 48 zweimal, 16 dreimal. Jeder Kegelschnitt aus der Schaar ferner wird von einer solchen Curve zweimal getroffen.

Die Schaaren von Curven 3^{ter} Ordnung werden von einer solchen einzelnen Curve 3^{ter} Ordnung in 1, 2, 3, 4 Punkten getroffen, je nachdem von den 3 einzelnen die letztere schneidenden Geraden 3, 2, 1, 0 unter der zu der Schaar gehörigen Combination enthalten sind.

Die 448 einzelnen Curven 3^{ter} Ordnung schneiden einander nach folgender Regel: Curven aus derselben Gruppe, welche beide dieselben 5 Paare schneiden, in 1, 3, 5 Punkten, je nachdem unter den 3 einzelnen Geraden, welche jede noch trifft, 2, 1 oder 0 gemeinsam sind; dies tritt bei jeder Curve beziehungsweise 3, 3 und 1mal ein.

Curven aus zwei Gruppen, bei denen unter den 5 von jeder Gruppe getroffenen Paaren 4 gemeinsam sind, in 0, 2, 4 Punkten, je nachdem von den drei einzelnen Geraden, welche jede der Curven noch trifft, 2, 1, 0 gemeinsam sind; dies tritt bei jeder Curve beziehungsweise 60, 30, 30mal ein.

Curven aus zwei Gruppen, bei denen unter den 5 von

jeder Gruppe getroffenen Paaren 3 gemeinsam sind, in 1, 3 Punkten, je nachdem von den 3 einzelnen Geraden, welche jede der Curven noch trifft, 1 oder 0 gemeinsam sind; dies tritt bei jeder Curve beziehungsweise 120, 120mal ein.

Curven aus zwei Gruppen, bei denen unter den 5 von jeder Gruppe getroffenen Paaren nur zwei gemeinsam sind, 2mal; was bei jeder Curve 80mal eintritt.

Jede dieser Curven wird also beziehungsweise von 60, 123, 110, 123, 30, 1 der übrigen 0, 1, 2, 3, 4, 5mal getroffen.

IV. Ebene Curven 3^{ter} Ordnung. Da diese Curven nothwendig durch eine Gerade zum vollständigen ebenen Schnitte ergänzt werden, so erkennt man, dass auf der Fläche 16 Schaaren solcher Curven liegen; jede solche Schaar entsteht durch den Schnitt der Fläche mit einem Ebenenbüschel, welche eine der 16 Geraden zur Axe hat. Ihre Abbildungen theilen sich in zwei Classen, welche man aus der Bemerkung erhält, dass die Abbildung eines ebenen Schnittes immer eine Curve 4^{ter} Ordnung mit einem Doppelpunkt in dem doppelten Fundamentalpunkte ist, welche durch alle einfachen Fundamentalpunkte hindurchgeht; und dass umgekehrt jede solche Curve Abbildung eines ebenen Schnittes ist. Ist daher die Axe des Ebenenbüschels eine der Geraden, welche sich als Verbindungslinien des Doppelpunktes mit einem der einfachen Fundamentalpunkte abbilden, so wird der Büschel von ebenen Curven dritter Ordnung durch Curven dritter Ordnung abgebildet, welche ebenfalls durch den Doppelpunkt, nicht aber durch den erwähnten einfachen Fundamentalpunkt, sondern statt dessen durch die 7 übrigen gehen, und welche sich also ausser diesen 8 Punkten noch immer in einem festen neunten Punkte durchschneiden. Dieser neunte Punkt gehört der Abbildung der Doppelgeraden an; er ist die Abbildung des Punktes, welcher mit dem Durchschnitt der Axe des Büschels und der Doppelgeraden auf der Fläche vereinigt liegt.

Wird dagegen die Axe des Ebenenbüschels durch einen der einfachen Fundamentalpunkte abgebildet, so bilden sich die Curven des Büschels dritter Ordnung als Curven vierter Ordnung ab, welche durch die einfachen Fundamentalpunkte gehen und in dem doppelten einen Doppelpunkt haben. Aber damit zu dem hierdurch dargestellten ebenen Schnitte auch die Axe des Büschels gerechnet werde, muss auch noch in dem ihr entsprechenden Fundamentalpunkte ein Doppelpunkt stattfinden (§. 6.). In der That sind dadurch die Curven 4^{ter} Ordnung 13 Bedingungen unterworfen, so dass nur noch ein Büschel übrig bleibt. Die Curven dieses Büschels schneiden sich in zwei festen Doppelpunkten und in sieben festen einfachen Punkten; sie

haben also noch einen weitem festen Punkt gemeinsam; und dieses ist wieder die Abbildung des Punktes, welcher mit dem Durchschnitt der Doppellinie und der Büschelaxe auf ersterer vereinigt liegt.

Unter den 16 Büscheln von ebenen Curven 3^{ter} Ordnung sind 8mal zwei conjugirt, deren entsprechende Geraden ein Paar bilden. Zwei Curven aus conjugirten Büscheln schneiden sich dreimal, zwei Curven aus nicht conjugirten zweimal.

Betrachten wir einen dieser Büschel, etwa einen solchen, welcher sich als Büschel von Curven dritter Ordnung abbildet. Die Gleichung des Büschels in der Abbildung ist von der Form $\varphi + \lambda \psi = 0$. Die Discriminante von $\varphi + \lambda \psi$ gleich Null gesetzt, giebt eine Gleichung 12^{ten} Grades für λ . Es giebt also in jedem Büschel 12 Curven mit Doppelpunkt, welchen denn auch auf der Fläche Curven mit Doppelpunkt entsprechen. Die hierdurch gegebenen $12 \cdot 16 = 192$ Ebenen bilden eine zweite Classe von dreifach berührenden Ebenen*), welche von der oben betrachteten gänzlich verschieden ist. Denn bei der letztern zerfiel die Schnittcurve der Ebene mit der Oberfläche in zwei Kegelschnitte, von deren vier Schnittpunkten einer in die Doppelgerade fiel, die andern aber wirkliche Berührungspunkte wurden. Hingegen bei diesen neuen Ebenen zerfällt die Schnittcurve mit der Oberfläche in eine Gerade und in eine Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt. Während also ein Schnittpunkt der Geraden mit der Curve 3^{ter} Ordnung auf die Doppelgerade fällt, bleiben die übrigen beiden und der Doppelpunkt wirkliche Berührungspunkte der Ebene mit der Oberfläche.

Wenn eine Gerade einer Oberfläche sich als Gerade abbildet, welche der erstern Punkt für Punkt entspricht, so sind die Reihen der auf ersterer liegenden Punkte und ihrer auf letztern liegenden Abbildungen nothwendig projectivisch. Dasselbe gilt von einer Geraden, welche sich als Fundamentalpunkt abbildet, und von dem Strahlbüschel, welcher in der Abbildung diesen Punkt zum Scheitel hat; wobei denn jedem Punkte der Geraden ein Strahl entspricht und umgekehrt. Was man aber über die projectivischen Beziehungen der Elemente in der Abbildung der Geraden feststellt, gilt auch für die Punkte der Geraden selbst. Betrachten wir z. B. den Büschel von Curven 3^{ter} Ordnung in der Abbildung, welche eine als Gerade abgebildete Gerade zur Abbildung ebener Schnitte ergänzen, so schneidet jede dieser Curven die Abbildung der Geraden ausser dem doppelten Fundamentalpunkt noch zweimal, und die so entstehenden Punktepaare bilden eine Involution. In dieser entspricht unter

*) Als eine dritte Classe kann man die 8 Ebenen durch die Doppelgerade ansehen, welche die Oberfläche in Linienpaaren schneiden.

andern dem auf der Geraden liegenden einfachen Fundamentalpunkte derjenige Punkt, in welchem eine durch alle neun Fundamentalpunkte gehende Curve 3^{ter} Ordnung die Gerade schneidet. Diese Curve 3^{ter} Ordnung aber ist, wie sogleich näher entwickelt werden wird, die Abbildung der Doppelgeraden; im Raume entsteht also eine Involution, bei welcher ein Paar von Punkten der Schnitt mit der Doppelgeraden und der Schnitt mit der conjugirten einfachen Geraden ist. Ferner hat die Involution der Abbildung nur zwei Doppelpunkte; es giebt also im Raume auch nur zwei Curven des Büschels, welche die Gerade ausserhalb ihres Schnittes mit der Doppelgeraden berühren. Man kann so den Satz aussprechen:

Legt man durch eine der 16 Geraden Ebenen, so schneiden diese in Curven dritter Ordnung, welche alle durch den Schnitt mit der Doppelgeraden gehen. Sie schneiden die Gerade in Punktepaaren einer Involution; zwei von ihnen berühren die Gerade in den Doppelpunkten der Involution; der Schnittpunkt mit der Doppelgeraden bildet ein Paar mit dem Punkte, in welchem die Gerade von der ihr conjugirten getroffen wird.

§. 10.

Die Abbildung der Doppelgeraden.

Die Doppelgerade bildet sich nach §. 7. als Curve dritter Ordnung ab, welche durch alle einfachen sowie durch den doppelten Fundamentalpunkt einmal hindurchgeht, und also dadurch völlig bestimmt ist. Das Verhalten der Punkte der Doppelgeraden studirt man also, indem man die elliptischen Integrale erster Gattung einführt, welche den Punkten der Curve entsprechen, indem sie ihre Coordinaten zur obern Grenze haben, und indem die absolute Invariante der Curve mit dem Modul durch eine Gleichung mit numerischen Coefficienten verbunden ist; die untere Grenze der Integrale ist ein beliebiger fester Punkt der Curve.

Bezeichnen wir durch $u_1, u_2, \dots u_{3n}$ die Werthe des Integrals, welche den Schnittpunkten der Curve 3^{ter} Ordnung mit einer Curve m^{ter} Ordnung entsprechen, so ist immer

$$(1) \quad u_1 + u_2 \dots + u_{3n} = mc,$$

wo c eine gewisse Constante bedeutet (vgl. Crelles Journal, Bd. 63, p. 197); und umgekehrt sind die $3n$ Punkte Schnittpunkte mit einer Curve m^{ter} Ordnung, sobald diese Gleichung besteht.

Der Werth des Integrals für den doppelten Fundamentalpunkt sei b , die Werthe für die einfachen Fundamentalpunkte $b_1, b_2, \dots b_8$.

Betrachten wir nun die Abbildungen ebener Schnitte der Oberfläche. Dieselben sind Curven 4^{ter} Ordnung, welche durch die einfachen Fundamentalpunkte gehen, und in dem doppelten einen Doppelpunkt haben; und da eine solche Curve nur drei willkürliche Parameter enthalten kann, so sind auch alle solche Curven Abbildungen ebener Schnitte. Die Curve 3^{ter} Ordnung wird von jeder derselben in zwei weitem Punkten geschnitten, deren entsprechende Integrale u, v seien. Die Gleichung (1) geht also für die Abbildungen ebener Schnitte über in:

$$(2) \quad u + v + 2b + b_1 + b_2 \dots + b_8 = 4c.$$

Wir können nun einen Punkt P auf der Curve dritter Ordnung so bestimmen, dass das ihm zugehörige Integral der Gleichung

$$p = 2b + b_1 + b_2 \dots + b_8 - 3c$$

genügt, und erhalten dann aus (2):

$$(3) \quad u + v + p = c,$$

eine Gleichung, welche aussagt, dass die zu u, v, p gehörigen Punkte auf einer Geraden liegen. Die Abbildungen ebener Schnitte treffen also die Abbildung der Doppelgeraden, abgesehen von festen Schnittpunkten, in Punktepaaren, deren Verbindungslinien sich auf einem Punkte P der letztern Abbildung treffen, und solche Punktepaare Q, Q' sind also die Durchschnitte der Curve 3^{ter} Ordnung mit dem von P ausgehenden Strahlbüschel.

Die Punkte Q, Q' , welche den Integralen u, v zugehören, sind Abbildungen der Schnittpunkte eines ebenen Schnittes mit der Doppelgeraden, d. h. der beiden Punkte, welche in einem solchen Schnittpunkte vereinigt liegen. Die Schaar der Paare Q, Q' liefert also die Abbildung der Punkte der Doppelcurve.

Um dieses geometrisch zu deuten, bemerke ich, dass geraden Linien in der Bildebene Raumcurven 4^{ter} Ordnung und 2^{ter} Species entsprechen, und zwar bilden sie eine doppelt unendliche Schaar, welche dem bei der Abbildung bevorzugten Kegelschnitte (doppelter Fundamentalpunkt) so zugeordnet ist, dass sie ihn nicht trifft. Solcher Schaa-ren giebt es also 128; wodurch die auf der Fläche liegenden Curven 4^{ter} Ordnung und 2^{ter} Species übrigens durchaus nicht erschöpft sind.

Unter der hier bevorzugten Schaar giebt es nun eine einfach unendliche, bei welcher ein wirklicher Doppelpunkt auftritt; sie giebt in der Abbildung die Schaar von Geraden, welche Punkte Q, Q' verbinden. Alle diese Geraden gehen durch einen Punkt P in der Abbildung der Doppelcurve, mithin gehen auch alle Curven der einfachen Schaar auf der Oberfläche durch einen festen Punkt Π der

Doppelcurve, dessen Bild P ist, und zwar so, dass die Tangente der Curve immer in der nämlichen Tangentenebene der Doppelcurve liegen. So giebt es 128 Punkte Π , den 128 Curvenschaaren entsprechend. Betrachtet man insbesondere den Strahl QQ' , dessen einer Punkt Q mit P zusammenfällt (Tangente der Abbildung der Doppelcurve in P), so sieht man, dass ihm eine besondere Curve 4^{ter} Ordnung und 2^{ter} Species entspricht, welche in Π einen wirklichen Doppelpunkt hat, und zugleich mit ihrem einen Zweige die Doppelgerade berührt. Ferner kann man noch diejenigen vier besondern Curven der einfachen Schaar betrachten, deren Abbildungen die von P an die Abbildung der Doppelgeraden gezogenen Tangenten sind. Für diese fällt das Punktpaar QQ' zusammen; die vier so gegebenen Punkte der Doppelgeraden sind daher Rückkehrpunkte, d. h. Punkte, deren beide Tangentenebenen zusammenfallen. Und jede der vier entsprechenden Raumcurven hat also in einem dieser Punkte einen Rückkehrpunkt; es sind dies die einzigen Fälle, in denen ein Rückkehrpunkt eintreten kann. Dagegen kann achtmal eine Curve einer Schaar durch die Verbindungslinie des Punktes P mit einer einfachen, einmal durch die Verbindungslinie mit dem doppelten Fundamentalpunkte abgebildet werden; im ersten Falle zerfällt die Raumcurve 4^{ter} Ordnung in die durch den einfachen Fundamentalpunkt abgebildete Gerade und in eine Curve dritter Ordnung; im andern Falle in den durch den doppelten Fundamentalpunkt repräsentirten Kegelschnitt und in einen Kegelschnitt der einfachen Kegelschnittschaar (§. 8). Ich fasse diese Verhältnisse in folgenden Satz zusammen:

Auf der Doppelgeraden giebt es vier Rückkehrpunkte. Durch jeden derselben gehen 128 Raumcurven vierter Ordnung und 2^{ter} Species, welche daselbst einen wirklichen Rückkehrpunkt haben, und ausserdem durch je einen von 128 festen auf der Doppelgeraden liegenden Punkten Π gehen. Jede jener Curven ist ein Glied einer von 128 Schaa- ren solcher Raumcurven 4^{ter} Ordnung und 2^{ter} Species, welche durch den betreffenden Punkt Π gehen, in irgend einem Punkte der Doppelgeraden einen wirklichen Doppelpunkt haben, und einen gewissen der 128 einzelnen Kegelschnitte nicht treffen. In jeder solchen Schaar giebt es 8 Curven, welche in eine Gerade und eine Raumcurve dritter Ordnung, eine, welche in zwei Kegelschnitte zerfällt.

