Beobachtete und berechnete Werthe von p würden noch besser übereinstimmen, wenn die Vorrichtung solider gearbeitet und aufgestellt gewesen wäre, mit welcher die zweite Glasplatte gedreht wurde. Bei den kleinen Werthen von ν , um welche es sich hier handelt, würden aber ganz besondere Vorsichtsmafsregeln nothwendig geworden seyn, die in keinem Verhältnifs zu dem erreichten Resultat gestanden hätten.

Die Anzahl der Interferenzstreifen im Spectrum zwischen zwei bestimmten Fraunhofer'schen Linien wird bei derselben Neigung ν der Plangläser gegeneinander ein Maximum seyn, sobald $\cos \varphi \operatorname{tg} \varphi$, ein Maximum ist. Der Werth von φ , welcher dieser Bedingung entspricht, ist durch die Gl. 1 §. 79 bestimmt und gleich demselben Winkel w , bei dem der Abstand E der beiden interferirenden Strahlenbündel 1 und 2 (Fig. 11 Taf. II) ein Maximum ist. Da dieser Winkel w sich leicht beobachten läfst, so würde man ihn vielleicht zur Bestimmung des Brechungsexponenten der Plangläser mit Vortheil benutzen können.

(Fortsetzung im nächsten Heft.)

III. *Die Gruppierung der Molecüle in den Krystallen. Eine theoretische Ableitung der Krystallsysteme und ihrer Unterabtheilungen; von Dr. L. Sohncke in Königsberg.*

§. 1.

Einleitung. Ueber den Gegenstand der vorliegenden Arbeit giebt es, soviel mir bekannt, nur zwei in Betracht kommende Abhandlungen, eine von Frankenheim ¹⁾, die andere von Bravais ²⁾. Beide stimmen im Hauptresultat

1) Pogg. Ann. Bd. 97. Ueber die Anordnung der Molecüle im Krystall.

2) *Journal de l'école polyt. T. XIX. 1850. Mém. s. les systèmes formés par des points distribués régulièrement sur un plan ou dans l'espace,*

untereinander und mit dem Folgenden überein. Sehr verschieden ist dagegen die Methode. Frankenheim's Entwicklungen lassen durchaus Strenge und Evidenz vermissen, so daß durch seine Arbeit der Gegenstand noch keineswegs für abgeschlossen gelten kann. Bravais Abhandlung dagegen, welche schon einige Jahre vor der Frankenheim'schen erschienen und, wie es scheint, von Frankenheim auch gekannt ist, läßt hinsichtlich der Strenge der Beweise nichts zu wünschen übrig. Trotzdem befriedigt sie nicht. Sie ist nämlich eine abstract mathematische Untersuchung über regelmässige Punkthaufen und verräth erst gegen das Ende ihren Zusammenhang mit der Krystallographie. So kommt es, daß sie zahlreiche geometrische Sätze enthält, die keine Beziehung zur Krystallographie haben. Außerdem aber ist das Verständniß durch einen weitläufigen, zum Beweise erforderlichen, Apparat, bestehend in einer Anzahl neu eingeführter Begriffe und Namen, sehr erschwert. Will man nun den krystallographischen Theil aus der 120 Seiten umfassenden Abhandlung herauschälen, in welchem der Beweis geführt ist, daß es keine anderen als die wirklich beobachteten Krystallsysteme geben kann, so ist dieß eine mühsame Arbeit, und schließlic bleibt doch noch ein weitschichtiges Gebäude von Sätzen übrig. Nun ist es aber doch höchst wünschenswerth, daß eine Fundamentaluntersuchung wie die vorliegende in aller Strenge und doch möglichst kurz und durchsichtig geführt wird. Diesen Versuch habe ich gemacht; mein Ziel ist gewesen: durch eine neue, möglichst einfache, Methode *direct a priori* nachzuweisen, daß es, wenn man die Vorstellung von der atomistischen Beschaffenheit der Körper zu Grunde legt, *nur* die bekannten Krystallsysteme und keine anderen geben kann. Durch diesen Beweis wird es dann klar, warum z. B. eine gerade Säule mit regelmässig fünfeckiger Basis oder ein geometrisch reguläres Dodekaëder oder Icosaëder als Krystalle nicht existiren können. Läßt man überhaupt die Körper aus diskreten Moleculen bestehen, so wird man nicht umhin können, in den Krystallen diesen

Moleculen eine gewisse Regelmäßigkeit der Lagerung zuzugestehen. Die hierüber gemachte, aus dem Wesen der Krystalle geschöpfte, Hypothese ist das Princip, auf welches der ganze folgende Beweis aufgebaut ist. Noch ist zu erwähnen, daß unter „Punkt“ im Folgenden ein Massenpunkt oder Molecül verstanden ist.

§. 2.

Das Princip. Folgerungen daraus.

Princip. Die Punktvertheilung in einem krystallinischen Punkthaufen (welcher zunächst als unbegrenzt angenommen wird) ist um jeden Massenpunkt dieselbe wie um jeden anderen.

Aus diesem Princip ergibt sich sofort eine genauere Vorstellung über die Lagerung der Moleculé. Ein krystallinischer Punkthaufen sey gegeben, und p sey irgend ein Punkt in ihm (Fig. I Taf. III). Unter allen Punkten des Haufens sey q ein solcher, daß kein anderer näher an p liege als er. Dann fordert das Princip der gleichförmigen Punktvertheilung die Existenz eines Punkts q_1 , der zu q ebenso liegt, wie q zu p ; d. h. wenn man $\overline{pq}$ über q hinaus um sich selbst verlängert, muß man einen Punkt des Haufens treffen. So fortschließend erkennt man, daß in dem krystallinischen Punkthaufen eine gerade Linie AB existiren muß, welche mit lauter äquidistanten Punkten $p, q, q_1 \dots$ besetzt ist. — Andere als diese Punkte können sich auf AB nicht befinden; denn wäre z. B. k irgend ein in einem solchen Intervall $q_{n-1}q_n$ gelegener Massenpunkt, so müßte nach dem Princip auch zwischen p und q ein Punkt k' so liegen, daß $\overline{pk'} = \overline{q_{n-1}k}$ wäre. Dann wäre aber q nicht mehr der nächste Punkt an p , was er nach der Voraussetzung doch seyn sollte.

Unter allen Punkten des Haufens sey jetzt r ein solcher, daß kein anderer näher an der Geraden AB liege als er (Fig. 2 Taf. III). Die senkrechte Projection dieses Punkts, q , wird zwischen irgend zwei Nachbarpunkte p und q der

Geraden fallen, oder im besonderen Falle vielleicht auch in einen Punkt p selbst. Nun fordert das Princip die Existenz eines Punktes r_1 , der zu q ebenso liegt, wie r zu p , u. s. f. So erhält man eine zu AB parallele Gerade CD , welche mit äquidistanten Punkten von gleicher Distanz wie auf AB besetzt ist. Das Princip erfordert die Existenz einer dritten parallelen Reihe, welche zu CD ebenso gelegen ist, wie diese zu AB . So fortschliessend erkennt man, daß in unserem Punkthaufen eine Ebene existiren muß, in welcher lauter parallele, mit äquidistanten Punkten besetzte, Reihen liegen, die in ihrer Gesamtheit ein Netz mit parallelogrammatischen Maschen bilden.

Andere als diese Punkte können in derselben Ebene nicht existiren. Denn: befände sich erstens auf einer der Parallelreihen CD , ... ein neuer Punkt, so müßte, nach dem Princip, ein ihm entsprechender Punkt auch auf der Anfangsreihe AB liegen, was nicht möglich ist. Angenommen ferner, es fände sich innerhalb irgend einer der parallelogrammatischen Maschen ein neuer Punkt, so müßte in jeder, und also auch in der Masche pqr_1r , ein ebenso gelegener Punkt existiren; dann aber wäre r nicht mehr ein Punkt, der von der Geraden AB den geringsten Abstand hätte. —

Unter allen Punkten des Haufens sey endlich s ein solcher, daß kein anderer näher als er an der gedachten Ebene liege. Seine senkrechte Projection σ auf die Ebene falle in irgend eine parallelogrammatische Masche pqr_1r oder im besonderen Falle in die Seiten oder Ecken des Parallelogramms. Dann fordert das Princip, daß sich um den Punkt s ein dem vorher construirten paralleles und congruentes Netz von parallelogrammatischen Maschen ausbreitet. Das Princip erfordert ferner die Existenz einer dritten parallelen Netzebene, welche zur zweiten ebenso liegt, wie diese zur ersten; u. s. f. So erkennt man, daß der Punkthaufen aus lauter parallelen, dem Anfangsnetz congruenten, Punktnetzen bestehen muß, die in ihrer Gesamtheit einen mit congruenten Parallelepipeden erfüllten Raum bilden. — An-

dere Punkte als die Eckpunkte dieser Parallelepipeda können nicht vorkommen; denn läge in irgend einem der zum Anfangsnetz parallelen Netze ein neuer Punkt, so müßte ein ihm entsprechender auch in dem Anfangsnetz liegen, was unmöglich ist. — Läge ferner innerhalb irgend eines Parallelepipeds ein neuer Punkt, so müßte ein ihm entsprechender in dem durch pqr,rs bestimmten Parallelepipeton liegen. Dann aber wäre s nicht mehr ein nächster Punkt an dem Anfangsnetz. — Satz I. *Hiermit ist erkannt, daß die Gruppierung der Moleküle in den Krystallen parallelepipedisch ist.*

§. 3

Symmetrie. Zur näheren Untersuchung eines krystallinischen Punkthaufens wird nur noch der Begriff der Symmetrie eingeführt.