Ich glaube hiermit die Verhältnisse, welche bei dieser Art von Oberflächen eintreten, hinreichend angedeutet zu haben und wende mich einer andern Flächenart zu.

§. 11.

Flächen fünfter Ordnung mit einer Doppelcurve dritter Ordnung. Niedrigste Abbildung auf einer Ebene.

Verstehen wir unter L_i, M_i lineare Ausdrücke in den x , so stellen die Gleichungen

$$(1) \quad \begin{aligned} L_1 + \lambda M_1 &= 0 \\ L_2 + \lambda M_2 &= 0 \\ L_3 + \lambda M_3 &= 0 \end{aligned}$$

eine Raumcurve dritter Ordnung dar, welche der gemeinsame Durchschnitt der drei Flächen 2^{ter} Ordnung

$$(2) \quad \begin{aligned} \Phi_1 = L_2 M_3 - L_3 M_2 &= 0, & \Phi_2 = L_3 M_1 - L_1 M_3 &= 0, \\ \Phi_3 = L_1 M_2 - L_2 M_1 &= 0 \end{aligned}$$

ist. Eine Fläche 5^{ter} Ordnung, welche diese Curve zur Doppelcurve hat, muss eine Gleichung von der Form

$$\Sigma \Sigma A_{ix} \Phi_i \Phi_x = 0$$

haben, wobei die A_{ix} lineare Functionen sind. Dieser Gleichung aber kann man die folgende Gestalt geben:

$$(3) \quad 0 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & L_1 & M_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & L_2 & M_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & L_3 & M_3 \\ L_1 & L_2 & L_3 & 0 & 0 \\ M_1 & M_2 & M_3 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

welche als Eliminationsresultat der Gleichungen

$$(4) \quad \begin{aligned} A_{11}\xi_1 + A_{12}\xi_2 + A_{13}\xi_3 &= L_1\lambda + M_1\mu \\ A_{21}\xi_1 + A_{22}\xi_2 + A_{23}\xi_3 &= L_2\lambda + M_2\mu \\ A_{31}\xi_1 + A_{32}\xi_2 + A_{33}\xi_3 &= L_3\lambda + M_3\mu \\ L_1\xi_1 + L_2\xi_2 + L_3\xi_3 &= 0 \\ M_1\xi_1 + M_2\xi_2 + M_3\xi_3 &= 0 \end{aligned}$$

betrachtet werden können. Multiplicirt man die ersten dieser drei Gleichungen aber mit ξ_1, ξ_2, ξ_3 und addirt, so verschwinden die rechten Theile wegen der letzten beiden Gleichungen und man hat die für die x lineare Gleichung

$$(5) \quad \Sigma \Sigma A_{ix} \xi_i \xi_x = 0.$$

Diese, zusammen mit den beiden letzten Gleichungen (4) genügt, um die Verhältnisse der x als rationale Functionen der ξ darzustellen, und liefert also die Abbildung der Fläche auf einer Ebene.

Da wir über die Coefficienten der A, L, M nichts vorausgesetzt

haben, so haben diese drei Gleichungen, nach den x geordnet, zu ihren Coefficienten ganz willkürliche Functionen der ξ , welche in den letzten beiden Gleichungen (4) vom 1^{ten}, in der Gleichung (5) vom 2^{ten} Grade sind. Schreiben wir daher diese Gleichungen jetzt so:

$$(6) \quad \begin{aligned} \Sigma L_i \xi_i &= \Sigma \lambda_i x_i = 0 \\ \Sigma M_i \xi_i &= \Sigma \mu_i x_i = 0 \\ \Sigma \Sigma A_{ix} \xi_i \xi_x &= \Sigma \varphi_i x_i = 0, \end{aligned}$$

wo die λ , μ lineäre, die φ quadratische Functionen der ξ sind. Bezeichnen wir durch f_1, f_2, f_3, f_4 die Determinanten:

$$(7) \quad \begin{aligned} f_1 &= \Sigma \pm \lambda_2 \mu_3 \varphi_4, \quad f_2 = - \Sigma \pm \lambda_1 \mu_3 \varphi_4, \quad f_3 = \Sigma \pm \lambda_1 \mu_2 \varphi_4, \\ f_4 &= - \Sigma \pm \lambda_1 \mu_2 \varphi_3, \end{aligned}$$

so sind die Gleichungen der Fläche wieder:

$$(8) \quad \varrho x_1 = f_1, \quad \varrho x_2 = f_2, \quad \varrho x_3 = f_3, \quad \varrho x_4 = f_4.$$

Die Functionen f sind hier vom 4^{ten} Grade. Dies ist in der That der niedrigste Grad, den sie im vorliegenden Falle haben können. Denn damit die ebenen Schnitte dieser Fläche 5^{ter} Ordnung durch Curven 3^{ter} Ordnung abgebildet werden können, muss $p_1 = 1$, jeder ebene Schnitt also mit 5 Doppelpunkten begabt sein, oder eine Doppelcurve fünften Grades stattfinden.

Die Gleichungen $f_i = 0$ haben eine Reihe von Punkten gemein. Da die Gleichungen

$$\begin{aligned} \Sigma f_i \lambda_i &= 0 \\ \Sigma f_i \mu_i &= 0 \\ \Sigma f_i \varphi_i &= 0 \end{aligned}$$

bestehen, so folgt aus $f_1 = 0, f_2 = 0$ entweder auch $f_3 = 0, f_4 = 0$, oder die beiden Reihen $\lambda_3, \mu_3, \varphi_3$ und $\lambda_4, \mu_4, \varphi_4$ müssen einander proportional sein, so dass die Gleichungen bestehen:

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= \varrho \lambda_4 \\ \mu_3 &= \varrho \mu_4 \\ \varphi_3 &= \varrho \varphi_4. \end{aligned}$$

Die Elimination der x aus diesen Gleichungen giebt eine Gleichung 5^{ten} Grades für ϱ , und man hat also für dieselben 5 gemeinsame Lösungen. Die 16 Lösungen der Gleichungen $f_1 = 0, f_2 = 0$ enthalten also 5 solche, für welche f_3, f_4 nicht verschwinden, 11, für welche sie verschwinden.

Das System der Abbildungen ebener Schnitte ist also ein System von Curven 4^{ter} Ordnung mit 11 gemeinsamen Punkten. Da solche Curven dann nur noch 3 Parameter, und zwar linear enthalten können, so umfasst das System alle Curven 4^{ter} Ordnung, welche durch

diese 11 Punkte gehen, und ist also durch dieselben vollständig definiert.

Man kann die 11 Punkte ganz beliebig annehmen. Denn wie man sie auch wählt, gewisse specielle Lagen ausgeschlossen, immer bilden die durch sie gehenden Curven vierter Ordnung ein System von allgemeinem Charakter, welches aus vier Curven $f_i = 0$ linear zusammengesetzt wird, und welches eine Fläche von der Ordnung $N = 4^2 - 11 = 5$ liefert, deren ebene Schnitte $p = 3$ haben, und welche also eine Doppelcurve 3^{ter} Ordnung enthalten muss. Die ausgeschlossenen Lagen der Fundamentalpunkte beziehen sich darauf, dass drei jener Punkte auf einer Geraden, 6 auf einem Kegelschnitt, 10 auf einer Curve 3^{ter} Ordnung, oder endlich 9 im Schnittpunktssystem zweier solcher liegen können. Was aber die Doppelcurve dritter Ordnung betrifft, so ist zwar ein Zerfallen derselben in Kegelschnitt und Gerade, welche sich treffen, oder in drei Gerade, deren eine die beiden andern trifft, nicht ausgeschlossen; aber wohl der Fall von Kegelschnitt und Gerade, welche sich nicht treffen, oder drei sich nicht schneidende Gerade, also alle diejenigen Fälle, welche nicht Specialitäten einer Raumcurve 3^{ter} Ordnung sind. Denn in beiden Fällen giebt es unendlich viele Gerade, welche eine so zerfallende Curve dreimal treffen, und also die Oberfläche sechsmal schneiden, daher ganz in derselben liegen; während sich sogleich zeigen wird, dass die hier zu betrachtende Abbildung nur eine endliche Anzahl von geraden Linien liefert.

Die wirkliche Construction der Abbildung, oder vielmehr einer der später zu benutzenden dualistisch entgegengesetzten, bei welcher jedem Punkte der Oberfläche im Allgemeinen eine Gerade entspricht, erhält man leicht aus den Gleichungen (6). In diesen kann man die L_i , M_i auch beliebig durch $L_i + \sigma M_i$, $L_i + \tau M_i$ ersetzen; die Gleichung aber

$$\sum_i (L_i + \sigma M_i) \xi_i = 0$$

ist die Gleichung eines Ebenenbündels, welches in dem Punkte

$$L_1 + \sigma M_1 = 0, \quad L_2 + \sigma M_2 = 0, \quad L_3 + \sigma M_3 = 0,$$

d. h. in einem beliebigen Punkte der Raumcurve seinen Scheitel hat. Da nach dem eben Gesagten schon der Punkt $L_1 = 0$, $L_2 = 0$, $L_3 = 0$ ein ganz beliebiger Punkt der Curve ist, so will ich diesen zum Scheitel des zu betrachtenden Bündels nehmen, dessen Gleichung

$$L_1 \xi_1 + L_2 \xi_2 + L_3 \xi_3 = 0$$

ist. Nach §. 4 sind dann die ξ die Coordinaten einer Geraden, die der Durchschnitt der betreffenden Ebene des Bündels mit einer beliebig gewählten festen Ebene ist, auf welcher letztern die Abbildung geschieht. Es ist nur die Frage, welcher Punkt der Fläche durch

diese Gerade abgebildet wird. Man construirt diesen Punkt folgendermassen. Eine Ebene des Bündels $\Sigma L_i \xi_i = 0$ schneidet ausser am Scheitel die Curve 3^{ter} Ordnung noch in zwei Punkten. Da für Punkte der Curve die L_i den M_i proportional sind, so besteht für diese beiden Punkte auch die Gleichung $\Sigma M_i \xi_i = 0$, also die zweite Gleichung (6). Die durch eine Ebene des Bündels $\Sigma L_i \xi_i = 0$ bestimmte Sehne der Curve ist somit durch die ersten beiden Gleichungen (6) gegeben, und geht also durch den Punkt x , welchen die Gleichungen (6) bestimmen, und welcher der Geraden ξ der eben erwähnten Bildebene entspricht. In der That geht jene Sehne nur noch durch einen Punkt der Fläche, da sie die Doppelcurve zweimal schneidet. Die Construction der Abbildung ist also folgende:

Durch einen Punkt x der Fläche legt man die Sehne der Curve dritter Ordnung, welche durch ihn geht. Fixirt man nun auf der Curve dritter Ordnung irgendwo einen Punkt, und legt von ihm aus durch die Sehne eine Ebene, so schneidet diese die Bildebene in einer Geraden, welche das Bild des Punktes x ist.

Im Folgenden wird, wo es nicht besonders bemerkt wird, die dieser Abbildung dualistisch entsprechende zu Grunde gelegt.

§. 12.

Die Curven erster, zweiter und dritter Ordnung, welche die Fläche enthält.

Für die Abbildung einer auf der Fläche liegenden Raumcurve M^{ter} Ordnung, welche in der Abbildung durch eine Curve m^{ter} Ordnung ersetzt wird, die durch die Fundamentalpunkte $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{11}$ mal hindurchgeht, erhält man hier aus §. 6 (18) (19) (20) die Gleichungen:

$$\begin{aligned} M &= 4m - \Sigma \alpha \\ (9) \quad p &= \frac{m-1 \cdot m-2}{2} - \Sigma \frac{\alpha \cdot \alpha-1}{2} \\ 1 &\leq \frac{m+1 \cdot m+2}{2} - \Sigma \frac{\alpha \cdot \alpha+1}{2}. \end{aligned}$$

Aus denselben ergibt sich die einfache Combination

$$(10) \quad m \leq M + p - 1,$$

welche zur Untersuchung der einfachsten auf der Fläche liegenden Curvensysteme sehr bequem ist. Ich betrachte die folgenden:

I. Gerade. Für $M=1$, $p=0$ hat man aus (10) $m=0$. Es giebt also keine anderen Geraden auf der Fläche, als die 11 durch die Fundamentalpunkte dargestellten. Sie schneiden einander nicht. Da hier also alle Geraden gleichmässig in der

Abbildung berücksichtigt sind, so giebt es nur eine Art, die Fläche durch Functionen f_i vom 4^{ten} Grade abzubilden, wie auch aus der Ableitung der Abbildung erhellt.

II. Kegelschnitte. $M = 2$, $p = 0$ giebt $m \geq 1$, oder vielmehr $m = 1$. Nur die Verbindungslinien zweier Fundamentalpunkte können in der ersten Gleichung (9) $M = 2$ machen. Es giebt also $\frac{11 \cdot 10}{2} = 55$ Kegelschnitte auf der Fläche. Jeder schneidet 2 Fundamentalgerade je einmal und ist diesen gewissermassen zugeordnet. Zwei Kegelschnitte treffen sich nicht oder treffen sich, je nachdem sie eine zugeordnete Gerade gemein haben oder nicht.

III. Raumcurven dritter Ordnung. $M = 3$, $p = 0$ giebt $m \geq 2$. Man hat also erstlich 11 Schaaren solcher Curven, welche durch Strahlbüschel abgebildet werden, die in je einem Fundamentalpunkte ihren Scheitel haben. Curven verschiedener Schaaren schneiden sich einmal, Curven derselben Schaar nicht. Die Curven einer Schaar schneiden die zugehörige Fundamentalgerade, die übrigen nicht; sie schneiden einmal die 45 Kegelschnitte, für welche ihre Fundamentalgerade nicht zugeordnet ist, die übrigen nicht. In jeder Schaar zerfällt zehnmal eine Curve in eine Gerade und einen Kegelschnitt, wobei denn alle nicht von der Schaar getroffenen Kegelschnitte auftreten. — Es giebt zweitens $\frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 462$ einzelne Raumcurven dritter Ordnung, welche sich als Kegelschnitte durch fünf Fundamentalpunkte abbilden, und solchen Fünfen zugeordnet sind. Zwei derselben treffen sich 0, 1, 2, 3, 4mal, je nachdem ihre Fünfen 4, 3, 2, 1, 0 Gerade gemein haben. Jede schneidet die 15 Kegelschnitte zweimal, deren zugeordnete Gerade in ihrer Fünf nicht vorkommen, 30 Kegelschnitte einmal, bei denen eine zugeordnete Gerade der Fünf angehört, zehn Kegelschnitte nicht, deren Gerade beide in der Fünf enthalten sind. Jede dieser einzelnen Curven schneidet die Schaaren von Raumcurven einmal oder zweimal, je nachdem die der Schaar zugehörige Gerade in ihrer Fünf vorkommt oder nicht.

IV. Ebene Curven dritter Ordnung. Sie sind nur in Verbindung mit den Kegelschnitten möglich, indem man die Ebenen derselben mit der Fläche zum weitem Durchschnitt bringt. Ihre Zahl ist daher ebenfalls 55. Da sie sich je mit einem Kegelschnitte zu einem vollständigen ebenen Schnitte vereinigen, so müssen sie in der Abbildung mit den Verbindungsgeraden der Fundamentalpunkte sich zu Curven 4^{ter} Ordnung durch alle Fundamentalpunkte vereinigen, also durch Curven 3^{ter} Ordnung durch 9 Fundamentalpunkte abgebildet werden. Jede trifft also 9 Gerade je einmal, einen Kegelschnitt dreimal auf der Doppelcurve und dreimal ausserhalb derselben, 18 zweimal, 36

einmal; sie schneidet die Raumcurve dritter Ordnung von zwei Schaaren dreimal, von 9 Schaaren zweimal. Sie trifft endlich von den einzelnen Raumcurven dritter Ordnung 126 einmal, 252 zweimal, 84 dreimal, u. s. w.

Es ist leicht, diese Aufzählungen beliebig fortzusetzen.

Die dreifach berührenden Tangentenebenen der Fläche müssen in Curven schneiden, welche drei nicht auf der Doppelcurve gelegene Doppelpunkte besitzen. Es giebt solcher Ebenen hier drei Arten; entweder solche, deren Schnittcurven nicht zerfallende Curven fünfter Ordnung sind, oder solche, deren Schnittcurven in Gerade und Curven 4^{ter} Ordnung, oder drittens solche, deren Schnittcurven in Kegelschnitte und Curven dritter Ordnung zerfallen. — Im ersten Falle müssen sich die Schnittcurven als Curven 4^{ter} Ordnung durch die 11 Fundamentalpunkte abbilden, welche ausserdem drei wirkliche Doppelpunkte haben; und ihre Zahl ist gleich der Anzahl solcher Curven, welche in dem Systeme von Curven 4^{ter} Ordnung durch 11 Punkte vorkommen; eine Zahl, welche nicht leicht zu bestimmen scheint. — Im zweiten Falle muss die Curve 4^{ter} Ordnung sich als Curve 4^{ter} Ordnung abbilden, welche einen Fundamentalpunkt zum Doppelpunkte hat. Da nun die Curve vierter Ordnung im Raume von der Geraden viermal geschnitten wird, der Doppelpunkt in der Abbildung aber nur zwei Durchschnitte anzeigt, so müssen die beiden andern sich dadurch in der Abbildung aufgelöst haben, dass sie im Raume in die Doppelcurve gefallen sind. Jede durch eine der Geraden gelegte Ebene berührt also in der That die Fläche zweimal, nämlich in den Schnittpunkten der Geraden mit der ergänzenden Curve vierter Ordnung, welche nicht auf der Doppelcurve liegen. Da ferner die Ebene die Doppelcurve dreimal treffen muss, so muss die Curve vierter Ordnung im Raume noch einen Doppelpunkt besitzen, welcher aber kein Berührungspunkt mit der Fläche ist, und in der Abbildung aufgelöst erscheint. Unter den Ebenen nun, welche durch eine bestimmte Gerade der Fläche gehen, giebt es eine gewisse Zahl von solchen, welche noch einmal die Fläche berühren, und also dreifach berührende Ebenen der Fläche sind. Bei diesen müssen die ergänzenden Curven 4^{ter} Ordnung zwei Doppelpunkte besitzen. In der Abbildung erhält man ihre Bilder, indem man das Büschel von Curven 4^{ter} Ordnung untersucht, welches durch 10 Fundamentalpunkte geht und im 11^{ten} einen Doppelpunkt hat, und die Frage stellt, wie viele Curven des Büschels einen weitem Doppelpunkt besitzen. Nach Hrn. Cayley ist die Zahl der Curven n^{ter} Ordnung in einem Büschel mit α gemeinsamen Doppelpunkten, welche noch einen weitem Doppelpunkt besitzen, gleich

$$3(n-1)^2 - 7\alpha,$$

(Crelles Journal, Bd. 64. p. 167); man erhält also hier für $n = 4$,

$\alpha = 1$ die Zahl 20. Es giebt also für die hier betrachtete Fläche 11.20 dreifach berührende Tangentenebenen, welche durch eine der Geraden gehen. — Endlich ist noch die Ebene jedes der oben angegebenen 55 Kegelschnitte eine dreifach berührende Ebene. Denn jede dieser Ebenen schneidet noch in einer Curve dritter Ordnung, welche mit dem entsprechenden Kegelschnitte 6 Punkte gemein hat. Der ebene Schnitt hat also 6 Doppelpunkte, von denen nur drei auf die Doppelcurve fallen, während die drei übrigen wirkliche Berührungspunkte sein müssen.

Es wurde schon oben erwähnt, dass jede durch eine der Geraden gelegte Ebene noch in einer Curve vierter Ordnung schneidet, die mit der Geraden zwei feste Punkte gemein hat, ihre Schnittpunkte mit der Doppelcurve. Die übrigbleibenden beweglichen Punktepaare bilden eine Involution, welche man leicht in der Abbildung nachweist. In der Abbildung werden diese Curven vierter Ordnung wieder Curven vierter Ordnung, die in dem betreffenden Fundamentalpunkte einen Doppelpunkt haben. In der Abbildung stellen sich also alle diese Curven zusammen als Büschel dar, und die Tangentenpaare des Doppelpunktes entsprechen den beweglichen Schnittpunktpaaren der Geraden und der Curve vierter Ordnung im Raume. Da nun die Tangentenpaare jenes Doppelpunktes eine Involution bilden, so hat man den Satz:

Legt man durch eine der Geraden der Oberfläche Ebenen, so schneiden dieselben immer in Curven vierter Ordnung, deren jede die Gerade nur in zwei veränderlichen Punkten trifft. Diese Punktepaare bilden eine Involution. Es giebt also nur zwei Ebenen des Büschels, bei welchen die Curve vierter Ordnung die Gerade in Punkten berührt, welche nicht der Doppelcurve angehören. (Doppelpunkte der Involution.)

§. 13.

Die Abbildung der Doppelcurve. Hyperelliptischer Charakter derselben.

Die Doppelcurve bildet sich im vorliegenden Falle nach den Abzählungen des §. 7 als Curve 7^{ter} Ordnung mit 11 Doppelpunkten, den Fundamentalpunkten ab, und die Abbildung gehört also zum Geschlecht $p' = 4$. Jede Abbildung eines ebenen Schnittes trifft die Curve in sechs beweglichen Punkten, oder vielmehr in drei beweglichen Punktepaaren, entsprechend den drei Durchschnittspunkten der Ebene mit der Raumcurve. Untersuchen wir zunächst die Curve,

welche von der Verbindungslinie solcher Paare umhüllt wird, und welche der Raumcurve selbst Punkt für Punkt eindeutig entspricht.

Zum Zwecke dieser Untersuchung muss ich auf die Construction zurückgehen, welche in §. 11 entwickelt wurde, und bei welcher jedem Punkte der Oberfläche eine Gerade in der Bildebene entsprach. Um die zu einem Punkte x gehörige Gerade zu finden, legte man durch x die einzig mögliche Sehne der Curve, verband sie mit einem beliebig gewählten Punkte L der Doppelcurve durch eine Ebene, und schnitt Letztere mit der Bildebene. Liegt nun x der Doppelcurve sehr nahe, so kann man diese Construction folgendermassen auffassen. In einem Punkte y der Doppelcurve giebt es zwei Tangentenebenen E, E' der Oberfläche. Jede dieser Ebenen schneidet die Doppelcurve noch in einem Punkte, z oder z' . Die Geraden yz, yz' sind Sehnen der Doppelcurve, welche die Oberfläche in zwei dem Punkte y in den beiden Ebenen EE' sehr nahe liegenden Punkten schneiden. Diese, und bei einem Grenzübergange also auch den Punkt y selbst, bildet man also ab, indem man die oben erwähnte Construction auf die Sehnen yz, yz' anwendet, und die beiden dadurch auf der Bildebene erhaltenen Geraden bilden also zusammen den Punkt y der Doppelcurve ab. Man sieht, dass der Schnittpunkt der beiden auf der Bildebene erhaltenen Geraden direct erhalten wird, wenn man die Verbindungslinie von L mit y durch die Bildebene schneidet. Der Ort solcher Punkte ist also der Durchschnitt der Bildebene mit dem Kegel zweiter Ordnung, welcher L zum Scheitel hat, und die Doppelcurve enthält, ist also ein Kegelschnitt.

Ueberträgt man dieses dualistisch, so tritt an die Stelle des Linienpaares, welches einen Punkt y der Doppelcurve abbildet, ein Punktepaar, an Stelle seines Durchschnitts ihre Verbindungslinie, und also hat man folgenden Satz:

Die Verbindungslinien der Punktepaare auf der Abbildung der Doppelcurve umhüllen einen Kegelschnitt.

Die Punkte der Doppelcurve sind durch die Gleichungen

$$(11) \quad L_1 + \lambda M_1 = 0, \quad L_2 + \lambda M_2 = 0, \quad L_3 + \lambda M_3 = 0$$

gegeben. Von den Gleichungen (6) wird für Punkte, welche diesen Gleichungen genügen, die zweite eine Folge der ersten, oder man kann die ersten beiden Gleichungen (6) durch eine Combination beider

$$(12) \quad (L_1 + \mu M_1) \xi_1 + (L_2 + \mu M_2) \xi_2 + (L_3 + \mu M_3) \xi_3 = 0$$

ersetzen, zu der dann die dritte Gleichung (6):

$$(13) \quad \Sigma \Sigma A_{ix} \xi_i \xi_x = 0$$

hinzuzufügen ist, um die Abbildung der Doppelcurve analytisch auszudrücken. Entwickelt man aus (11) die Verhältnisse der x , so erhält man die Coordinaten eines beweglichen Punkts der Doppelcurve als

ganze Functionen dritter Ordnung von λ . Führt man diese Werthe in (12) ein, so wird die Gleichung durch $\lambda - \mu$ theilbar, und nach Entfernung dieses Factors bleibt ein Ausdruck von der Form

$$(14) \quad K_1 \xi_1 + K_2 \xi_2 + K_3 \xi_3 = 0 = J + \lambda J_1 + \lambda^2 J_2$$

zurück, in welchem die K quadratische Functionen von λ , die J lineare der ξ sind. Dagegen geht die Gleichung (13) in

$$(15) \quad \Sigma \Sigma Q_{ix} \xi_i \xi_x = 0 = P + \lambda P_1 + \lambda^2 P_2 + \lambda^3 P_3$$

über, wo die Q kubische Functionen von λ sind, die P quadratische der ξ . Eliminirt man aus (14) und (15) die Grösse λ , so erhält man die Gleichung der Curve 7^{ten} Grades, welche die Doppelcurve abbildet:

$$0 = \begin{vmatrix} P & P_1 & P_2 & P_3 & 0 \\ 0 & P & P_1 & P_2 & P_3 \\ J & J_1 & J_2 & 0 & 0 \\ 0 & J & J_1 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J & J_1 & J_2 \end{vmatrix}.$$

Bezeichnet man aber durch v_1, v_2, v_3 Coordinaten einer Geraden in der Bildebene, so erhält man die Gleichung des beweglichen Punktepaares dieser Abbildung, indem man aus den Gleichungen (14), (15) und der Gleichung

$$v_1 \xi_1 + v_2 \xi_2 + v_3 \xi_3 = 0$$

die ξ eliminirt, also die Gleichung bildet:

$$(16) \quad 0 = \begin{vmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & K_1 & v_1 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & K_2 & v_2 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & K_3 & v_3 \\ K_1 & K_2 & K_3 & 0 & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \Sigma \Sigma R_{ik} v_i v_k.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist immer in zwei für die v lineare Factoren (Punkte eines Paares) zerlegbar, und darf daher identisch gleich

$$(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3) (\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3)$$

gesetzt werden, wo die α, β die Coordinaten der Punkte eines Paares sind. Diese beiden linearen Factoren werden getrennt, indem man nach einem bekannten Determinantensatz:

$$\begin{aligned} & \Sigma \Sigma R_{ix} v_i v_x \cdot \Sigma \Sigma R_{ix} c_i c_x - (\Sigma \Sigma R_{ix} v_i c_x)^2 \\ &= - \begin{vmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & K_1 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & K_2 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & K_3 \\ K_1 & K_2 & K_3 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} K_1 & v_1 & c_1 \\ K_2 & v_2 & c_2 \\ K_3 & v_3 & c_3 \end{vmatrix}^2 \end{aligned}$$

setzt, wo die c ganz beliebige Grössen sind. Denn bezeichnet man durch Ω den Ausdruck

$$(16^a) \quad \Omega = \begin{vmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & K_1 \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & K_2 \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & K_3 \\ K_1 & K_2 & K_3 & 0 \end{vmatrix},$$

so kann man die Gleichung (16) jetzt durch die in den v lineare Gleichung ersetzen:

$$0 = \Sigma \Sigma R_{ix} v_i c_x \pm \begin{vmatrix} k_1 & v_1 & c_1 \\ k_2 & v_2 & c_2 \\ k_3 & v_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \sqrt{\Omega},$$

und man hat also für die Coordinaten eines Punktes α der Abbildung die Ausdrücke:

$$(17) \quad \begin{aligned} \varrho \alpha_1 &= R_{11} c_1 + R_{12} c_2 + R_{13} c_3 + (k_2 c_3 - k_3 c_2) \sqrt{\Omega} \\ \varrho \alpha_2 &= R_{12} c_1 + R_{22} c_2 + R_{23} c_3 + (k_3 c_1 - k_1 c_3) \sqrt{\Omega} \\ \varrho \alpha_3 &= R_{13} c_1 + R_{23} c_2 + R_{33} c_3 + (k_1 c_2 - k_2 c_1) \sqrt{\Omega}, \end{aligned}$$

während die Coordinaten β des zugehörigen Punktes aus diesen durch Veränderung des Zeichens von $\sqrt{\Omega}$ entsteht.