Erklärung: Unter einer Symmetrieebene versteht man bekanntlich eine Ebene, welche ein geometrisches Gebilde so theilt, daß die eine Hälfte das genaue Spiegelbild der anderen ist, oder daß, wenn man von einem Punkte der einen Hälfte ein Loth auf die Ebene fällt und es um sich selbst verlängert, man einen entsprechenden Punkt der anderen Hälfte trifft.

Nun lautet die Frage, deren Beantwortung mit Hülfe unseres Principis und des Begriffes der Symmetrie gesucht wird, so:

» Wenn ein krystallinischer Punkthausen keine, eine, zwei, oder mehr Symmetrieebenen besitzen soll: wie beschaffen muß dann sein parallelepipedischer Kern seyn?«

Zunächst ist ein allgemeiner Satz zu beweisen, welcher so lautet; Satz II. *Hat ein Punkthausen überhaupt eine Symmetrieebene, so geht durch jeden Punkt des Hausens eine ihr parallele.*

Beweis: S_1 (Fig. 3, Taf. III) sey eine Symmetrieebene des Punkthaufens und p irgend ein Massenpunkt. Die durch ihn zur Symmetrieebene S_1 parallel gelegte Ebene heiße s_1 . Die Symmetrieebene S_1 fordert die Existenz des zu p sym-

metrischen Punktes q ; das Princip der gleichförmigen Punktvertheilung aber fordert die Existenz einer zu q ebenso gelegenen Symmetrieebene S_2 , wie S_1 zu p liegt. Die Punktvertheilung von S_1 nach links ist ebenso wie von S_1 nach rechts, wegen der Symmetrie. Die Punktvertheilung von S_1 nach rechts ist dieselbe wie die von S_2 nach rechts, nach dem Princip der gleichförmigen Punktvertheilung. Also ist die Punktvertheilung von S_2 nach rechts dieselbe wie die von S_1 nach links, d. h. die außerhalb des Streifens S_1 S_2 liegenden Punkte sind symmetrisch zu einer diesen Streifen halbirenden Ebene s_2 (welche also durch den Punkt q gehen muß). — Ferner: Die Punktvertheilung innerhalb des Streifens s_1 S_1 ist symmetrisch zu der innerhalb S_1 s_2 wegen der Symmetrieebene S_1 . Die Punktvertheilung innerhalb s_1 S_1 ist dieselbe wie die innerhalb s_2 S_2 , nach dem Princip. Also ist die Punktvertheilung innerhalb S_1 s_2 symmetrisch zu der innerhalb s_2 S_2 , so daß s_2 auch für den Streifen S_1 S_2 eine Symmetrieebene ist. Also ist s_2 eine Symmetrieebene für den ganzen Punkthaufen. Aber sie geht durch den Punkt q . Also ist bewiesen, daß durch *einen* Massenpunkt eine der gegebenen parallele Symmetrieebene geht. Dann muß durch *jeden* Punkt des Haufens eine solche Symmetrieebene gehen, nach dem Princip der gleichförmigen Punktvertheilung.

§. 4.

Anordnung der Punkthaufen ohne eine und mit einer Symmetrieebene.

Der Punkthaufen habe keine Symmetrieebene. Dann ist über den parallelepipedischen Kern nichts Bestimmtes festzusetzen. Er darf nur keine der Besonderheiten zeigen, welche die im Folgenden beschriebenen symmetrischen Punkthaufen besitzen. —

Der Punkthaufen habe eine Symmetrieebene. Gefragt wird nach der näheren Beschaffenheit eines solchen Haufens.

S sey die Symmetrieebene (Fig. 4, Taf. III); nach dem vorigen Satze kann sie durch einen Punkt p des Haufens gehend angenommen werden. q sey ein Punkt der Art, daß

kein anderer näher als er an S liege. Der erwähnte Punkt p sey derjenige, der in der Symmetrieebene zu q am nächsten liegt. Die Ebene der Zeichnung sey durch beide Punkte und senkrecht zur Symmetrieebene gelegt. Zu q muß der symmetrische Punkt q_1 existiren; und nun hat man drei Punkte, welche das parallelogrammatische Netz vollständig bestimmen. Es hat *rhombische Maschen*; die Symmetrieebene geht durch die eine Diagonale der Rhomben. — In der Ebene dieses Netzes kann kein anderer Punkt des Haufens liegen als in den Ecken der rhombischen Maschen. Denn angenommen im Inneren oder in den Seiten irgend eines Rhombus läge noch ein Massenzentrum, so müßte ein Punkt von entsprechender Lage auch im Rhombus pqs existiren. Innerhalb des Dreiecks pqr darf nun der Punkt keinesfalls liegen, sonst läge q nicht mehr der Symmetrieebene *zunächst*, was doch angenommen war. Läge aber ein solcher Punkt σ innerhalb des Dreiecks qrs , so müßte ein ebensolcher Punkt τ , innerhalb des Dreiecks q_1r_1p liegen und dieser befände sich dann doch wieder näher an der Symmetrieebene S als der Punkt q . Die letzte Möglichkeit wäre die, daß ein Massenzentrum in der Diagonale qr selbst läge. Dann müßte ein ebensolcher Punkt auch in der Linie pp_1 liegen, und dies wäre dann ein Punkt in der Symmetrieebene, der näher als p an q läge; was der Voraussetzung widerspricht. Also u. s. f.

Nach Satz I muß der Punkthaufen *parallelepipedisch* seyn. Die Grundflächen der Parallelepipeda sind eben construirt. Es braucht nur noch die Lage eines einzigen diesem Netze nächstbenachbarten Punktes bekannt zu seyn, so ist der ganze Haufen construirt. Denn um diesen Punkt muß sich ein dem ersteren paralleles und congruentes Netz ausbreiten.

Unter allen unserem Netze nächstbenachbarten Punkten sey P ein solcher, daß kein anderer näher als er an der Symmetrieebene liege; er heiße im Folgenden ein *oberer Punkt*; P kann nicht näher an der Symmetrieebene liegen als q , weil q überhaupt ein nächster Punkt an dieser Ebene

Poggendorff's Annal. Bd. CXXXII. 6

seyn sollte; P kann aber auch nicht ferner liegen als q , z. B. etwa so, daß die Projection von P nach σ fiel (Fig. 4, Taf. III), denn sonst müßte, wegen des Principes der gleichförmigen Punktvertheilung, auch ein Punkt existiren, der die Projection τ gäbe, und dieser läge dann doch wieder näher an der Symmetrieebene als q . Es bleibt nur übrig, daß der obere Punkt in gleicher Entfernung wie q von der Symmetrieebene liegt. Dann führt weder das Princip der gleichförmigen Punktvertheilung noch die Symmetrie auf irgend welche Widersprüche. Um diesen Punkt breitet sich dann ein dem ersteren congruentes paralleles Netz aus. Hiermit ist das *Resultat* gewonnen:

„Ist der Kern ein Parallelepipeton, dessen Basis ein Rhombus ist, und von dem ein oberer Punkt senkrecht über einer Rhomben-Diagonale liegt, [kürzer: Ist der Kern eine klinorhombische Säule], so besitzt der Punkthaufen eine durch diese Diagonale gehende, senkrecht zur Basis stehende, Symmetrieebene.“ (Fig. 5).

Anmerkung. In der Fig. 5 Taf. III bilden die 4 Punkte pp_1k_1k eine parallelogrammatische Masche des Netzes in der Symmetrieebene; die Linie ps steht senkrecht zu der Symmetrieebene. Also kann man diesen Punkthaufen auch ein gerades parallelogrammatisches Parallelepiped zu Grunde legen (senkrecht stehend auf pp_1k_1k), von welchem ein Paar Gegenseiten im Centrum noch einen Punkt tragen.