Die Gleichungen (17) sind die Gleichungen der Abbildung der Doppelcurve in einer Form, welche sogleich zeigt, dass die Curve auf die hyperelliptischen Functionen führt, bei welchen die Irrationalität $\sqrt{\Omega}$ auftritt. Die Grösse Ω ist von der 10^{ten} Ordnung in λ , was mit dem Geschlecht $p' = 4$ übereinstimmt.

Die Tangentenebenen eines Punktes der Doppelcurve fallen zusammen, sobald die jenem Punkte entsprechenden Punkte der Abbildung sich vereinigen, also bei $\Omega = 0$. Die Doppelcurve enthält daher zehn Punkte, welche Rückkehrpunkte der Oberfläche sind.

Aus der Gleichung (16) folgt, wenn man eine Reihe der v durch die K , die andere durch die c ersetzt, dass identisch

$$\Sigma \Sigma R_{ix} K_i c_x = 0.$$

Multipliziert man daher die Gleichungen (17) mit K_1, K_2, K_3 und addirt, so erhält man:

$$\alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 + \alpha_3 K_3 = 0,$$

und ebenso für die β , welche von den α nur durch das Vorzeichen von $\sqrt{\Omega}$ unterschieden sind:

$$\beta_1 K_1 + \beta_2 K_2 + \beta_3 K_3 = 0.$$

Die K verhalten sich daher wie die Coordinaten v_1, v_2, v_3 der Verbindungslinie α, β , und die Coordinaten der Tangenten des oben erwähn-

ten von diesen Verbindungslinien umhüllten Kegelschnittes sind also durch die Gleichungen gegeben:

$$(18) \quad \begin{aligned} \varphi v_1 &= K_1 \\ \varphi v_2 &= K_2 \\ \varphi v_3 &= K_3, \end{aligned}$$

deren rechte Seiten in der That quadratisch in λ sind.

§. 14.

Eigenschaften der Fläche, welche mit dem hyperelliptischen Charakter der Abbildung der Doppelcurve zusammenhängen.

Die Curve 7^{ter} Ordnung, durch welche die Doppelcurve abgebildet wird, hat die 11 Fundamentalpunkte zu Doppelpunkten, was 33 Bedingungen für die Coefficienten einer Curve 7^{ter} Ordnung ergibt. Da nun eine Curve 7^{ter} Ordnung erst durch 35 Bedingungen völlig bestimmt ist, so sind noch wenigstens zwei weitere Punkte nöthig, um die hier zu betrachtende Curve geometrisch zu bestimmen. Solche Punkte construirt man leicht in grösserer Anzahl, indem man die ebenen Schnitte der Oberfläche betrachtet, welche durch eine der 11 Geraden gehen. Ein Büschel von Ebenen, welches durch dieselbe Gerade geht, schneidet die Fläche noch in einem Büschel von Curven vierter Ordnung, und diese bilden sich nach §. 12 als ein Büschel von Curven vierter Ordnung ab, welche durch alle Fundamentalpunkte gehen, in dem jener Geraden entsprechenden aber einen Doppelpunkt besitzen. Diese Curven sind dadurch in der That 13 Bedingungen unterworfen, und ihre Gleichungen haben also die Form $\varphi + \lambda\psi = 0$; sie müssen sich also in 16 festen Punkten schneiden. Von diesen werden 14 durch die Fundamentalpunkte absorbiert; es bleiben also nur zwei weitere übrig. Indem man sie construirt, erhält man jedesmal zwei weitere Punkte der Curve 7^{ter} Ordnung. Denn diese beiden Punkte, da sie in der Ebene allen Curven des Büschels angehören, müssen auch im Raume auf Punkte führen, welche allen Curven des Raumbüschels gemein sind. Solcher Punkte aber giebt es in der That zwei; denn da die Gerade die Doppelcurve in zwei Punkten trifft, so liegen mit diesen auf der Fläche zwei Punkte vereinigt, durch welche alle Curven vierter Ordnung gehen, welche mit der Geraden zusammen ebene Schnitte bilden. Und zwar sieht man hieraus, dass die beiden so construirten Punkte Paare bilden mit den beiden Punkten der Curve 7^{ter} Ordnung, welche in dem entsprechenden Doppelpunkte vereinigt liegen. Wenn man also auf die 11 verschiedenen Arten solche zwei Punkte construirt, so hat man nicht nur 22 weitere Punkte der Curve 7^{ter} Ordnung; sondern indem man sie mit dem jedesmal entsprechenden Fundamentalpunkte verbindet, hat man auch 22 Tan-

genten des Kegelschnitts, welcher von den Verbindungslinien der Paare umhüllt wird.

Dieser Kegelschnitt selbst ist die Abbildung einer Raumcurve 8^{ter} Ordnung, welche auf der Oberfläche liegt. Um diese Curve geometrisch zu charakterisiren, stellt man folgende Betrachtung an. Bei der in §. 11 gegebenen Construction einer Abbildung, in welcher jedem Punkte eine Gerade entspricht, hatte man von dem Punkte L der Raumcurve aus, wie in §. 13 gezeigt ist, die Raumcurve zu projectiren, um einen Kegelschnitt zu erhalten, welcher den Punkten der Doppelcurve eindeutig entsprach. Legt man also durch L und eine Tangente der Raumcurve eine Ebene, so schneidet diese die Bildebene in einer Tangente dieses Kegelschnitts. Sonach sind also die Tangenten des Kegelschnittes die Bilder derjenigen Punkte, in welchen die Tangenten der Doppelcurve die Fläche nochmals schneiden. Und indem man dieses dualistisch überträgt, findet man den Satz:

Der von den Verbindungslinien der Paare umhüllte Kegelschnitt ist die Abbildung der Curve achter Ordnung, in welcher die Fläche fünfter Ordnung von der abwickelbaren Fläche der Tangenten der Doppelcurve geschnitten wird.

Der Umstand, dass die Tangenten des Kegelschnittes die Curve 7^{ter} Ordnung immer so treffen, dass unter den Schnittpunkten ein Paar ist, führt auf den Satz:

Es giebt auf der Fläche eine einfache Schaar von Raumcurven vierter Ordnung, welche die erwähnte Curve achter Ordnung berühren, und der Reihe nach die Punkte der Doppelcurve zu wirklichen Doppelpunkten haben.

Da es unter den Punkten der Doppelcurve 10 Rückkehrpunkte giebt, d. h. 10 Fälle, in welchen die Punkte eines Paares unendlich nahe zusammenrücken, so enthält jene Schaar 10 Curven mit Rückkehrpunkt; ihre Bilder befinden sich unter den gemeinsamen Tangenten des Kegelschnittes und der Curve 7^{ter} Ordnung, deren Zahl 40 ist, da die Classe der Curve 7^{ter} Ordnung gleich $7 \cdot 6 - 2 \cdot 11 = 20$ wird.

Die Punktepaaire, welche auf der Curve 7^{ter} Ordnung auftreten, geben ihr nicht nur die Eigenschaft auf hyperelliptische Functionen zu führen, sondern geben ihr zugleich besondere Eigenschaften, die von denen der andern Curven 7^{ter} Ordnung mit jenen 11 Doppelpunkten, welche auf allgemeinere Abel'sche Functionen führen, wesentlich verschieden sind.

Jede Curve vierter Ordnung, welche durch die 11 Fundamentalpunkte geht, schneidet unsere Punktepaaire 7^{ter} Ordnung in 3 Punkte

paaren. Obgleich also $p' = 4$, so bestimmen doch nicht 2 solcher 6 Schnittpunkte die 4 übrigen, sondern jeder bestimmt einen gewissen andern, welcher mit ihm ein Paar bildet. Alle Curven vierter Ordnung durch jene 11 Punkte bilden ein System mit drei Parametern, und schneiden die Curve 7^{ter} Ordnung in 6 beweglichen Punkten; alle Curven aber dieser dreifach unendlichen Schaar, welche durch einen weitem festen Punkt gehen, enthalten noch einen andern, und bilden eine zweifach unendliche Schaar, welche die Curve 7^{ter} Ordnung nur noch in vier beweglichen Punkten trifft; alle Curven der Doppelschaar, welche durch einen dritten festen Punkt der Curve 7^{ter} Ordnung gehen, treffen sie dann noch in einem vierten, haben nur zwei bewegliche Schnittpunkte mit ihr und bilden eine einfach unendliche Schaar. Während es also im Allgemeinen bei $p' = 4$ zu jedem Punkte einer Curve n^{ter} Ordnung nur zwei Punktpaare giebt, welche mit ihm und den Doppelpunkten der Curve eine Curve $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung nicht bestimmen (vgl. Clebsch und Gordan, Theorie der Abel'schen Functionen, p. 213), so giebt es hier zu jedem Punkte unendlich viel solcher Punktpaare, von denen immer einer mit dem erstern ein Paar bildet, während der zweite beliebig ist, oder welche beide zusammen ein Paar bilden.

Diese besonderen Verhältnisse zeigen sich weiter insbesondere bei den Curven vierter Ordnung, welche durch die Fundamentalpunkte gehen und die Curve 7^{ter} Ordnung in gegebener Weise berühren. Erstlich kann eine solche Curve in einem Punkte berühren. Dieser Punkt aber muss dann mit dem ihm unendlich nahen ein Paar bilden, muss also die Abbildung eines Rückkehrpunktes sein; und es giebt also 10 doppelt unendliche Schaaren solcher Curven. Sie bilden die 10 doppelt unendlichen Schaaren von ebenen Schnitten ab, deren Ebenen durch je einen der Rückkehrpunkte gehen. Zweitens kann eine der Curven vierter Ordnung die Forderung erfüllen müssen, die Curve 7^{ter} Ordnung in zwei Punkten zu berühren. Dies sind entweder Abbildungen zweier Rückkehrpunkte, oder zwei Punkte eines Paares. Im ersten Falle erhält man die Bilder der $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ Schaaren von Schnittcurven, deren Ebenen durch zwei Rückkehrpunkte gehen; im andern Falle die doppelt unendliche Schaar von Bildern ebener Schnitte, deren Ebenen die Doppelcurve berühren. Endlich können Curven vierter Ordnung die Curve 7^{ter} Ordnung dreimal berühren. Dabei erhält man zunächst $2^{p-1}(2^p - 1) = 120$ einzelne Curven (vgl. Crelles Journal, Bd. 63. p. 208), Bilder ebener Schnitte, welche durch drei Rückkehrpunkte gehen. Aber ausserdem treten 10 einfach unendliche Schaaren auf, welche in den Punkten eines Paares und der Abbildung eines Rückkehrpunktes berühren; Abbildungen von

ebenen Schnitten, deren Ebenen die von einem Rückkehrpunkte an die Doppelcurve gezogenen Tangentenebenen sind.

Ausserdem können Curven vierter Ordnung durch die 11 Fundamentalpunkte die Curve 7^{ter} Ordnung zweimal dreipunktig berühren, wo denn beide Berührungspunkte ein Paar bilden. Die so erhaltene einfache Curvenschaar bildet die ebenen Schnitte ab, deren Ebenen die Schmiegeebenen der Raumcurve dritter Ordnung sind.

§. 15.

Flächen zweiter Ordnung, welche durch die Doppelcurve gehen. Die Gleichung der Abbildung der Doppelcurve.

Durch die Doppelcurve dritter Ordnung lassen sich unendlich viele Flächen zweiter Ordnung legen, deren jede die gegebene Oberfläche noch in einer Curve vierter Ordnung schneidet. Es ist eine Doppelschaar von Raumcurven vierter Ordnung, welche so entstehen. Nun sind die Gleichungen der durch die Raumcurve dritter Ordnung gelegten Flächen zweiter Ordnung in der Form enthalten:

$$(19) \quad 0 = \begin{vmatrix} L_1 & M_1 & \gamma_1 \\ L_2 & M_2 & \gamma_2 \\ L_3 & M_3 & \gamma_3 \end{vmatrix},$$

in welcher die γ willkürliche Constante bedeuten. Aber nach den letzten beiden Gleichungen (4) verhalten sich für Punkte der Fläche fünfter Ordnung die Unterdeterminanten der L, M wie die ξ , so dass, wenn man statt der x_i die Functionen f_i setzt, die Gleichungen stattfinden:

$$(20) \quad \begin{aligned} L_2 M_3 - L_3 M_2 &= S \cdot \xi_1 \\ L_3 M_1 - L_1 M_3 &= S \cdot \xi_2 \\ L_1 M_2 - L_2 M_1 &= S \cdot \xi_3. \end{aligned}$$

Die Gleichung (19) verwandelt sich hierdurch in:

$$(21) \quad S \cdot (\gamma_1 \xi_1 + \gamma_2 \xi_2 + \gamma_3 \xi_3) = 0,$$

wo die Parameter nur im zweiten Factor vorkommen. Dieser stellt also die bewegliche Schnittcurve des Systems (19) mit der Oberfläche dar, $S=0$ die feste, also die Doppelcurve, wie denn in der That auch S von der 7^{ten} Ordnung ist. Man hat also erstlich den Satz:

Die geraden Linien der Abbildung stellen diejenigen Curven vierter Ordnung und 2^{ter} Species dar, in welchen die durch die Doppelcurve gelegten Flächen zweiter Ordnung die Oberfläche schneiden.