Entwirft man jetzt die Zeichnung in der Symmetrieebene, so hat das Netz rhomboidische Maschen (Fig. 6). Senkrecht über allen Punkten dieses Netzes liegen wieder Punkte, und außerdem liegen in der halben Höhe Punkte q über den Mitten der einen Art von Parallelogrammseiten (pp_1, kk_1); dieß sind die Centra der gegenüberliegenden Parallelepipeds. Faßt man jetzt nicht pp_1k_1k , sondern ptp_1k_1 als Basalparallelogramm auf, so wird der Punkt q Centrum des über diesem $\boxplus$ stehenden Parallelepipeds, so daß man diesem Punkthaufen also eben so gut ein gerades Parallelepiped zu Grunde legen kann, welches im Centrum einen Punkt trägt.

In einem besonderen Falle, der im Bisherigen übersehen ist, wird die vorige Construction des Punkthaufens illusorisch; nämlich wenn der an der Symmetrieebene nächste Punkt q (Fig. 4, Taf. III) und der diesem nächste Punkt p in der Symmetrieebene so liegen, daß pq auf der Ebene

senkrecht steht. Dann liegen die Punkte qpq_1 in einer geraden Linie, und das Netz ist noch nicht construirbar. Deshalb ist die Lage noch eines Punkts aufzusuchen; wir wählen dazu denjenigen, der, nächst q und q_1 , dem Punkte p am benachbartesten ist (Fig. 7, Taf. III). Innerhalb des Raumes, der zwischen der Symmetrieebene S und einer zu ihr parallel durch q gelegten Ebene liegt, kann dieser Punkt r sich nicht befinden, denn q sollte der Symmetrieebene am nächsten liegen. Aufserhalb dieses Raumes kann er auch nicht liegen, denn alsdann würde ein ihm entsprechender Punkt doch in diesen Raum fallen; also kann er nur in die Gränzen dieses Streifens, d. h. in die Symmetrieebene S selbst fallen. Durch diese drei Punkte sey die Ebene der Zeichnung gelegt; sie ist also senkrecht zur Symmetrieebene. Diese Punkte genügen zur Construction des parallelogrammatischen Netzes, es hat *rechteckige Maschen*. Ein oberer Punkt zu diesem Netz kann nicht in den durch die Ebene S und ihre parallele Ebene begränzten Raum, und auch nicht aufserhalb desselben fallen, was sich wie vorher beweisen läfst. Also kann er nur in die Gränzen dieses Streifens, d. h. in die Symmetrieebene selbst, fallen. Um diesen Punkt breitet sich ein dem ersteren congruentes paralleles Netz aus. Hiermit ist das *Resultat* gewonnen:

„Auch wenn der Kern ein gerades Parallelepipedon mit rhomboidischer Basis ist, hat der Punkthaufen eine Symmetrieebene, parallel der Basis.“

Das *Gesamtergebnis* dieses Paragraphen ist also folgendes:

Es giebt zweierlei Anordnungen von Punkthaufen mit einer Symmetrieebene:

1) *Die Anordnung nach klinorhombischen Säulen.*

2) *Die Anordnung nach geraden Parallelepipeden mit rhomboidischer Basis.*

Mehr als diese zwei Anordnungsarten sind nicht möglich. Also müssen alle symmetrischen Punkthaufen, auch wenn sie mehr als eine Symmetrieebene haben, unter eine dieser beiden Anordnungsarten fallen.

§. 5.

Der Punkthaufen habe mehrere nicht parallele Symmetrieebenen. Vor der Aufsuchung der Punktanordnungen in diesem Falle sind erst zwei allgemeine Sätze zu beweisen.

Aus dem Satz II folgt unmittelbar, daß alle diese Symmetrieebenen durch ein und denselben Punkt gehend angenommen werden können. — Unter allen vorhandenen Symmetrieebenen werden zunächst diejenigen zwei betrachtet, S und T (Fig. 8), welche miteinander den kleinsten Winkel einschließen; er heiße α . Weil T eine Symmetrieebene ist, so müssen von ihr aus nach der *einen* Seite die Punkte genau ebenso vertheilt seyn, wie nach der anderen, also muß auch eine Symmetrieebene S_1 vorhanden seyn, welche jenseits T ebenso liegt wie S diesseits; die also auch den Winkel α mit T bildet. Diese neue Symmetrieebene S_1 erfordert nun wieder eine zu T symmetrische Symmetrieebene T_1 u. s. f. Auf diese Art weiter schließend gelangt man endlich zu einer Symmetrieebene, welche mit der anderen Hälfte s der anfänglichen Symmetrieebene S den kleinsten Winkel bildet. Dieser Winkel kann nicht $> \alpha$ seyn, sonst wäre man mit dem Schließen auf neue Symmetrieebenen noch nicht weit genug gegangen; er kann aber auch nicht $< \alpha$ seyn, weil der von S und T eingeschlossene Winkel α eben der kleinste von allen durch Symmetrieebenen gebildeten Winkeln seyn sollte. Also bleibt nur übrig, daß der Winkel $= \alpha$ ist. Hat man also n Symmetrieebenen construiren müssen, so ist nun $n \cdot \alpha = 180^\circ$. Demnach ist folgendes *Resultat* gewonnen:

Satz III. *Hat ein krystallinischer Punkthaufen überhaupt mehrere nicht parallele Symmetrieebenen, und schließen die beiden nächsten den Winkel α ein, so gehen durch jeden Punkt des Haufens n in einer geraden Linie sich schneidende Symmetrieebenen, die alle mit ihren Nachbar-ebenen denselben Winkel α bilden, und wo die ganze Zahl n der Gleichung genügen muß: $n \cdot \alpha = 180^\circ$.*

Aus dieser Betrachtung folgt ferner unmittelbar, daß die Symmetrieebenen abwechselnd identisch seyn müssen, so

dafs alle S unter sich und alle T unter sich gleichartig sind.

Aufser diesen in einer geraden Linie sich schneidenden Symmetrieebenen können auch noch andere Symmetrieebenen in dem Punkthaufen vorhanden seyn.

§. 6.

Anzahl der durch eine Gerade gehenden Symmetrieebenen.

Jetzt handelt es sich darum zu entscheiden, wie viel in einer geraden Linie sich schneidende Symmetrieebenen ein krystallinischer Punkthaufen besitzen kann. Dazu wird nach einander untersucht, ob er 2, 3, 4 ... solche Symmetrieebenen haben kann. Hierbei wird die Zeichnung in einer Ebene entworfen, welche zur Schnittlinie der Symmetrieebenen senkrecht steht; und in der Schnittlinie wird, was nach dem Vorigen erlaubt ist, ein Punkt p liegend angenommen, durch welchen dann die Zeichnungsebene gelegt wird.

1) *Der Punkthaufen möge nur 2 in einer Geraden sich schneidende Symmetrieebenen besitzen; also ist $n = 2$. Nach dem vorigen Satze ist dann $\alpha = 90^\circ$. Dafs in der Ebene der Zeichnung ein Punkt existiren mufs, sieht man so ein: q sey irgend ein aufserhalb der Ebene gelegener Punkt des Haufens; dann erfordert die eine Symmetrieebene S_1 den symmetrischen Punkt q_1 , welcher in derselben Höhe wie q über der Zeichnungsebene liegt. Dann mufs, nach dem Princip, ein Punkt existiren, der zu p so liegt, wie q_1 zu q dieser fällt dann augenscheinlich in die Zeichnungsebene. Wendet man zu derselben Construction die zweite Symmetrieebene S_2 an, so findet man noch einen Punkt in der Zeichnungsebene; diese beiden Punkte bestimmen mit p zusammen ein in dieser Ebene befindliches Netz.*

Der zu p nächste Punkt in der Zeichnungsebene sey q ; so ist $\overline{pq}$ der kleinste Abstand, den 2 Punkte dieses ganzen Netzes haben können. q kann zwei Lagen haben:

a) *Er liege in der einen Symmetrieebene S_1 (Fig. 9 Taf. III). Der zweitnächste Punkt zu p in der Zeichnungsebene sey r .*

Wäre der Abstand dieses Punktes von der zweiten Symmetrieebene $S_2 < \frac{1}{2}\overline{pq}$, so wäre der Abstand dieses Punktes von seinem symmetrischen $r_1 < \overline{pq}$, was unmöglich ist. Wäre dagegen der Abstand von der Symmetrieebene $> \frac{1}{2}\overline{pq}$, so würde derjenige Punkt, der zu r so liegt, wie p zu q , doch wieder näher als $\frac{1}{2}\overline{pq}$ an der Symmetrieebene liegen. Es bleibt nur übrig, daß der Punkt r entweder gerade den Abstand $\frac{1}{2}\overline{pq}$ von S_2 hat, oder daß er in die Symmetrieebene S_2 fällt. Im ersteren Falle entsteht ein Netz mit rhombischen Maschen, in welchem die 2 Symmetrieebenen durch die Rhombendiagonalen gehen (Fig. 10 Taf. III); im zweiten Fall entsteht ein Netz mit rechteckigen Maschen, in welchem die 2 Symmetrieebenen durch die Rechtecksseiten gehen (Fig. 11).

b) Der zu p nächste Punkt q in der Ebene der Zeichnung liege nicht in einer Symmetrieebene (Fig. 12). Die beiden Symmetrieebenen fordern dann die Punkte q_1, q_2, q_3 , und man hat ein Netz mit rhombischen Maschen, welches sich von dem vorigen (Fig. 10) nur dadurch unterscheidet, daß die kurze Rhombendiagonale nicht $<$ die Rhombenseite ist, wie dort, sondern größer.

Somit hat sich ergeben, daß der Fall zweier sich schneidenden Symmetrieebenen möglich ist, da sich dabei wirklich parallelogrammatische Netze construiren lassen; und zwar 2 Arten derselben.

Daß dann auch *parallelepipedische* Haufen möglich sind, folgt einfach daraus, daß man nur senkrecht über dem construirten ein paralleles congruentes Netz zu construiren braucht, welches dann zu den Symmetrieebenen dieselbe Lage hat.

2) Der Punkthaufen besitze 3 in einer Geraden sich schneidende Symmetrieebenen. Nach Satz III ist bei $n = 3$. $\alpha = 60^\circ$. Der zu p nächste Punkt q in der Ebene der Zeichnung kann entweder in einer Symmetrieebene liegen oder nicht. Er liege in S_1 (Fig. 13). Dann erfordern die beiden anderen Symmetrieebenen die Existenz von q_1 in S_3

und q_2 in S_2 . Die 3 Punkte pqq_1 bestimmen ein parallelogrammatisches Netz mit den Winkeln 120° und 60° ; und die Symmetrieebenen führen auf keine anderen Punkte als auf die Knoten dieses Netzes.

Zweitens liege der zu p nächste Punkt q der Zeichnungsebene nicht in einer Symmetrieebene. Dann erfordern die Symmetrieebenen die Punkte $q_1q_2q_3q_4q_5$, Fig. 14 Taf. III, welche sämtlich auf der Peripherie eines mit pq um p beschriebenen Kreises liegen. Fällt q nicht in die Mitte zwischen zwei benachbarte Symmetrieebenen, so ist der Abstand des einen zu q symmetrischen Punkts von $q <$ der Radius des Kreises, pq . Weil nun nach dem Princip ein Punkt existiren müßte, der zu p so liegt, wie q_2 zu q , so würde man auf einen Punkt P geführt, der innerhalb des Kreises, also an p näher läge als q ; und das ist unmöglich. Nur in dem Falle, wo q gerade in die Mitte zwischen 2 Symmetrieebenen fällt, haben je 2 benachbarte Punkte q denselben Abstand wie pq , und man erhält ein Netz mit parallelogrammatischen Maschen von 120° und 60° , wie vorher, nur dafs jetzt die Symmetrieebenen nicht durch die Punkte q , sondern in der Mitte zwischen je zweien hindurchgehen.

Hiermit ist gezeigt, dafs die Existenz dreier in einer Geraden sich schneidender Symmetrieebenen in einem krystalinischen Punkthaufen möglich ist, und zwar sind 2 verschiedene Lagen des parallelogrammatischen Netzes von 60° zu den Symmetrieebenen möglich.

3) *Der Punkthaufen besitze 4 in einer Geraden sich schneidende Symmetrieebenen.* Bei $n = 4$ ist $\alpha = 45^\circ$. Der zu p nächste Punkt in der Zeichnungsebene liegt entweder in einer Symmetrieebene oder nicht.

Im erstenen Falle fordern, wenn der Punkt q in S_1 liegt (Fig. 15, Taf. III), die Symmetrieebenen S_2, S_3, S_4 die Punkte q_1, q_2, q_3 , und es entsteht ein Netz mit quadratischen Maschen.

Im zweiten Falle entstehen durch die Symmetrieebenen aus dem einen Punkt q 7 neue Punkte (Fig. 16, Taf. III). Wo

nun auch q liegen mag: immer ist seine Entfernung von einem der beiden symmetrischen Nachbarpunkte q_1 und q_7 $< pq$. Diefs darf aber nicht der Fall seyn, weil sonst ein Punkt P existiren müßte, zu p so liegend, wie q_7 oder q_1 zu q ; und P würde innerhalb des Kreises mit dem Radius pq liegen; was unmöglich ist, weil q der nächste Punkt an p seyn sollie. Es giebt also bei $n = 4$ nur eine Punktanordnung in dem Netze, nämlich nach quadratischen Maschen.

4) *Der Punkthaufen besitze 5 in einer Geraden sich schneidende Symmetrieebenen.* Bei $n = 5$ ist $\alpha = 36^\circ$. Der zu p nächste Punkt q in der Zeichnungsebene liegt entweder in einer Symmetrieebene S_1 oder nicht.

Im ersteren Falle (Fig. 17, Taf. III) erfordern die Symmetrieebenen zu q die Punkte $q_1 q_2 q_3 q_4$. Das Princip erfordert Q , zu p so gelegen, wie p zu q . Zu Q müssen wieder die symmetrischen Punkte existiren $Q_1 Q_2 Q_3 Q_4$. Also ist die Kreisperipherie mit 10 äquidistanten Punkten besetzt; also ist die Entfernung zweier Nachbarpunkte $<$ der Radius pq . Das ist aber, wie schon gezeigt, unmöglich.

Im zweiten Falle aber entstehen aus einem Punkt q 9 andere. Liegt q grade in der Mitte zwischen 2 Symmetrieebenen, so hat man auf der Peripherie 10 äquidistante Punkte, was nicht möglich ist. Liegt q nicht in der Mitte, so ist seine Entfernung von einem symmetrischen Nachbarpunkt (q_1 oder q_9) noch kleiner als vorher, also gewifs $<$ der Radius pq , was wieder unmöglich ist.

Also stellt sich heraus, dafs das Vorhandenseyn von fünf in einer geraden Linie sich schneidenden Symmetrieebenen mit dem Wesen eines krystallinischen Punkthaufens unvereinbar ist, weil kein parallelogrammatisches Netz vorhanden seyn kann. Es ist also z. B. unmöglich, dafs ein Krystall in Gestalt einer geraden Säule mit regulär fünfseitiger Basis existirt.

5) *Der Punkthaufen habe 6 in einer Geraden sich schneidende Symmetrieebenen.* Bei $n = 6$ ist $\alpha = 30^\circ$. Der zu p

nächste Punkt q in der Zeichnungsebene liegt entweder in einer Symmetrieebene oder nicht.

Im ersteren Falle werden durch die Symmetrieebenen die Punkte q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 erfordert und weiter keiner (Fig. 18 Taf. III). Das Princip ergibt ein parallelogrammatisches Netz mit dem Winkel 60° , ebenso wie bei 3 Symmetrieebenen (S. 86 Fig. 13).

Im zweiten Falle entstehen aus q 11 neue Punkte. Wie auch q liegen mag: immer ist die Distanz zweier Nachbarpunkte $<$ der Radius pq , was nicht stattfinden darf.

Es kann also Punkthaufen mit 6 in einer Geraden sich schneidenden Symmetrieebenen geben. Das zu den Ebenen senkrechte Netz hat dann parallelogrammatische Maschen von 60° , deren Punkte auf den Symmetrieebenen liegen.

6) *Hat der Punkthaufen mehr als 6 in einer Geraden sich schneidende Symmetrieebenen*, so mag der zu p nächste Punkt q in einer Symmetrieebene liegen oder nicht; immer erhält man auf der Peripherie des mit pq beschriebenen Kreises Punkte, deren Distanz $< pq$ ist, was nach dem Vorhergehenden unmöglich ist. — Mehr als 6 Symmetrieebenen dürfen sich also nicht in einer Geraden schneiden. In diesem Paragraphen ist also folgendes Resultat gewonnen:

Satz IV. »In einem krystallinischen (oder parallelepipetischen) Punkthaufen können sich nur 2, 3, 4 oder 6 Symmetrieebenen in derselben geraden Linie schneiden.«

§. 7.

Aufsuchung derjenigen Punkthaufen, bei denen sich in einer geraden Linie nur zwei Symmetrieebenen schneiden.