Die Gleichung der Abbildung der Doppelcurve aber findet man, indem man die Gleichung (19) wirklich in die Form (20) über-

führt. Um diese Ueberführung zu bewerkstelligen, bemerke ich, dass die Gleichung (19) durch Elimination der η aus den Gleichungen:

$$(22) \quad \begin{cases} L_1 \eta_1 + L_2 \eta_2 + L_3 \eta_3 = 0 \\ M_1 \eta_1 + M_2 \eta_2 + M_3 \eta_3 = 0 \\ \gamma_1 \eta_1 + \gamma_2 \eta_2 + \gamma_3 \eta_3 = 0 \end{cases}$$

entsteht. An Stelle der ersten dieser Gleichungen kann man nach (6) setzen:

$$\Sigma \left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial \xi_1} \eta_1 + \frac{\partial \lambda_i}{\partial \xi_2} \eta_2 + \frac{\partial \lambda_i}{\partial \xi_3} \eta_3 \right) x_i = 0,$$

oder, wenn man für die x aus (8) ihre Werthe setzt, die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \xi_1} \eta_1 + \frac{\partial \lambda_1}{\partial \xi_2} \eta_2 + \frac{\partial \lambda_1}{\partial \xi_3} \eta_3 & \lambda_1 & \mu_1 & \varphi_1 \\ \frac{\partial \lambda_2}{\partial \xi_1} \eta_1 + \frac{\partial \lambda_2}{\partial \xi_2} \eta_2 + \frac{\partial \lambda_2}{\partial \xi_3} \eta_3 & \lambda_2 & \mu_2 & \varphi_2 \\ \frac{\partial \lambda_3}{\partial \xi_1} \eta_1 + \frac{\partial \lambda_3}{\partial \xi_2} \eta_2 + \frac{\partial \lambda_3}{\partial \xi_3} \eta_3 & \lambda_3 & \mu_3 & \varphi_3 \\ \frac{\partial \lambda_4}{\partial \xi_1} \eta_1 + \frac{\partial \lambda_4}{\partial \xi_2} \eta_2 + \frac{\partial \lambda_4}{\partial \xi_3} \eta_3 & \lambda_4 & \mu_4 & \varphi_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Führt man nun für λ_i den Werth

$$\lambda_i = \frac{\partial \lambda_i}{\partial \xi_1} \xi_1 + \frac{\partial \lambda_i}{\partial \xi_2} \xi_2 + \frac{\partial \lambda_i}{\partial \xi_3} \xi_3$$

ein, so übersieht man leicht, dass man dieser Gleichung auch die Form geben kann:

$$0 = \begin{vmatrix} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \lambda_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \lambda_1}{\partial \xi_3} & \mu_1 & \varphi_1 \\ \frac{\partial \lambda_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \lambda_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \lambda_2}{\partial \xi_3} & \mu_2 & \varphi_2 \\ \frac{\partial \lambda_3}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \lambda_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \lambda_3}{\partial \xi_3} & \mu_3 & \varphi_3 \\ \frac{\partial \lambda_4}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \lambda_4}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \lambda_4}{\partial \xi_3} & \mu_4 & \varphi_4 \\ \eta_2 \xi_3 - \eta_3 \xi_2 & \eta_3 \xi_1 - \eta_1 \xi_3 & \eta_1 \xi_2 - \eta_2 \xi_1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

oder, indem man nach der letzten Reihe ordnet, und unter p_1, p_2, p_3 die nicht mit Null multiplicirten Unterdeterminanten versteht:

$$0 = \begin{vmatrix} p_1 & \eta_1 & \xi_1 \\ p_2 & \eta_2 & \xi_2 \\ p_3 & \eta_3 & \xi_3 \end{vmatrix}.$$

Ganz ebenso verwandelt sich die zweite Gleichung (22) in:

$$0 = - \begin{vmatrix} \frac{\partial \mu_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \mu_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \mu_1}{\partial \xi_3} & \lambda_1 \varphi_1 \\ \frac{\partial \mu_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \mu_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \mu_2}{\partial \xi_3} & \lambda_2 \varphi_2 \\ \frac{\partial \mu_3}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \mu_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \mu_3}{\partial \xi_3} & \lambda_3 \varphi_3 \\ \frac{\partial \mu_4}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \mu_4}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \mu_4}{\partial \xi_3} & \lambda_4 \varphi_4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} q_1 & \eta_1 & \xi_1 \\ q_2 & \eta_2 & \xi_2 \\ q_3 & \eta_3 & \xi_3 \end{vmatrix}$$

$$+ \eta_2 \xi_3 - \eta_3 \xi_2 \quad \eta_3 \xi_1 - \eta_1 \xi_3 \quad \eta_1 \xi_2 - \eta_2 \xi_1 \quad 0 \quad 0$$

Benutzt man nun die so transformirten Gleichungen, so wird

$$\begin{vmatrix} L_1 & M_1 & \gamma_1 \\ L_2 & M_2 & \gamma_2 \\ L_3 & M_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} p_1 \xi_3 - p_3 \xi_2 & q_2 \xi_3 - q_3 \xi_2 & \gamma_1 \\ p_3 \xi_1 - p_1 \xi_3 & q_3 \xi_1 - q_1 \xi_3 & \gamma_2 \\ p_1 \xi_2 - p_2 \xi_1 & q_1 \xi_2 - q_2 \xi_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} =$$

$$= - (\gamma_1 \xi_1 + \gamma_2 \xi_2 + \gamma_3 \xi_3) \Sigma \pm p_1 q_2 \xi_3.$$

Man hat daher

$$S = - \Sigma \pm p_1 q_2 \xi_3,$$

und die Gleichung der Abbildung der Doppelcurve wird:

$$\Sigma \pm p_1 q_2 \xi_3 = 0.$$

§. 16.

Flächen vierter Ordnung, welche längs einer Raumeurve zehnter Ordnung berühren.

Eine bemerkenswerthe Schaar von Curven erhält man durch Betrachtung einer Art von Oberflächen vierter Ordnung, welche die gegebene Fläche längs einer Curve berühren. Bezeichnet man durch $\Phi_{xx'}$ den Ausdruck

$$(23) \quad \Phi_{xx'} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & L_1 + \kappa M_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & L_2 + \kappa M_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & L_3 + \kappa M_3 \\ L_1 + \kappa' M_1 & L_2 + \kappa' M_2 & L_3 + \kappa' M_3 & 0 \end{vmatrix},$$

so ist nach bekannten Sätzen $\Phi_{xx} \Phi_{x'x'} - \Phi_{xx'}^2$ gleich dem Produkt der Determinante der A mit einer andern Determinante, welche entsteht, indem man jene mit den beiden Reihen $L_i + \kappa M_i$, $L_i + \kappa' M_i$ gleichzeitig horizontal und vertikal rändert. Aber die letztere Determinante ist $(\kappa - \kappa')^2$ multiplicirt mit der Determinante, welche nach (3) gleich Null gesetzt die gegebene Fläche darstellt. Jede Fläche $\Phi_{xx'}$ schneidet daher die gegebene Fläche so, dass im Durchschnitt $\Phi_{xx'}^2 = 0$, d. h. sie schneidet in zwei zusammenfallenden Curven, oder sie berührt längs einer Curve. Man hat so den Satz:

Die Flächen $\Phi_{xx} = 0$ bilden eine einfache Schaar von Flächen vierter Ordnung, welche die gegebene Fläche längs Raumcurven zehnter Ordnung berühren, und je zwei solcher Raumcurven, welche von den Berührungen mit den Flächen $\Phi_{xx} = 0$, $\Phi_{x'x'} = 0$ herrühren, liegen auf einer Fläche der doppelt unendlichen Schaar $\Phi_{xx'} = 0$.

Um nun die Lage der Fläche $\Phi_{xx'} = 0$ näher zu untersuchen, kann man zunächst ihre 12 Durchschnittspunkte mit der Doppelcurve der Fläche fünfter Ordnung bestimmen. Von diesen Punkten sind zwei die durch die Parameter x und x' bestimmten Punkte der Raumcurve dritter Ordnung, welche durch die Gleichungen

$$L_1 + x M_1 = 0, \quad L_2 + x M_2 = 0, \quad L_3 + x M_3 = 0$$

und

$$L_1 + x' M_1 = 0, \quad L_2 + x' M_2 = 0, \quad L_3 + x' M_3 = 0$$

gegeben sind. Die Flächen $\Phi_{xx} = 0$ berühren also die Raumcurve in dem durch den Parameter x auf ihr bestimmten Punkte. Die anderen 10 Schnittpunkte der Doppelschaar $\Phi_{xx'} = 0$ mit der Curve dritter Ordnung sind fest; es sind nämlich keine andern, als die auf letzterer gelegenen Rückkehrpunkte der Fläche fünfter Ordnung. Um dieses nachzuweisen, genügt es, auf die Betrachtungen des §. 13 zurückzugehen. Indem man nämlich für die x_i die Functionen dritter Ordnung von λ einsetzt, welche jene Grössen als Coordinaten eines Punktes der Raumcurve charakterisiren, verwandelten sich die A_{ix} in Q_{ix} , die Grössen $L_i + x M_i$ und $L_i + x' M_i$ in $(x - \lambda) K_i$ und $(x' - \lambda) K_i$. Daher verwandelt sich der Ausdruck (23) in (vgl. 16^a)

$$(x - \lambda) (x' - \lambda) \cdot \Omega = 0.$$

Die oben erwähnten Punkte der Doppelcurve werden durch die ersten beiden Factoren gegeben; der letzte führt auf die 10 Rückkehrpunkte.

Der vollständige Durchschnitt der Fläche 4^{ter} Ordnung $\Phi_{xx'} = 0$ mit der gegebenen Fläche muss sich als Curve von der Ordnung $4 \cdot 4 = 16$ abbilden; aber da sich nach dem Vorigen dieser Durchschnitt in die Berührungscurven der letztern Fläche mit den Flächen $\Phi_{xx} = 0$ und $\Phi_{x'x'} = 0$ auflöst, so muss jede einzelne dieser Berührungscurven sich als Curve achter Ordnung abbilden. Die Gleichung der Abbildung einer solchen Curve findet man leicht aus den Gleichungen (4), indem man bemerkt, dass, sobald man $\mu = x\lambda$ setzt, und an Stelle der letzten beiden Gleichungen (4) die Combination

$$(L_1 + x' M_1) \xi_1 + (L_2 + x' M_2) \xi_2 + (L_3 + x' M_3) \xi_3 = 0$$

treten lässt, die Elimination der ξ sofort $\Phi_{xx'} = 0$ liefert. Begnügt man sich also $\mu = x\lambda$ zu setzen, ohne von dieser letzten Combination Gebrauch zu machen, so erhält man die Gleichungen für die gemeinsame Schnittcurve der gegebenen Fläche mit den Flächen $\Phi_{xx} = 0$,

welches auch κ' sei, d. h. die Berührungscurve mit $\Phi_{xx} = 0$. Die fraglichen Gleichungen sind also:

$$\begin{aligned}
 (23^a) \quad & A_{11}\xi_1 + A_{12}\xi_2 + A_{13}\xi_3 = (L_1 + \kappa M_1) \lambda \\
 & A_{21}\xi_1 + A_{22}\xi_2 + A_{23}\xi_3 = (L_2 + \kappa M_2) \lambda \\
 & A_{31}\xi_1 + A_{32}\xi_2 + A_{33}\xi_3 = (L_3 + \kappa M_3) \lambda \\
 & L_1 \xi_1 + L_2 \xi_2 + L_3 \xi_3 = 0 \\
 & M_1 \xi_1 + M_2 \xi_2 + M_3 \xi_3 = 0.
 \end{aligned}$$

Die gesuchte Abbildung findet man, indem man aus diesen Gleichungen λ und die x eliminirt. Zu diesem Ende schreibt man die obigen Gleichungen passender in der folgenden Form, in welche sie durch die identischen Gleichungen (6) sogleich übergeführt werden:

$$\begin{aligned}
 x_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_1} + x_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_1} + x_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi_1} + x_4 \frac{\partial \varphi_4}{\partial \xi_1} &= 2\lambda (L_1 + \kappa M_1) \\
 x_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_2} + x_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_2} + x_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi_2} + x_4 \frac{\partial \varphi_4}{\partial \xi_2} &= 2\lambda (L_2 + \kappa M_2) \\
 x_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_3} + x_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_3} + x_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi_3} + x_4 \frac{\partial \varphi_4}{\partial \xi_3} &= 2\lambda (L_3 + \kappa M_3) \\
 x_1 \lambda_1 + x_2 \lambda_2 + x_3 \lambda_3 + x_4 \lambda_4 &= 0 \\
 x_1 \mu_1 + x_2 \mu_2 + x_3 \mu_3 + x_4 \mu_4 &= 0.
 \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen folgt das Verschwinden der Determinante:

$$(24) \quad \Psi_{\kappa} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \varphi_4}{\partial \xi_1} & L_1 + \kappa M_1 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \varphi_4}{\partial \xi_2} & L_2 + \kappa M_2 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_3} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_3} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi_3} & \frac{\partial \varphi_4}{\partial \xi_3} & L_3 + \kappa M_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & 0 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Dieser Ausdruck ist vom vierten Grade in den ξ , enthält aber auch noch die x , und zwar linear, in der letzten Vertikalreihe. Setzt man für diese die ihnen proportionalen Grössen f_i ein, so erhält man eine Gleichung achten Grades, die Gleichung der gesuchten Abbildungscurve.

Man sieht aus der Form (24), dass die Abbildungen der Berührungscurven der Flächen $\Phi_{xx} = 0$ mit der gegebenen Fläche die Gleichungsform

$$U + \kappa V = 0$$

annehmen, also ein Büschel von Curven achter Ordnung bilden. Von den 64 Grundpunkten dieses Büschels sind 10 die Abbildungen der Rückkehrpunkte, 44 fallen in die Fundamentalpunkte, von den letzten 10 wird weiterhin zu sprechen sein. Was das Verhalten des Büschels

gegen die Fundamentalpunkte betrifft, so ist leicht zu sehen, dass jede Curve des Büschels jeden Fundamentalpunkt zum Doppelpunkt hat, wodurch denn in der That jeder Fundamentalpunkt vierfacher Grundpunkt des Büschels wird. Multiplicirt man nämlich die Gleichung (24), welche eine Curve des Büschels darstellt, mit der Gleichung einer beliebigen in der Bildebene liegenden Geraden:

$$\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \alpha_3 \xi_3 = 0,$$

so kann man das Product als Determinante mit sechs Reihen darstellen, welche aus der Determinante (24) entsteht, indem man die Vertikalreihe

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, 0, 0, \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \alpha_3 \xi_3$$

hinzufügt, und die fehlenden Glieder der letzten Vertikalreihe durch Nullen ergänzt. Zieht man nun die ersten drei Horizontalreihen, mit ξ_1, ξ_2, ξ_3 multiplicirt, von der letzten ab, und dividirt diese durch -2 , so bleibt die Gleichung:

$$0 = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \varphi_4}{\partial \xi_1} & L_1 + \kappa M_1 & \alpha_1 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \varphi_4}{\partial \xi_2} & L_2 + \kappa M_2 & \alpha_2 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_3} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_3} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi_3} & \frac{\partial \varphi_4}{\partial \xi_3} & L_3 + \kappa M_3 & \alpha_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & 0 & 0 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & 0 & 0 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

ein Ausdruck, welcher für die vier Unterdeterminanten f_i homogen vom zweiten Grade ist; denn eine Anordnung nach den letzten drei Reihen giebt die einfachere Form

$$(24^a) \quad 0 = \begin{vmatrix} f_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_1} + f_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_1} + f_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi_1} + f_4 \frac{\partial \varphi_4}{\partial \xi_1} & L_1 + \kappa M_1 & \alpha_1 \\ f_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_2} + f_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_2} + f_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi_2} + f_4 \frac{\partial \varphi_4}{\partial \xi_2} & L_2 + \kappa M_2 & \alpha_2 \\ f_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_3} + f_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_3} + f_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi_3} + f_4 \frac{\partial \varphi_4}{\partial \xi_3} & L_3 + \kappa M_3 & \alpha_3 \end{vmatrix},$$

wo die beiden ersten Vertikalreihen für die f_i linear sind. Die 11 gemeinsamen Verschwindungspunkte sind also Doppelpunkte dieser, und daher auch der Curve (24).