Vorher ist gezeigt (S. 85 und 86), dafs bei einem Punkthaufen mit 2 Symmetrieebenen ($n=2$, $\alpha=90^\circ$) das in einer, zu beiden senkrechten, Ebene liegende Punktnetz 2 verschiedene Anordnungen zeigen kann: nämlich nach rhombischen und nach rechteckigen Maschen.

1) *Das zu den beiden Symmetrieebenen senkrechte Netz habe rhombische Maschen.*

Zur Bestimmung der Anordnung des ganzen Haufens dient nur die Kenntnifs von der Lage eines einzigen aufer-

halb dieser Netzebene liegenden (sogenannten *oberen*) Punktes, weil ja nach dem Princip bekannt ist, daß sich um diesen ein dem ersteren paralleles congruentes Punktnetz ausbreiten muß.

Die senkrechte Projection eines oberen Punkts auf die anfängliche Netzebene heiße π (Fig. 19, Taf. III), so kann π nicht innerhalb des durch 3 nächstbenachbarte Punkte pqr bestimmten Dreiecks liegen. Denn die Symmetrieebene S_1 würde den symmetrischen Punkt π_1 erfordern, und dann wäre die Entfernung $\pi\pi_1$ verschieden von der ihr parallelen Distanz zweier Punkte des Anfangnetzes ($\overline{ps}$). Also würde man durch das Princip auf einen *neuen* Punkt P des Anfangsnetzes geführt, welcher zu p ebenso liegen müßte wie π zu π_1 . Dann aber wären pq und pr (oder ps) nicht mehr die kleinsten Punktdistanzen in jenem Netz, was doch angenommen war. Also kann π eine solche Lage nicht haben.

Diese Betrachtung kehrt im Folgenden immer wieder. Also wird es künftig genügen, zu zeigen, daß die dem Anfangsnetz parallele Distanz zweier oberen Punkte verschieden ist von der ihr parallelen Distanz zweier Punkte des Anfangsnetzes, um daraus den Schluss zu ziehen, daß eine solche Lage des oberen Punktes nicht möglich ist. —

Ebenso wenig kann π in einer der beiden gleichen Seiten des gleichschenkligen Dreiecks pqr liegen. Fällt π dagegen in die Spitze r , so stößt man auf keinen Widerspruch, hat also eine mögliche Lage gefunden. *Dann liegt senkrecht über jedem Netzpunkt wieder ein Punkt.* Also ist bewiesen, daß ein Punkthausen, der zum Kern eine gerade rhombische Säule hat, zu den Punkthausen mit nur 2 in einer Geraden sich schneidenden Symmetrieebenen gehört.

Jetzt möge die senkrechte Projection k des oberen Punktes in die Grundlinie pq des Dreiecks pqr fallen. Die Symmetrieebene S_2 fordert den Punkt k_2 . So lange die Entfernung $\overline{kp} < \frac{1}{2}\overline{pq}$ ist, ist $\overline{kk_2} < \overline{pq}$; also kann π nicht so liegen. Ist ferner $\overline{kp} > \frac{1}{2}\overline{pq}$, so ist $\overline{kq} < \frac{1}{2}\overline{pq}$, und die eben in Bezug auf p angestellte Betrachtung läßt

sich für q und die durch sie gelegte Symmetrieebene S_2 durchführen. — Ist schliesslich k gerade in der Mitte von pq gelegen, so ist $kh_1 = pq$. Diefs führt auf keine neuen Punkte unseres Netzes; also ist eine mögliche Lage gefunden.

Dann liegt senkrecht über der Mitte eines jeden Rhombus des Anfangsnetzes ein Punkt. Construiert man das dritte parallele Netz, so liegt es mit allen Punkten senkrecht über dem ersten, und man erkennt: *Ein Punkthaufen, dessen Grundparallelepipedon eine gerade rhombische Säule ist, die im Centrum noch einen Punkt trägt, gehört zu den Haufen mit zwei in einer Geraden sich schneidenden Symmetrieebenen.*

2) *Das zu beiden Symmetrieebenen senkrechte Netz habe rechteckige Maschen.*

Die senkrechte Projection π eines oberen Punkts liege irgendwo innerhalb des Rechtecks $pqs r$ (Fig. 20, Taf. III). Dann erfordert S_1 den Punkt π_1 . Ist nun die Entfernung des Punktes π von $S_1 <$ oder $>$ die halbe Rechtecksseite $\overline{pr}$, so ist $\pi\pi_1 <$ oder $> \overline{pr}$; also ist diese Lage von π unmöglich; und π kann nur in einer Geraden liegen, deren Abstand von $S_1 = \frac{1}{2}\overline{pr}$ ist. In diesem Falle ergeben sich keine neuen Punkte des Anfangsnetzes. Ebenso folgt wegen der zweiten Symmetrieebene S_2 , dass π nur in einer Entfernung von S_2 liegen kann, welche $= \frac{1}{2}\overline{pq}$ ist. So ergiebt sich, *dass ein oberer Punkt nur über dem Mittelpunkt des Rechtecks liegen kann.* Construiert man das dritte parallele Netz, so liegen seine Punkte senkrecht über dem ersten, und man erkennt, *dass ein Haufen mit 2 senkrechten Symmetrieebenen nach rechtwinkligen Parallelepipedon geordnet seyn kann, welche im Centrum noch einen Punkt tragen.*

Jetzt möge die Projection k des oberen Punkts in die Rechtecksseiten fallen; dann überzeugt man sich ebenso, dass k nur in den Ecken oder in den Seitenmitten liegen kann. *Im ersteren Fall hat man eine Punktanordnung, deren Kern ein rechtwinkliges Parallelepiped ist.*

Im anderen construiert man das dritte Netz und erkennt, *dass der Punkthaufen nach rechtwinkligen Parallelepipedon*

geordnet ist, bei denen ein Paar Gegenseiten in ihren Mitten noch einen Punkt tragen.

Andere Anordnungsarten der Punkthaufen mit 2 senkrechten Symmetrieebenen giebt es nicht, weil mit den fünf aufgezählten alle Möglichkeiten erschöpft sind.

Bei allen fünf Anordnungsarten ist unmittelbar klar, daß die Ebene der Zeichnung zugleich eine Symmetrieebene ist. Weil nun jeder Punkthaufen, der überhaupt 2 senkrechte Symmetrieebenen besitzt, eine der gefundenen Punktanordnungen darbieten muß, so ist folgendes *Resultat* gewonnen:

Satz V. »Besitzt ein Punkthaufen überhaupt zwei senkrechte Symmetrieebenen, so besitzt er zugleich eine dritte, welche auf beiden senkrecht steht.«

Die fünf gefundenen Punktanordnungen sind nicht alle von einander verschieden; vielmehr fallen die erste und letzte zusammen. Diefß sieht man so ein: In Fig. 21, Taf. III sind S_1 , S_2 und die Zeichnungsebene die drei aufeinander senkrechten Symmetrieebenen. $pqsr$ ist eine rechteckige Masche des zu den beiden ersten Ebenen senkrechten Netzes. In gleicher Entfernung über und unter der Mitte π der Rechtecksseite pr liegt ein Punkt; dann hat man die fünfte Anordnungsart construiert. — Diese beiden Punkte zusammen mit p und r , bestimmen einen Rhombus, so daß die Symmetrieebene S_2 rhombische Maschen hat. Weil nun nur senkrecht über und unter den Punkten dieses rhombischen Netzes sich Punkte befinden, so ist diese Anordnung die nach graden rhombischen Säulen, womit die Uebereinstimmung beider Anordnungsweisen dargethan ist.

Resultat: *Es giebt vier verschiedene Anordnungsarten von krystallinischen Punkthaufen mit zwei senkrechten Symmetrieebenen:*

- 1) *Die Anordnung nach der geraden rhombischen Säule.*
- 2) *Dieselbe, wo aber jedes Säulencentrum noch einen Punkt trägt.*
- 3) *Die Anordnung nach dem rechtwinkligen Parallelepiped.*
- 4) *Dieselbe, wo aber jedes Parallelepipedscentrum noch einen Punkt trägt.*

§. 8.

Aufsuchung derjenigen Punkthaufen, bei denen sich in einer geraden Linie nur 3 Symmetrieebenen schneiden.

Vorher ist gezeigt (S. 86 und 87), daß bei einem Punkthaufen mit 3 in einer Geraden sich schneidenden Symmetrieebenen ($n=3$, $\alpha=60^\circ$) das zu diesen Ebenen senkrechte Netz 2 verschiedene Anordnungen zeigen kann.

1) *Um einen Punkt herum liegen in gleicher Entfernung 6 Punkte auf den durch den ersten Punkt gehenden Symmetrieebenen.*

Das Netz hat parallelogrammatische Maschen von 60° .