Die 56 Schnittpunkte der Abbildung der Doppelcurve mit den Abbildungen der in Rede stehenden Berührungscuren sind hiernach die 11 viermal zu rechnenden Fundamentalpunkte, die Abbildungen der 10 Rückkehrpunkte, und endlich ein bewegliches Punktepaar, die Abbildung des die Berührungscurve charakterisirenden Punktes der Doppelcurve.

Die 10 fehlenden Grundpunkte des Büschels achter Ordnung sind Abbildungen der Punkte, in denen sich alle Flächen $\Phi_{xx'}$ mit der Fläche fünfter Ordnung noch treffen, und welche nicht der Doppelcurve angehören, welche also wirkliche Berührungspunkte dieser Flächen mit der Fläche fünfter Ordnung sind. Man findet diese Abbildungen in folgender Weise. Die Gleichungen (24) werden erfüllt, unabhängig von x , indem man in (4) λ und μ verschwinden lässt, und also von dem Systeme ausgeht:

$$(25) \quad \begin{cases} 0 = A_{11} \xi_1 + A_{12} \xi_2 + A_{13} \xi_3 = \frac{1}{2} \Sigma \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi_1} x_i \\ 0 = A_{21} \xi_1 + A_{22} \xi_2 + A_{23} \xi_3 = \frac{1}{2} \Sigma \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi_2} x_i \\ 0 = A_{31} \xi_1 + A_{32} \xi_2 + A_{33} \xi_3 = \frac{1}{2} \Sigma \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi_3} x_i \\ 0 = L_1 \xi_1 + L_2 \xi_2 + L_3 \xi_3 = \Sigma \lambda_i x_i \\ 0 = M_1 \xi_1 + M_2 \xi_2 + M_3 \xi_3 = \Sigma \mu_i x_i \end{cases}$$

Dies sind fünf Gleichungen, in denen die drei Verhältnisse der x mit den zwei Verhältnissen der ξ die Unbekannten bilden, welche also dadurch bestimmt sind. Die Punkte x , welche durch diese Gleichungen gegeben werden, liegen nicht auf der Doppelcurve; denn wenn man

$$L_1 + \lambda M_1 = 0, \quad L_2 + \lambda M_2 = 0, \quad L_3 + \lambda M_3 = 0$$

setzt, und die x aus diesen Gleichungen durch λ ausdrückt, so reduciren sich nach §. 13 die Gleichungen (25) auf das System

$$\begin{aligned} Q_{11} \xi_1 + Q_{12} \xi_2 + Q_{13} \xi_3 &= 0 \\ Q_{21} \xi_1 + Q_{22} \xi_2 + Q_{23} \xi_3 &= 0 \\ Q_{31} \xi_1 + Q_{32} \xi_2 + Q_{33} \xi_3 &= 0 \\ K_1 \xi_1 + K_2 \xi_2 + K_3 \xi_3 &= 0, \end{aligned}$$

welche keine gemeinsame Lösung gestatten. Um die Anzahl der gemeinsamen Lösungen der Gleichungen (25) zu bestimmen, eliminiert man die x der Reihe nach aus je vier der Gleichungen. Die Eliminationsresultate seien, je nachdem man die erste, zweite u. s. w. Gleichung ausgelassen hat:

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = 0, \quad A = 0, \quad M = 0.$$

Die Ausdrücke F_1, F_2, F_3, A, M sind dann durch die vier Gleichungen verbunden ($i = 1, 2, 3, 4$):

$$F_1 \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi_1} + F_2 \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi_2} + F_3 \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi_3} + A \lambda_i + M \mu_i = 0.$$

Nun haben die Curven $A = 0, M = 0$, welche von der vierten Ordnung sind, 16 Punkte gemein. Diese Punkte sind theils solche, für

welche F_1, F_2, F_3 verschwinden, und welche also zu den gesuchten gehören, theils solche, für welche die F_k irgend welchen Werth η_k haben, so dass aus der obigen Identität die 4 Gleichungen folgen:

$$\eta_1 \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi_1} + \eta_2 \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi_2} + \eta_3 \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi_3} = 0.$$

Die Lösungen dieser für die ξ, η symmetrischen Gleichungen erhält man aber aus den Punkten der Paare, welche für die vier Kegelschnitte

$$\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0, \varphi_3 = 0, \varphi_4 = 0$$

gleichzeitig harmonisch sind, und deren Anzahl gleich 3 ist, wie ich in Crelles Journal Bd. 67, p. 3 gezeigt habe. Die Gleichungen (25) haben daher $16 - 6 = 10$ Lösungen, wie zu beweisen war. Die Doppelschaar $\Phi_{xx} = 0$ berührt also die gegebene Fläche in 10 festen Punkten, deren Bestimmung durch das Vorliegende erreicht ist.

Aber es giebt unendlich viele Systeme von Flächen $\Phi_{xx'} = 0$. Denn aus der Gleichung der Fläche sind die A_{ix} nicht völlig bestimmt, sondern man kann statt der A_{ix} die Ausdrücke

$$(26) \quad A'_{ix} = A_{ix} + \gamma_i L_x + \gamma_x L_i + \delta_i M_x + \delta_x M_i$$

setzen, wobei die γ_i, δ_i willkürliche Constante sind. In den Gleichungen (4) ändert sich dadurch nichts, als dass an Stelle von λ, μ die Grössen

$$(27) \quad \begin{aligned} \lambda' &= \lambda + \gamma_1 \xi_1 + \gamma_2 \xi_2 + \gamma_3 \xi_3 \\ \mu' &= \mu + \delta_1 \xi_1 + \delta_2 \xi_2 + \delta_3 \xi_3 \end{aligned}$$

treten. Wohl aber ändern sich die Flächen $\Phi_{xx'} = 0$ sowohl, als ihre Schnittcurven mit den Flächen fünfter Ordnung. Die neuen Flächen $\Phi'_{xx'} = 0$ erhält man, indem man in (23) die A'_{ix} an Stelle der A_{ix} setzt. Eine kleine Rechnung zeigt, dass $\Phi'_{xx'}$ dann folgenden Ausdruck annimmt:

$$\begin{aligned} \Phi'_{xx'} = \Phi_{xx'} - & \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & L_1 + \kappa M_1 & \delta_1 - \kappa' \gamma_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & L_2 + \kappa M_2 & \delta_2 - \kappa' \gamma_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & L_3 + \kappa M_3 & \delta_3 - \kappa' \gamma_3 \\ L_1 & L_2 & L_3 & 0 & 0 \\ M_1 & M_2 & M_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ - & \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & L_1 + \kappa' M_1 & \delta_1 - \kappa \gamma_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & L_2 + \kappa' M_2 & \delta_2 - \kappa \gamma_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & L_3 + \kappa' M_3 & \delta_3 - \kappa \gamma_3 \\ L_1 & L_2 & L_3 & 0 & 0 \\ M_1 & M_2 & M_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ + & \begin{vmatrix} L_1 & M_1 & \delta_1 - \kappa \gamma_1 \\ L_2 & M_2 & \delta_2 - \kappa \gamma_2 \\ L_3 & M_3 & \delta_3 - \kappa \gamma_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} L_1 & M_1 & \delta_1 - \kappa' \gamma_1 \\ L_2 & M_2 & \delta_2 - \kappa' \gamma_2 \\ L_3 & M_3 & \delta_3 - \kappa' \gamma_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Den Einfluss des Einführens der A'_{ix} an Stelle der A_{ix} auf die Schnittcurven der Flächen $\Phi_{xx'} = 0$ mit der Fläche fünfter Ordnung, oder die Berührungscurven der Flächen $\Phi_{xx} = 0$ findet man am einfachsten aus den Gleichungen $\Psi'_x = 0$ ihrer Abbildungen (24). Aus (26) folgt

$$\Sigma \Sigma A'_{ix} \xi_i \xi_x = \Sigma \varphi'_i x_i = \Sigma \varphi_i x_i + 2 \Sigma \lambda_i x_i \Sigma \gamma_x \xi_x + 2 \Sigma \mu_i x_i \Sigma \delta_x \xi_x;$$

daher

$$\varphi'_i = \varphi_i + 2 \lambda_i \Sigma \gamma_x \xi_x + 2 \mu_i \Sigma \delta_x \xi_x,$$

so dass die Functionen f_i offenbar nicht geändert werden, also $f'_i = f_i$ ist. Nehmen wir daher an Stelle der Gleichung (24) die Gleichung (24^a), deren rechte Seite den Werth $-\frac{1}{2} \Psi_x (\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \alpha_3 \xi_3)$ hat, und ersetzen in ihr die A_{ix} durch die A'_{ix} , so hat man nur die Functionen φ in der ersten Vertikalreihe zu verändern, und man erhält also für die transformirte Function Ψ'_x die Gleichung:

$$-\frac{1}{2} \Psi'_x (\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \alpha_3 \xi_3) = -\frac{1}{2} \Psi_x (\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \alpha_3 \xi_3) +$$

$$+ 2 \Sigma \gamma_x \xi_x \left| \begin{array}{ccc} \Sigma \frac{\partial \lambda_i}{\partial \xi_1} f_i & L_1 + \kappa M_1 & \alpha_1 \\ \Sigma \frac{\partial \lambda_i}{\partial \xi_2} f_i & L_2 + \kappa M_2 & \alpha_2 \\ \Sigma \frac{\partial \lambda_i}{\partial \xi_3} f_i & L_3 + \kappa M_3 & \alpha_3 \end{array} \right|$$

$$+ 2 \Sigma \delta_x \xi_x \left| \begin{array}{ccc} \Sigma \frac{\partial \mu_i}{\partial \xi_1} f_i & L_1 + \kappa M_1 & \alpha_1 \\ \Sigma \frac{\partial \mu_i}{\partial \xi_2} f_i & L_2 + \kappa M_2 & \alpha_2 \\ \Sigma \frac{\partial \mu_i}{\partial \xi_3} f_i & L_3 + \kappa M_3 & \alpha_3 \end{array} \right|$$

Bemerken wir, dass hier die Grössen L_i, M_i so verstanden werden, dass in ihnen die x_i durch die f_i ersetzt werden, so sehen wir, dass in den beiden letzten Determinanten die ersten Vertikalreihen beziehungsweise von den L_i, M_i nicht verschieden sind. Daher hat man einfacher:

$$\Psi'_x (\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \alpha_3 \xi_3) = \Psi_x (\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \alpha_3 \xi_3) + 4 \Sigma (\delta_x - \kappa \gamma_x) \xi_x \cdot \Sigma \pm L_i M_i \alpha_i.$$

Nun ist nach §. 15

$$\Sigma \pm L_i M_i \alpha_i = S \cdot (\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \alpha_3 \xi_3),$$

wo $S = 0$ die Abbildung der Doppelcurve ist. Daher bleibt übrig:

$$(28) \quad \Psi'_x = \Psi_x + (m_1 \xi_1 + m_2 \xi_2 + m_3 \xi_3) S$$

wobei nur m_i für den ganz beliebigen Coefficienten $4 (\delta_x - \kappa \gamma_x)$ gesetzt ist.

Die Curven zehnter Ordnung, welche die Berührungscurven der Flächen vierter Ordnung mit der gegebenen

Fläche sind, bilden daher eine vierfach unendliche Schaar. Ihre Abbildungen setzen sich aus einem der oben beschriebenen besondern Büschel und aus der Combination der Abbildung der Doppelcurve mit einer willkürlichen Geraden zusammen. Alle haben mit der Abbildung der Doppelcurve die Doppelpunkte und die Abbildungen der Rückkehrpunkte gemein; und durch jedes Punktepaar von $S = 0$ geht noch eine dreifach unendliche Schaar von Curven, so dass also im Raume eine dreifach unendliche Schaar von Berührungscurven durch jeden Punkt der Doppelcurve hindurchgeht.

Jede Gerade der Abbildung stellt nach §. 15 eine Curve vierter Ordnung und 2^{ter} Species dar, welche der Schnitt der Oberfläche fünfter Ordnung mit einer durch die Doppelcurve gelegten Fläche zweiter Ordnung ist. Eine jede solche bestimmt eine Gerade der Abbildung, also in (28) die Verhältnisse der m ; die Raumcurve vierten Grades wird von der durch $\mathcal{P}_x = 0$ abgebildeten Raumcurve zehnter Ordnung in 8 Punkten (Schnittpunkte der Geraden mit $\mathcal{P}_x = 0$ in der Abbildung) getroffen, und jedes solche Punktsystem bestimmt dann mit der Raumcurve zehnter Ordnung zusammen eine einfach unendliche Schaar von Berührungscurven zehnter Ordnung, welche durch jene acht Punkte hindurchgehen, u. s. w.

§. 17.

Flächen fünfter Ordnung mit zwei sich nicht schneidenden Doppelgeraden. Niedrigste Abbildung auf einer Ebene.

Ich gehe jetzt zur Betrachtung der Fläche fünfter Ordnung mit zwei sich nicht schneidenden Doppelgeraden über, die einfachste auf einer Ebene abbildbare Fläche, bei welcher die Ordnung von dem Geschlechte des ebenen Schnittes der allgemeinen Regel (§. 1) entgegen um weniger als 3 verschieden ist. Die Doppelgeraden seien $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$, $x_4 = 0$. Dann muss jeder Term der Flächengleichung wenigstens von der zweiten Dimension für x_1 , x_2 und ebenso von der zweiten für x_3 , x_4 sein. Setzt man daher in jener Gleichung

$$(1) \quad x_2 = \lambda x_1, \quad x_4 = \mu x_3,$$

so geht die Gleichung der Fläche nach Division mit $x_1^2 x_3^2$ in eine Form über, welche die x nur noch linear enthält, während sowohl λ als μ quadratisch darin vorkommt, also, wenn man nach den x ordnet:

$$(2) \quad 0 = A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + A_4 x_4,$$

wo die A Functionen sind, welche sowohl λ als μ quadratisch enthalten. Aus (1) und (2) zusammen folgt:

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \varrho x_1 &= A_3 + \mu A_4 \\
 \varrho x_2 &= \lambda (A_3 + \mu A_4) \\
 \varrho x_3 &= -(A_1 + \lambda A_2) \\
 \varrho x_4 &= -\mu (A_1 + \lambda A_2),
 \end{aligned}$$

wodurch die Abbildung gegeben ist. Setzt man in diesen Gleichungen

$$(4) \quad \lambda = \frac{\xi_1}{\xi_3}, \quad \mu = \frac{\xi_2}{\xi_3},$$

und multiplicirt mit ξ_3^6 , so gehen aus den A_i homogene Functionen vierter Ordnung B_i hervor, welche sowohl ξ_1 als ξ_2 nur quadratisch enthalten. Und die Gleichungen der Abbildung werden also:

$$\begin{aligned}
 (5) \quad \varrho x_1 &= (\xi_3 B_3 + \xi_2 B_4) \xi_3 \\
 \varrho x_2 &= (\xi_3 B_3 + \xi_2 B_4) \xi_1 \\
 \varrho x_3 &= -(\xi_3 B_1 + \xi_1 B_2) \xi_3 \\
 \varrho x_4 &= -(\xi_3 B_1 + \xi_1 B_2) \xi_2.
 \end{aligned}$$

Diese Gleichungen zeigen zunächst, dass die Doppelgeraden

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0 \quad \text{und} \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0$$

durch die beiden Curven fünfter Ordnung

$$(6) \quad \xi_3 B_3 + \xi_2 B_4 = 0, \quad \xi_3 B_1 + \xi_1 B_2 = 0$$

abgebildet werden. Die erste dieser Gleichungen ist für ξ_2, ξ_3 homogen von der dritten, für ξ_1, ξ_3 homogen von der zweiten Ordnung, bei der zweiten ist es umgekehrt. Die erste Curve hat daher bei $\xi_2 = 0, \xi_3 = 0$ einen dreifachen, bei $\xi_1 = 0, \xi_3 = 0$ einen Doppelpunkt, die andere umgekehrt. Und zwar sind die beiden Curven (6) übrigens ganz allgemeiner Natur, da über die Coefficienten in den B nichts vorausgesetzt wurde, und da jede Curve der angegebenen Art sehr leicht und zwar auf unendlich viele Arten in der Form (6) dargestellt werden kann. Die beiden Curven (6) schneiden sich ausserdem noch in 13 einfachen Punkten.

Die Abbildung des Schnittes der Fläche mit der Ebene

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0$$

wird nach (5) durch die Curve sechsten Grades gegeben:

$$(7) \quad (a_1 \xi_3 + a_2 \xi_1) (\xi_3 B_3 + \xi_2 B_4) - (a_3 \xi_3 + a_4 \xi_2) (\xi_3 B_1 + \xi_1 B_2) = 0.$$

Betrachtet man die a_i als Parameter, so hat man ein System von Curven sechster Ordnung vor sich, welches erstlich durch alle Schnittpunkte der Curven (6) geht, zugleich aber durchaus homogen dritter Ordnung sowohl für ξ_1, ξ_3 als für ξ_2, ξ_3 ist, und also die beiden vielfachen Punkte der Curven (6) zu dreifachen Punkten hat. Zugleich umfasst die Gleichung (7) offenbar alle Curven sechster Ordnung, die das vollständige Schnittpunktsystem der Curven (6) enthalten, sich

also aus den Ausdrücken (6) zusammensetzen, und zugleich die beiden vielfachen Punkte jener Curven zu dreifachen Punkten haben.

Die Abbildung enthält also zwei dreifache und 13 einfache Fundamentalpunkte. Die letztern stellen 13 auf der Fläche liegende Gerade dar, und zwar, wie sich weiterhin zeigen wird, die einzigen Geraden, welche die Fläche ausser der Doppelgeraden enthält. Jede der erstern schneidet beide Doppelgerade, da sie in der Abbildung durch Schnittpunkte der Abbildungen der Doppelgeraden dargestellt werden.

Um die Construction der Abbildung zu erhalten, braucht man nur auf die Gleichungen (1) zurückzugehen. Legt man durch den Schnitt der Ebenen $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ eine Bildebene, so bilden in dieser die genannte Schnittlinie zusammen mit den Schnittlinien der Ebenen $x_2 = 0$ und $x_4 = 0$ ein Dreieck, dessen Seiten in der angeführten Folge a , b , c seien. Aus der Gleichung $x_2 - \lambda x_1 = 0$ sieht man, dass λ bis auf einen constanten Factor das Abstandsverhältniss des Punktes λ, μ der Fläche, also auch jedes Punktes in einer Linie ist, welcher von dem Punkte der Fläche aus nach dem Durchschnitte der Ebenen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ gezogen ist. Dies trifft für jeden Punkt des zum Punkte λ, μ der Fläche nach §. 2 zugehörigen Constructionsstrahles zu, also auch für den Punkt, wo dieser Strahl die angenommene Bildebene schneidet. Daher ist endlich λ bis auf einen andern constanten Factor das Abstandsverhältniss des so construirten Bildpunktes von den Geraden b , a in der Bildebene. Genau auf dieselbe Weise sieht man ein, dass μ bis auf einen constanten Factor das Abstandsverhältniss des Bildpunktes von den Geraden c , a ist. Endlich also, setzt man $\frac{\xi_1}{\xi_3}$ für λ , $\frac{\xi_2}{\xi_3}$ für μ , so sieht man, dass die ξ sich bis auf constante Factoren wie die Abstände des Bildpunktes von den Geraden b , c , a verhalten. Indem man also das Dreieck a , b , c zum Coordinatendreieck in der Bildebene wählt, werden die ξ nach §. 4 die Coordinaten des abbildenden Punktes der Bildebene, womit die geometrische Interpretation des in den Formeln (5) enthaltenen Abbildungsprocesses aufs einfachste gegeben ist, und zwar diesmal in einer Form, in welcher wirklich jedem Punkte der Fläche ein Punkt der Bildebene zugehört, während bei den früheren Abbildungen immer einem Punkte eine Gerade entsprach.

Die Schnittlinie der Ebenen $x_1 = 0$, $x_3 = 0$, welche als die Seite a des Coordinatendreiecks der Bildebene bezeichnet wurde, schneidet die Oberfläche fünfter Ordnung in einem Punkte. Wendet man die eben erwähnte Construction auf diesen Punkt an, so wird sein Constructionsstrahl die Seite a selbst. Aber diese schneidet die Bildebene nicht in einem Punkte, sondern gehört ganz der Bildebene an; daher entspricht dem gedachten Punkte der Oberfläche nicht ein Punkt der

Bildebene, sondern die ganze Gerade $\xi_3 = 0$. Man erkennt dies auch aus den Formeln (5). Denn setzt man in diesen $\xi_3 = 0$, so wird $x_1 = 0$, $x_3 = 0$, und die andern beiden Gleichungen nehmen die Form an:

$$(8) \quad \varrho x_2 = \alpha \xi_1^3 \xi_2^3, \quad \varrho x_4 = \beta \xi_1^3 \xi_2^3,$$

also noch

$$\alpha x_4 - \beta x_2 = 0.$$

Für $\xi_3 = 0$ erhält man also drei lineare Gleichungen zwischen den x , d. h. einen einzigen Punkt der Oberfläche, welcher der Geraden $\xi_3 = 0$ entspricht.

Aber es liegt sehr nahe, den besondern Fall zu untersuchen, in welchem die Gerade a eine der 13 Geraden der Oberfläche ist. Denn im Vorigen wurde über die besondere Lage der Ebenen $x_1 = 0, x_2 = 0$ nichts vorausgesetzt, als dass sie durch die eine Doppelgerade gehen sollten, und ebenso, dass $x_3 = 0, x_4 = 0$ durch die andere gingen. Daher kann man immer noch die Ebenen $x_1 = 0, x_3 = 0$ so bestimmen, dass ihre Schnittlinie eine beliebige, die beiden Doppelgeraden schneidende Linie ist. Da nun jede der 13 Geraden beide Doppelgeraden trifft, so kann man eine derselben zur Geraden a wählen, und erhält dadurch eine besondere Art von Abbildungen, deren es 13 verschiedene giebt, je nachdem man eine oder die andere der 13 Geraden zu Grunde legt.

In diesem besondern Falle ist die Gerade a nicht mehr Abbildung eines Punktes, sondern das Bild der ganzen auf der entsprechenden Geraden im Raume liegenden Punktreihe. Die Gleichungen (8) also müssen nicht mehr auf einen bestimmten Punkt x führen, das Verhältniss $x_2 : x_4$ muss unbestimmt sein, die Coefficienten α, β müssen verschwinden. In diesem Falle also sind B_2 und B_4 nicht mehr zugleich quadratisch in ξ_1 und quadratisch in ξ_2 , sondern sie erhalten den Factor ξ_3 , und die übrig bleibenden Factoren stellen, gleich Null gesetzt, Curven dritter Ordnung dar, welche durch die Punkte $\xi_1 = 0, \xi_3 = 0$ und $\xi_2 = 0, \xi_3 = 0$ hindurchgehen. Die beiden Curven (6), die Abbildungen der Doppelgeraden, sind jetzt durch Gleichungen von der Form

$$\xi_3 \cdot \varphi = 0, \quad \xi_3 \cdot \psi = 0$$

dargestellt, und $\varphi = 0, \psi = 0$ sind jetzt zwei Curven vierter Ordnung, von denen die erste bei $\xi_2 = 0, \xi_3 = 0$ einen Doppelpunkt, bei $\xi_1 = 0, \xi_3 = 0$ einen einfachen Punkt hat, die andere umgekehrt, und zwar sind dieselben ganz allgemeine Curven solcher Art. Sie schneiden sich ausserdem noch in 12 Punkten, den Abbildungen der 12 übrigen Geraden, während die 13^{te} durch $\xi_3 = 0$ abgebildet ist.

Indem nun aus allen Functionen (5) der Factor ξ_3 sich absondert,

sind es nur noch Functionen fünfter Ordnung, durch welche die Abbildung vor sich geht, und zwar sind die Gleichungen der Fläche jetzt:

$$(9) \quad \begin{aligned} \varrho x_1 &= \xi_3 \varphi \\ \varrho x_2 &= \xi_1 \varphi \\ \varrho x_3 &= \xi_3 \psi \\ \varrho x_4 &= \xi_2 \psi, \end{aligned}$$

wobei $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ jetzt die Abbildungen der Doppelgeraden werden,

§. 18.

Gerade und Kegelschnitte der Fläche. Ebenen, welche durch sie gelegt werden.

Die Abbildung des allgemeinsten ebenen Schnittes:

$$(10) \quad (a_1 \xi_3 + a_2 \xi_1) \varphi - (a_3 \xi_3 + a_4 \xi_2) \psi = 0$$

ist zugleich die allgemeinste Curve fünfter Ordnung, welche durch die Schnittpunkte von $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ geht, und in den Doppelpunkten dieser Curven Doppelpunkte hat. Unter den zerfallenden Curven, welche in diesem Systeme enthalten sein können, sind zunächst diejenigen zu bemerken, deren zugehörige Ebenen im Raume durch die Doppelcurven gehen. Es geschieht dies, wenn entweder $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ oder $a_3 = 0$, $a_4 = 0$. In beiden Fällen zerlegt sich die Abbildung in die Abbildung einer Doppelgeraden und in den Büschel von Geraden, welcher im Doppelpunkte der Abbildung der andern Doppelgeraden seinen Scheitel hat. Die beiden so entstehenden Büschel von Geraden sind Abbildungen von zwei Schaaren ebener Curven dritter Ordnung, welche auf der Fläche liegen; ein solcher Büschel ist der Durchschnitt der Fläche mit den durch diejenige Doppelgerade gelegten Ebenen, in deren Abbildung der Scheitel des Büschels nur ein einfacher Punkt ist. Jede solche Ebene schneidet noch die andere Doppelgerade; und die Curven dritter Ordnung erhalten dadurch je einen Doppelpunkt.

Unter diesen Curven sind insbesondere 2 . 13, welche in eine Gerade und einen Kegelschnitt zerfallen, indem die erzeugende Ebene durch eine der 13 einfachen Geraden der Oberfläche hindurchgehen. Es giebt also 26 Kegelschnitte auf der Fläche, welche den 13 Geraden in der Art paarweise zugeordnet sind, dass jede Gerade der Schnitt der Ebenen eines solchen Paares ist. Von diesen 26 Kegelschnitten bilden sich 24 als die Verbindungslinien der doppelten Fundamentalpunkte mit den 12 übriggebliebenen einfachen ab; die beiden letzten aber, welche der bevorzugten unter den 13 Geraden zugeordnet sind, werden durch die doppelten Fundamentalpunkte selbst dargestellt.

Da jede Ebene, welche durch eine Doppelgerade geht, die andere nur in einem Punkte schneidet, so giebt in der Abbildung der Schnitt der Abbildung einer Curve dritter Ordnung mit der Abbildung der letztern Doppelgeraden ein Punktepaar an, welches einen Punkt dieser Geraden abbildet. Indem man also von dem Doppelpunkte der Abbildung einer Doppelgeraden die Strahlen zieht, erhält man auf jedem zwei Punkte, die Punktepaare der Abbildung. Unter diesen sind die sechs Tangenten, welche man von dem Doppelpunkte der Abbildung an diese ziehen kann; auf jeder Doppelgeraden liegen also sechs Rückkehrpunkte*). Dagegen wird von den Strahlen des genannten Büschels die Abbildung der andern Doppelgeraden in je 3 Punkten geschnitten; sie entsprechen den Schnitten dieser Doppelgeraden mit den Curven dritter Ordnung. Da unter den Strahlen, deren Scheitel für die Abbildung dieser Doppelgeraden nur ein einfacher Punkt ist, sich 8 Tangenten befinden, so berühren unter den Curven dritter Ordnung eines Ebenenbüschels immer 8 die Doppelgerade, welche Axe des Büschels ist.