Die senkrechte Projection π eines oberen Punktes kann nicht innerhalb des durch 3 nächstbenachbarte Punkte pqr bestimmten Dreiecks liegen (Fig. 22, Taf. III). Denn die Symmetrieebene S_2 würde den Punkt π_2 erfordern, und bei jeder Lage von π würde $\overline{\pi\pi_2} <$ die ihr parallele Entfernung $\overline{qs}$ zweier Punkte des Anfangsnetzes seyn. Also ist diese Lage von π unmöglich. Ebensowenig kann π in eine der 3 Seiten dieses Dreiecks fallen. Es bleibt nur übrig, daß π in eine Ecke des Dreiecks fällt

Dann liegt also senkrecht über jedem Punkte des Netzes ein Punkt, und man hat die Anordnung nach geraden 3 seitigen Säulen, deren Basis ein gleichseitiges Dreieck ist.

Man erkennt unmittelbar, daß dann die Zeichnungsebene eine Symmetrieebene ist. Diese steht auf den drei gegebenen senkrecht. Also erfordert Satz V das Vorhandenseyn von noch 3 Symmetrieebenen, deren jede auf je zwei senkrechten von den vorigen senkrecht steht. Diese neuen Symmetrieebenen gehen durch dieselbe Gerade, wie die ersten drei, und halbiren deren Winkel. Dann hat man also 6 in einer Geraden sich schneidende Symmetrieebenen, welcher Fall erst nachher untersucht wird, so daß die gefundene Punktanordnung nicht hierher gehört.

2) *Um einen Punkt herum liegen in gleicher Entfernung 6 Punkte auf den Halbierungslinien der Winkel, die von den 3 Symmetrieebenen gebildet werden.*

Das von 3 nächstbenachbarten Punkten pqr gebildete

Dreieck wird durch die Symmetrieebene S_2 halbiert (Fig. 23, Taf. III). Innerhalb des so entstandenen Dreiecks pqt kann die Projection π eines oberen Punktes nicht liegen, denn S_2 würde den symmetrischen Punkt π_2 erfordern, und $\overline{\pi\pi_2}$ wäre $<$ die parallele Punkt-Distanz qr dieses Netzes. Ebenso kann π nicht in die Seiten qt und pq dieses Dreiecks fallen. Aber in q darf π fallen. Dann hat man jedoch, wie vorher die Punktanordnung nach geraden dreiseitigen Säulen, welche nicht hergehört. —

Endlich möge π in die Seite pt fallen (Fig. 24, Taf. III). Dann erfordert S_3 den symmetrischen Punkt π_1 , welcher in die Symmetrieebene S_1 fällt. Im Allgemeinen ist nun freilich die Distanz $\overline{\pi\pi_1}$ verschieden von der parallelen Distanz rs , so daß diese Lage von π dann unmöglich ist. Nur in einem Falle ist $\overline{\pi\pi_1} = rs$ oder $= pq$, nämlich wenn π im Mittelpunkt des gleichseitigen Dreiecks pqr liegt (so daß $p\pi = \frac{2}{3}pt$ ist). Dann erfordert also S_3 den Punkt π_1 , und S_1 sowohl als S_2 führen auf denselben dritten Punkt π_2 , wo $\overline{\pi\pi_2} = \overline{\pi_1\pi_2} = pq$. Durch diese Punkte wird man, nach dem Princip, nicht auf irgend welche neuen Punkte des Netzes pqr geführt, hat also eine mögliche Lage eines oberen Punktes gefunden. Construiert man in irgend welcher Höhe über diesen Projectionspunkten das obere Netz weiter, indem man von dem gefundenen gleichseitigen Dreieck $\pi\pi_1\pi_2$ ausgeht, dessen Centrum *keinen* Massenpunkt enthält, so findet man ein dem anfänglichen congruentes, paralleles Netz aus gleichseitig dreieckigen Maschen, welches aber gegen das anfängliche in der Art verschoben ist, daß seine Punkte über den Mitten der abwechselnden Dreiecke des Anfangsnetzes liegen. Das Parallelepipiped $rpsv\pi_2\pi\pi_1$ (wenn unter den π die *oberen* Punkte verstanden werden) kann als Kern angesehen werden.

Aber eine deutlichere Vorstellung von dem Wesen dieses Punkthaufens erhält man, wenn man noch das dritte und vierte parallele Netz construiert. Bei dem eben construirten zweiten Netz ist der Rhombus $rpsv$ so verschoben, daß

seine Projection die Lage $\pi\pi_2\pi_1\pi_3$ erhalten hat, wo $\overline{\pi_3 v} = \frac{2}{3}\overline{pt}$ ist. Bei dem dritten parallelen Netz wird derselbe Rhombus nochmals ebensoweit verschoben, so daß seine Projection $\Pi\Pi_2\Pi_1\Pi_3$ in die Mitten der anderen Dreiecke fällt, über denen vorher noch keine Punkte lagen. Hier ist $\pi_3\Pi_3$ wieder $= \frac{2}{3}\overline{pt}$. Das vierte parallele Netz endlich hat seine Punkte wieder senkrecht über denen des Anfangsnetzes liegen; denn $\Pi_3 p$ ist ebenfalls $= \frac{2}{3}\overline{pt}$. Seine Punkte mögen $PP_1 \dots$ heißen. Bezeichnet man (in Fig. 25, Taf. III) die oberen Punkte mit denselben Buchstaben, wie vorher ihre Projectionen, so sieht man, daß die 8 Punkte $p, \pi\pi_1\pi_2, \Pi\Pi_2\Pi_1, P$, welche respective dem ersten, zweiten, dritten und vierten Netze angehören, die Ecken eines Rhomboëders bilden, welches somit als Kern einer Punktanordnung erkannt ist, die 3 in einer Geraden sich schneidende Symmetrieebenen besitzt, gehend durch beide Endecken und je zwei Randecken des Rhomboëders.

Eine andere Punktanordnung ist nicht möglich. Also ist das Resultat dieses Paragraphen:

»Schneiden sich bei einem Punkthaufen nur 3 Symmetrieebenen in einer geraden Linie, so ist nur eine Anordnung der Punkte möglich: nach dem Rhomboëder.

§. 9.

Aufsuchung derjenigen Punkthaufen, bei denen sich in einer geraden Linie nur 4 Symmetrieebenen schneiden.

Vorher ist gezeigt (S. 87), daß bei einem solchen Punkthaufen (wo $n=4$; $\alpha=45^\circ$ ist) nur eine Punktanordnung in dem zu diesen Symmetrieebenen senkrechten Netze stattfinden kann, nämlich nach quadratischen Maschen, wobei die Symmetrieebenen mit den Seiten und Diagonalen der Quadrate zusammenfallen. — Die senkrechte Projection π eines oberen Punktes liege irgendwo innerhalb des Quadrates $pqrs$ (Fig. 26, Taf. III). Dann erfordert S_3 den symmetrischen Punkt π_3 . Die Entfernung beider Punkte $\overline{\pi\pi_3}$ ist im Allgemeinen verschieden von der parallelen Entfernung $\overline{pq}$, so daß π nicht so liegen kann. Nur in dem einen Falle

ist $\overline{\pi\pi_3} = \overline{pq}$, wenn π von der Symmetrieebene S_3 um $\frac{1}{2}\overline{pq}$ absteht. Da dasselbe von dem Abstände des Punktes π von S_1 gilt, so darf π nur in die Mitte des Quadrats fallen. Dann ergeben sich keine neuen Punkte des Anfangsnetzes, und man hat eine mögliche Lage des oberen Punktes gefunden. Das obere Netz ist also so beschaffen, daß seine Punkte über den Mitten aller Quadrate des Anfangsnetzes liegen. Construiert man in gleicher Weise das dritte parallele Netz, so liegen dessen Punkte wieder senkrecht über denen des ersten. Also ist gefunden, daß ein Punkthaufen mit 4 durch dieselbe Gerade gehenden Symmetrieebenen angeordnet seyn kann nach quadratischen geraden Säulen, in deren Mitten sich Punkte befinden.

Fällt jetzt π in eine Quadratseite, so sieht man, wie vorher, daß es höchstens in ihrer Mitte liegen könnte; dann erfordert die durch die Diagonale gehende Symmetrieebene einen Punkt, dessen Abstand von dem ersteren verschieden ist von der parallelen Entfernung zweier Punkte des Netzes. Es bleibt nur übrig, daß π in eine Ecke des Quadrats fällt; dieß ist eine mögliche Lage; dann liegen senkrecht über allen Netzpunkten wieder Punkte, und man hat die Anordnung nach geraden quadratischen Säulen.

Resultat: *Schneiden sich in einem krystallinischen Punkthaufen 4 Symmetrieebenen in einer Geraden, so kann der Haufen nur zwei verschiedene Anordnungen haben:*

- 1) *Die Anordnung nach der geraden quadratischen Säule.*
- 2) *Dieselbe, wo aber jedes Säulencentrum noch einen Punkt trägt.*

Bei beiden Anordnungen ist, nach Satz V, die Zeichnungsebene ebenfalls eine Symmetrieebene, was man auch unmittelbar einsieht. —

§. 10.

Aufsuchung derjenigen Punkthaufen, welche nur 6 durch dieselbe Gerade gehende Symmetrieebenen besitzen.

Auf S. 89 ist gezeigt, daß in einem solchen Punkthaufen, (wo $n = 6$, $\alpha = 30^\circ$ ist,) nur eine Anordnung des zu jenen Ebenen senkrechten Netzes stattfinden kann. Hier liegen

nämlich um einen Punkt 6 Punkte in gleicher Entfernung, und zwar auf 3 abwechselnden von den 6 durch ersteren Punkt gehenden Symmetrieebenen. ^a(Fig. 18, Taf. III). Wie auf S. 93 findet man, *dafs der Haufen nur die gerade reguläre dreiseitige Säule zum Kern haben kann*, und dafs keine andere Anordnung möglich ist.

Weil von den 6 Symmetrieebenen je 2 aufeinander senkrecht stehen, mufs, nach Satz V, die auf diesen senkrechte, d. h. die Ebene der Zeichnung, ebenfalls eine Symmetrieebene seyn. Diefs ist auch an sich klar. —

§. 11.

Hiermit ist die Anordnung der verschiedenen Punkthaufen gefunden, bei denen sich nur 2, 3, 4 oder 6 Symmetrieebenen in einer geraden Linie schneiden. Es bleibt nur der letzte Theil der Untersuchung übrig, nämlich:

Die Aufsuchung der übrigen Symmetrieebenen in den gefundenen Punkthaufen.

Im ersten System (S. 80) existirt gar keine Symmetrieebene. Im zweiten (S. 80) giebt es überhaupt nur eine. Die erste Frage ist:

§. 12.

Giebt es noch mehr Symmetrieebenen in denjenigen Punkthaufen, bei denen sich nicht mehr als 2 Symmetrieebenen in einer geraden Linie schneiden?

Nach Satz V existirt stets noch eine dritte zu beiden senkrechte Symmetrieebene. Es bleibt zu untersuchen, ob noch mehr Symmetrieebenen vorhanden seyn können. — Angenommen es gäbe noch eine vierte Symmetrieebene S_4 , so kann sie, wie in Satz III und IV bewiesen ist, mit jeder der anderen nur einen der Winkel 30° , 45° , 60° , 90° , oder Vielfache davon, einschliessen. Aber die Winkel 30° , 45° , 60° sind hier ausgeschlossen, weil man dann mehr als 2 in derselben Geraden sich schneidende Symmetrieebenen haben würde. Also kann die neue Symmetrieebene mit jeder der 3 vorhandenen, auf einander senkrechten, nur rechte Winkel bilden; das ist aber unmöglich. Also giebt es in diesem System nur jene 3 Symmetrieebenen.

§. 13.

Giebt es in den Punkthaufen, wo nur 3 Symmetrieebenen durch dieselbe Gerade gehen, noch andere Symmetrieebenen?

Auf den drei Symmetrieebenen zugleich kann keine vierte senkrecht stehn; denn indem z. B. S_4 auf S_1 senkrecht stände, müßte nach Satz V noch eine auf diesen beiden senkrechte: S_5 vorhanden seyn, welche durch dieselbe Gerade, wie die ersteren drei, gehen müßte. Dann hätte man aber mehr als 3 in einer Geraden sich schneidende Symmetrieebenen, was gegen die Voraussetzung ist. —

Um die Untersuchung weiter zu führen, wird die Kugelprojection angewandt. (Fig. 27, Taf. III). Man denkt sich um den betrachteten Punkt des Haufens eine Kugel construirt, und zeichnet darauf außer den Schnittlinien S der 3 Symmetrieebenen mit der Kugel auch noch die 6 Punkte σ , wo die Normalen der Symmetrieebenen die Kugel schneiden. In den Umfang des gezeichneten Kreises kann kein siebenter Normalenpunkt σ fallen, sonst schnitten sich mehr als 3 Symmetrieebenen in einer Geraden. Dafs in O kein Normalenpunkt liegen kann, ist eben bewiesen. Also könnte ein Normalenpunkt nur noch innerhalb eines der Kugelstreifen, z. B. S_1OS_2 , liegen. Angenommen er liege auf der Halbierungslinie $O\sigma_3$ desselben, im Punkte r . S_2 fordert den symmetrischen Punkt r_2 . Der Winkel dieser beiden Normalen r und r_2 (und also auch der zugehörigen Symmetrieebenen) ist nun $< 60^\circ$, denn erst wenn beide Punkte bis nach σ_3 und σ_1 hinabrücken würden, wobei sie sich kontinuierlich von einander entfernen, würde ihr Winkel 60° betragen. Aber in diesem Punkthaufen darf es nicht Symmetrieebenen geben, deren Winkel $< 60^\circ$ ist, weil sonst mehr als 3 Symmetrieebenen durch dieselbe Gerade gehen würden. *In der Halbierungslinie $O\sigma_3$ des Kugelstreifens darf also kein Normalenpunkt liegen.* —

Würde sich ferner außerhalb derselben, z. B. in ϱ , ein solcher Punkt befinden, so würden die Symmetrieebenen S_1 und S_2 die Punkte ϱ_1 und ϱ_2 erfordern, und nun muß einer der beiden Normalenwinkel $\varrho\varrho_1$ und $\varrho\varrho_2$ jedenfalls kleiner seyn als

der Winkel zweier symmetrischen Punkte in den Halbirungslinien der Kugelstreifen, welche soeben betrachtet wurden. Diese Lage von ϱ ist also ebenfalls unmöglich. Demnach bliebe nur übrig, daß ein Normalenpunkt in eine der Symmetrieebenen fällt, z. B. nach p_1 in der Ebene S_1 , (Fig. 28, Taf. III). Dann erfordern S_2 und S_3 die Normalenpunkte p_3 und p_2 . Die Normalen p_1 und p_2 dürfen nur die Winkel 60° oder 90° mit einander bilden, denn die kleineren Winkel 30° und 45° dürfen ja in diesem System nicht vorkommen.

a) Zunächst sey der Winkel $\widehat{p_1 p_2} = 60^\circ$.

Die zugehörigen Symmetrieebenen $P_1 P_2 P_3$ seyen gezeichnet. Dann bedarf es keines Beweises, daß sich je 2 dieser Symmetrieebenen und eine der anfänglichen in einer geraden Linien schneiden, (auf der Kugeloberfläche also in den Punkten $o_1 o_2 o_3$); denn dies ist eine unmittelbare Folge der symmetrischen Gruppierung. — Weil ferner jede der neuen Symmetrieebenen P auf derjenigen Symmetrieebene S senkrecht steht, in welcher ihre Normale p liegt, so muß, nach Satz V, zu je 2 solchen Symmetrieebenen eine dritte, auf beiden senkrechte, existiren, z. B. Σ_1 sey die auf P_1 und S_1 senkrechte; dann läßt sich leicht zeigen, daß sie durch die Punkte s_2 und s_3 der Kugelfläche gehen muß, in denen die anderen Paare von Symmetrieebenen S_2 und P_2 , und S_3 und P_3 , aufeinander senkrecht stehen. Dazu hat man nur nachzuweisen, daß $\widehat{s_1 s_2} = 90^\circ$ ist.

In dem sphärischen Dreieck $s_2 O o_3$ ist der Winkel bei $s_2 = 90^\circ$. Der Winkel $\sigma_1 o_3 s_2$ ist $= 60^\circ$, weil die Normalen beider Ebenen $p_1 p_2$ den $\angle 60^\circ$ bilden. Also ist der Nebwinkel $s_2 o_3 s_1 = 120^\circ$. Aber die Symmetrieebene S_3 halbiert diesen Winkel. Also ist $s_2 o_3 O = 60^\circ$. Auch der $\angle s_2 O o_3$ ist $= 60^\circ$. Drückt man nun in jenem Dreieck die Seite $s_2 o_3$ durch die 3 Winkel aus, was nach der bekannten Formel geschieht:

$$\cos \alpha = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C},$$

so ist:

$$\cos \widehat{s_2 o_3} = \frac{\cos 60^\circ + \cos 90^\circ \cos 60^\circ}{\sin 90^\circ \sin 60^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Also ergibt sich aus dem gleichschenkligen sphärischen Dreieck $s_1 s_2 o_3$ die Seite $s_1 s_2$ nach der Formel:

$$\begin{aligned} \cos \widehat{s_1 s_2} &= \cos \widehat{s_2 o_3} \cdot \cos \widehat{s_1 o_3} + \sin \widehat{s_2 o_3} \cdot \sin \widehat{s_1 o_3} \cdot \cos s_1 o_3 s_2 \\ &= \cos^2 \widehat{s_2 o_3} + \sin^2 s_2 o_3 \cdot \cos 120^\circ. \\ &= \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = 0, \end{aligned}$$

d. h. der Bogen $s_1 s_2$ ist $= 90^\circ$.