Sämmtliche durch eine der Doppelgeraden gehende Ebenen sind als dreifach berührende zu betrachten; denn jede solche Ebene schneidet noch in einer Curve dritter Ordnung, und diese wieder die Doppelgerade in drei Punkten; in diesen letztern muss also die Ebene einen Mantel der Oberfläche berühren. Es giebt also zunächst zwei unendliche Schaaren dreifach berührender Ebenen, welche auf diese Weise erhalten werden.

Unter diesen Ebenen sind diejenigen 26 besonders hervorzuheben, welche durch eine einfache Gerade der Oberfläche gehen. Bei diesen treten die beiden Schnittpunkte der Geraden mit dem entsprechenden der oben erwähnten Kegelschnitte auf; von diesen Schnittpunkten aber liegt der eine (wie bei den Curven dritter Ordnung immer der Doppelpunkt) auf der Doppelgeraden, durch welche die Ebene nicht geht; es bleibt also nur ein weiterer Schnittpunkt übrig. Diese 26 Ebenen berühren also jede in vier Punkten die Fläche, von welchen immer drei auf einer der Doppelgeraden liegen.

*) Man erkennt dies auch leicht direct. Betrachten wir z. B. die Doppelgerade $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, und schreiben die Gleichung der Fläche in der Form

$$Ax_1^2 + 2Bx_1x_2 + Cx_2^2 = 0,$$

wo A , B , C von der dritten Ordnung sind. Das Paar von Tangentenebenen eines Punktes der Doppelgeraden ist dann

$$A_0X_1^2 + 2B_0X_1X_2 + C_0X_2^2 = 0,$$

wo X_1 , X_2 laufende Coordinaten sind, und A_0 , B_0 , C_0 aus A , B , C entstehen, indem man $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ setzt. Die Bedingung für den Rückkehrpunkt ist also $A_0C_0 - B_0^2 = 0$, eine Gleichung sechsten Grades für $\frac{x_2}{x_1}$

Nächst den Ebenenbüscheln, welche eine der Doppelgeraden zur Axe haben, verdienen nun insbesondere diejenigen Beachtung, deren Axe eine der einfachen Geraden der Oberfläche ist, und deren jeder zwei der zuletzt genannten vierpunktigen Berührungsebenen enthält. Betrachten wir insbesondere den Büschel, dessen Axe die in der Abbildung bevorzugte Gerade ist. Die Curven vierter Ordnung, in welchen die Ebenen des Büschels die Fläche noch schneiden, bilden sich in diesem Falle als Curven vierter Ordnung ab, welche durch die 12 einfachen und die beiden doppelten Fundamentalpunkte hindurchgehen. Man erhält die Gleichung der Abbildungen, indem in (10) a_2 und a_4 verschwinden lässt, wobei denn nach Auslassung des Factors ξ_3 die Gleichung eines Büschels übrig bleibt:

$$(11) \quad a_1 \varphi + a_3 \psi = 0.$$

Ausser den oben genannten 14 Punkten müssen diese Curven also noch zwei Schnittpunkte gemein haben. Man sieht aber, dass man in einem der doppelten Fundamentalpunkte die Tangente des Büschels (11)-bildet, einmal der von φ und einmal der von ψ herrührende Theil identisch verschwindet, dass also der Parameter $a_1 : a_3$ in beiden Fällen herausgeht, und also die Curven (11) sich in diesen Punkten berühren, wodurch denn die richtige Zahl von Schnittpunkten hergestellt ist. Uebrigens bedeutet dies für die auf der Oberfläche liegenden Curven nur, dass alle die beiden durch die doppelten Fundamentalpunkte dargestellten Kegelschnitte in constanten Punkten schneiden, was selbstverständlich ist.

Jede dieser Curven vierter Ordnung in der Abbildung schneidet die Gerade $\xi_3 = 0$ ausser in den beiden doppelten Fundamentalpunkten in zwei beweglichen Punkten, und da diese aus dem Büschel 11 erhalten werden, so bilden sie eine Involution. Es giebt also den Doppelpunkten derselben entsprechend zwei Berührungscurven. Ferner erhält man zwei bemerkenswerthe Punktepaare, indem man die Curven $\varphi = 0$, $\psi = 0$ betrachtet, welche gleichfalls dem Büschel angehören. In diesem Falle rückt der eine Punkt des Paares in einen der doppelten Fundamentalpunkte, und wird also die Abbildung des Punktes, indem einer der durch die Gerade gehenden Kegelschnitte dieselbe ausserhalb der Doppelgeraden trifft, während der andere Punkt des Paares den Schnittpunkt der Geraden mit derjenigen Doppelgeraden abbildet, mit welcher der Kegelschnitt in einer Ebene liegt. Man hat also folgenden Satz:

Die durch eine einfache Gerade gelegten Ebenen schneiden die Fläche in Curven vierter Ordnung; von den Schnittpunkten derselben mit der Geraden fallen zwei in die Schnittpunkte A, B der Geraden mit den Dop-

pelgeraden α , β . Die andern beiden Schnittpunkte sind beweglich und bilden eine Involution. Es giebt daher zwei berührende Curven. Die Involution bestimmt sich durch zwei Paare, nämlich A mit dem andern Schnittpunkte des durch B in einer Ebene mit α gehenden Kegelschnittes, und durch B mit dem andern Schnittpunkte des durch A in einer Ebene mit β gehenden Kegelschnittes.

Alle diese Ebenen sind doppelt berührend. Unter den Ebenen jedes solchen Büschels aber sind 25 dreifach berührende. Man findet ihre Abbildungen, indem man in dem betrachtenden Curvenbüschel vierter Ordnung diejenigen Curven aufsucht, welche einen Doppelpunkt haben. Man hat also die Discriminante von (11) gleich Null zu setzen, was eine Gleichung 27. Grades für $a_1 : a_3$ giebt. Aber diese Gleichung hat zwei evidente Lösungen, nämlich $a_1 = 0$ und $a_3 = 0$, da die Discriminante von φ und ψ selbst verschwindet. Diese Lösungen führen nur auf die Curven $\varphi = 0$, $\psi = 0$, welche auszuscheiden sind; es bleiben daher nur 25 Lösungen übrig. Die ganze Zahl solcher dreipunktig berührenden Ebenen ist daher $13 \cdot 25 = 325$.

Die noch übrigen dreipunktig berührenden Ebenen werden in der Abbildung durch Curven fünfter Ordnung mit fünf Doppelpunkten dargestellt. Ihre Zahl scheint schwer direct zu bestimmen.

§. 19.

Beweis, dass keine andern Geraden und Kegelschnitte auf der Fläche liegen. Hyperboloide, welche durch die Doppelgeraden gehen.

Ich werde jetzt zeigen, dass auf der Oberfläche keine andern Geraden und Kegelschnitte existiren, als die oben angegebenen. Zu diesem Zwecke benutze ich die Formel §. 6 (18) in der Form

$$m = \frac{M + \Sigma \alpha + 2 \Sigma \beta \dots}{n}.$$

Hier ist $n = 5$, ferner für Gerade $M = 1$. Sodann kann eine Gerade der Fläche keinen durch einen doppelten Fundamentalpunkt dargestellten Kegelschnitt zweimal treffen, ohne in seiner Ebene zu liegen; was aber in einer solchen Ebene lag, ist oben bereits behandelt worden. Man kann also annehmen, dass die beiden Zahlen β höchstens gleich 1 seien. Sodann kann eine auf der Fläche liegende neue Gerade höchstens 5 der 13 oben betrachteten Geraden der Fläche schneiden; schneide sie deren 6, so läge sie mit diesen und den Doppelgeraden auf einem Hyperboloid, und dieses schnitte seinerseits die Fläche fünfter Ordnung in einer Curve 6^{ten} Grades (2 Doppelgerade + 7 ein-

fachen Geraden), würde also ganz der Fläche angehören. Demnach kann $\Sigma\alpha$ höchstens 5 sein, und man hat also

$$m \leq \frac{1 + 5 + 2 \cdot 2}{5}, \text{ d. h. } m \leq 2.$$

Nun giebt eine Gerade der Abbildung im Allgemeinen eine Curve fünfter Ordnung im Raume, und dieser Grad kann sich um vier Einheiten nur dadurch reduciren, dass die Gerade durch beide doppelte Fundamentalpunkte geht; dann aber ist sie eine der früheren Geraden. Ein Kegelschnitt ($m=2$) stellt im Allgemeinen eine Curve zehnter Ordnung im Raume dar, und deren Ordnung kann sich höchstens um 7 Einheiten reduciren, wenn nämlich der Kegelschnitt durch die beiden doppelten und durch drei einfache Fundamentalpunkte geht. Es giebt also in der That keine weiteren Geraden auf der Fläche.

Bei der Aufsuchung von Kegelschnitten hat man $M=2$ zu setzen. Weil etwa vorhandene Kegelschnitte nicht in der Ebene eines der früheren liegen können, so ist jedes β höchstens 2, ferner kann jedes α höchstens 1 sein, wenn man nicht auf Kegelschnitte in einer Ebene mit einer Geraden kommen will, welche schon behandelt sind. Es ist also

$$m \leq \frac{2 + 12 + 2 \cdot 4}{5} \leq 4.$$

Nun können Gerade nur Bilder von Kegelschnitten sein, wenn sie einen doppelten Fundamentalpunkt mit einem einfachen verbinden; diese Geraden stellen aber die oben gefundenen Kegelschnitte dar. Dass Kegelschnitte in der Abbildung mindestens Curven dritter Ordnung im Raume darstellen, ist vorhin schon gezeigt. Eine Curve dritter Ordnung in der Abbildung stellt im Allgemeinen eine Curve 15^{ter} Ordnung dar; diese Ordnung erniedrigt sich höchstens um 10 Einheiten, wenn nämlich die Curve dritter Ordnung in einem doppelten Fundamentalpunkte einen Doppelpunkt hat, und durch den ändern, so wie durch 5 einfache Fundamentalpunkte hindurchgeht. Endlich stellt eine Curve vierter Ordnung im Allgemeinen eine Curve 20^{ter} Ordnung im Raume dar. Damit sie einen Kegelschnitt darstelle, muss sie drei Doppelpunkte oder einen dreifachen Punkt enthalten ($p=0$), und die Ordnung muss sich um 18 erniedrigen. Nun sind offenbar die günstigsten Fälle die, in welchen zwei Doppelpunkte in die doppelten Fundamentalpunkte fallen, einer in einen einfachen, und die Curve noch durch fünf einfache hindurchgeht; oder in welchen ein doppelter Fundamentalpunkt dreifacher Punkt wird, und die Curve noch durch den ändern und durch 7 einfache Fundamentalpunkte geht. In beiden Fällen aber beträgt die Erniedrigung nur 15 Einheiten.

Es giebt also auch keine weiteren Kegelschnitte, und demnach

auch keine andern ebenen Curven dritter Ordnung auf der Fläche, als diejenigen, deren Ebenen durch eine Doppelgerade gehen. Die Anzahl der zerfallenden ebenen Schnitte ist also erschöpft.

Nächst den ebenen Schnitten nehmen die Schnitte derjenigen Flächen zweiter Ordnung die Aufmerksamkeit in Anspruch, welche durch die beiden Doppelgeraden gelegt werden. Die neben den Doppelgeraden selbst dabei auftretenden Schnittcurven sind von der 6^{ten} Ordnung; und da die Flächen zweiter Ordnung, von welcher hier die Rede ist, die Gleichungsform

$$\alpha x_1 x_3 + \beta x_1 x_4 + \gamma x_2 x_3 + \delta x_2 x_4 = 0$$

haben, so bilden dieselben sich als die Kegelschnittschaar:

$$\alpha \xi_3^2 + \beta \xi_2 \xi_3 + \gamma \xi_1 \xi_3 + \delta \xi_1 \xi_2 = 0$$

ab, d. h. als die Kegelschnitte, welche durch die doppelten Fundamentalpunkte gehen. Diese Curvenschaar ist eine dreifach unendliche, wie die Schaar der Flächen zweiter Ordnung selbst. In jedem Punkte der Fläche vierter Ordnung wird diese von einer Fläche zweiter Ordnung berührt; dann zerfällt in der Abbildung der Kegelschnitt in zwei von den doppelten Fundamentalpunkten ausgehende Gerade, welche sich in der Abbildung des Berührungspunktes treffen; in diesem Falle zerlegt sich also die Curve sechster Ordnung in zwei Curven dritter Ordnung. Eine andere Zerlegung tritt ein, wenn man die Fläche zweiter Ordnung durch eine der 13 Geraden gehen lässt. Dann bleibt eine Curve fünfter Ordnung übrig; und wählt man zu jener Geraden die bei der Abbildung bevorzugte, so bildet die Curve fünfter Ordnung sich als allgemeine Gerade ab. Die Geraden der Abbildung sind also Bilder solcher Curven fünfter Ordnung, welche mit den Doppelgeraden und der bevorzugten einfachen Geraden zusammen den vollständigen Durchschnitt der gegebenen Fläche mit einem Hyperboloid darstellen.

Da die Durchschnitte der Hyperboloide, welche durch die Doppelgeraden gehen, mit der Fläche in der Abbildung Kegelschnitte geben, welche durch zwei feste Punkte gehen, so haben diese Raumcurven sechster Ordnung für die Geometrie der Fläche die Eigenschaften von Kreisen, während die bevorzugte Gerade die Linie im Unendlichen vertritt, und die ersterwähnten Raumeurven fünfter Ordnung die Stelle der geraden Linien einnehmen. So giebt z. B. der Satz über den Mittelpunkt des gemeinsamen Orthogonalkreises dreier Kreise hier Folgendes:

Man lege durch die Doppelgeraden drei Hyperboloide; je zwei der drei so entstehenden Schnittcurven mit der Fläche treffen sich in zwei Punkten. Durch jedes dieser

Punktepaare und eine fest gewählte einfache Gerade der Fläche, sowie durch die Doppelgeraden legeman drei weitere Hyperboloide; dieselben treffen sich dann in ein und demselben Punkte der Fläche.

Indem ich hiermit diese Untersuchungen beschliesse, muss ich mich begnügen, einige Richtungen angedeutet zu haben, in denen für die betrachteten Flächen Quellen fruchtbarer Untersuchungen sich finden. Aber zugleich muss ich bemerken, dass die gefundenen Eigenschaften eben nur für die allgemeinen Flächen der gedachten Arten gelten, während sie sich in besonderen Fällen auf die mannigfaltigste Art ändern; wie z. B. wenn die Flächen Knotenpunkte erhalten, oder wenn die Doppelcurven zu Rückkehrcurven werden, u. s. w.; eine Reihe von Möglichkeiten, welche so mannigfaltig ist, dass es schwer wird, auch nur eine Uebersicht über dieselben zu gewinnen.

Göttingen, den 8^{ten} October 1868.