Construirt man ebenso die auf $S_3 P_3$ senkrechte Symmetrieebene Σ_3 , so läßt sich ebenso zeigen, daßs auch sie durch den Punkt s_2 gehen mußs. Dann schneiden sich also 4 Symmetrieebenen: $S_2 P_2 \Sigma_1 \Sigma_3$ in derselben Geraden (die durch s_2 dargestellt ist). Aber in unseren Punkthaufen sollten sich höchstens 3 Symmetrieebenen in einer Geraden schneiden. Also ist bewiesen, daßs die Normalenpunkte etwaiger neuer Symmetrieebenen nicht so in den anfänglichen Symmetrieebenen liegen können, daßs sie miteinander 60° bilden.

b) Der Winkel $\widehat{p_1 p_2}$ sey $= 90^\circ$.

Zeichnet man die zugehörigen Symmetrieebenen, so hat man Fig. 29, Taf. III. Hier bilden die neuen Symmetrieebenen P_1 und P_3 im Schnittpunkte p_2 einen rechten Winkel. Weil aber beide zur Symmetrieebene S_2 symmetrisch liegen, halbirt diese ihren Winkel. Also hat man als Winkel zweier Symmetrieebenen 45° erhalten. Das ist aber in diesem Punkthaufen unmöglich.

Hiermit ist gezeigt, daßs es in Haufen mit nur 3 in einer Geraden sich schneidenden Symmetrieebenen gar keine andere Symmetrieebene geben kann.

§. 14.

Jetzt soll zunächst das letzte System untersucht werden, in dem sich 6 Symmetrieebenen in derselben Geraden schneiden.

Nach Satz V existirt eine zu allen 6 Symmetrieebenen senkrechte. Ihr Normalenpunkt ist O , Fig. 30, Taf. III. Indem äußeren Kreise kann kein neuer Normalenpunkt liegen, sonst

schnitten sich in O mehr als 6 Symmetrieebenen. Auf der Halbirungslinie Or_1 des Kugelstreifens S_1OS_2 darf auch kein solcher Punkt ϱ_1 liegen, denn S_2 fordert ϱ_2 , und der Winkel $\widehat{\varrho_1\varrho_2}$ ist $< 30^\circ$, weil er erst $= 30^\circ$ würde, wenn die Punkte bis r_1 und r_2 hinabrückten. — Ferner darf innerhalb des Streifens S_1OS_2 ebenfalls kein Punkt π liegen; denn die Symmetrieebenen S_1 und S_2 würden die Punkte π_1 und π_2 erfordern, und einer der beiden Winkel $\widehat{\pi\pi_1}$ und $\widehat{\pi\pi_2}$ muß kleiner seyn als wenn π auf der Halbirungslinie Or_1 läge. Also ist diese Lage von π nicht möglich. — Schließlich könnte ein Normalenpunkt noch in eine der 6 Symmetrieebenen fallen, z. B. p_1 in S_1 . Diese Normale darf mit O nur die Winkel 30° oder 45° oder 60° bilden. Dann erfordern die abwechselnden Symmetrieebenen die Punkte $p_2p_3p_4p_5p_6$. Jetzt werden diese drei Lagen nacheinander als unmöglich bewiesen.

1) $\angle \widehat{p_1O} = 30^\circ$. Im Δp_1Op_2 ist nach einem bekannten Satze:

$$\cos \widehat{p_1p_2} = \cos p_1O \cdot \cos p_2O + \sin p_1O \cdot \sin p_2O \cdot \cos p_1Op_2,$$

d. i.

$$= \cos^2 30^\circ + \sin^2 30^\circ \cdot \cos 60^\circ.$$

$$= \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 + \left[1 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2\right] \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{8} = \frac{1}{8}\sqrt{49}.$$

Also ist $\angle \widehat{p_1p_2} < 30^\circ$, denn $\cos 30^\circ$ ist größer als $\frac{7}{8}$, nämlich $= \frac{1}{8}\sqrt{48}$; also ist diese Lage unmöglich.

2) $\angle \widehat{p_1O} = 45^\circ$. Dann findet man

$$\cos \widehat{p_1p_2} = \frac{3}{4}, \text{ also } \widehat{p_1p_2} \text{ zwischen } 30^\circ \text{ und } 45^\circ.$$

3) $\angle \widehat{p_1O} = 60^\circ$. Dann ist:

$$\cos \widehat{p_1p_2} = \frac{5}{8}, \text{ also } \widehat{p_1p_2} \text{ zwischen } 45^\circ \text{ und } 60^\circ.$$

Alle diese Winkel dürfen von Symmetrieebenen nicht gebildet werden. Also ist bewiesen, daß in dem System mit 6 in einer Geraden sich schneidenden Symmetrieebenen außer der auf allen 6 senkrechten Symmetrieebene keine andere existiren kann.

§. 15.

Können in einem Punkthaufen mit höchstens 4 in einer geraden Linie sich schneidenden Symmetrieebenen noch andere Symmetrieebenen vorkommen?

Nach Satz V muß noch eine auf jenen vieren senkrechte Symmetrieebene existiren. Der $\angle 30^\circ$ ist ausgeschlossen, weil sonst 6 Symmetrieebenen durch dieselbe Gerade gehen würden. Die Winkel 45° , 60° , 90° sind möglich. — In dem äußeren Kreise Fig. 31, Taf. III darf kein neuer Normalenpunkt liegen, sonst gingen mehr als 4 Symmetrieebenen durch dieselbe Gerade O . — Auf der Halbierungslinie Or des Kugelstreifens $S_1 OS_2$ darf ebenfalls kein Normalenpunkt ϱ liegen, denn der Winkel dieser Normale gegen ihre symmetrische ϱ_1 ist $< 45^\circ$, weil er kleiner ist als der $\angle r r_1$, welcher $= 45^\circ$. — Innerhalb des Streifens $S_1 OS_2$ darf außerdem auch kein solcher Punkt π liegen; denn die beiden symmetrischen Punkte π_1 und π_2 müßten existiren, und einer der beiden Winkel $\widehat{\pi\pi_1}$ und $\widehat{\pi\pi_2}$ ist jedenfalls kleiner als wenn π auf der Halbierungslinie Or läge.

Aber in der Symmetrieebene S_1 kann ein Normalenpunkt p_1 liegen (Fig. 32, Taf. III), und zwar nur unter 45° oder unter 60° gegen O geneigt.

1) Es sey Winkel $\widehat{Op_1} = 45^\circ$.

Die zu p_1 gehörige Symmetrieebene P_1 muß durch p_3 gehen, denn $p_1 O \perp Op_3 = 90^\circ$. Dieselbe P_1 ist unter 45° gegen S_3 geneigt, denn P_1 und P_3 bilden nach dem Gesagten 90° , und S_3 ist die Symmetrieebene, die ihren Winkel halbt. — Außerdem übersieht man leicht, daß die zu p_1 und die zu p_2 gehörigen Symmetrieebenen P_1 und P_2 durch denselben Punkt q_3 der Symmetrieebene S_2 gehen müssen, denn beide Ebenen liegen symmetrisch zu S_2 . Ebenso hat man in $q_1 q_2 q_3$ je 3 sich schneidende Symmetrieebenen. Daß diese 3 miteinander Winkel von 60° bilden, sieht man so ein: Dreieck $Op_2 q_1$ ist symmetrisch zu $\sigma_1 p_2 q_1$, weil $O\sigma_1$ in p_2 halbt, und weil $p_2 q_1$ in p_2 auf $O\sigma_1$ senkrecht steht.

Also ist $\angle \sigma_1 q_1 p_2 = \angle O q_1 p_2$. Ferner ist Dreieck $Op_2 q_1$

symmetrisch zu Op_1q_1 , weil $Op_2 = Op_1 = 45^\circ$, $\angle p_2Oq_1 = p_1Oq_1 = 45^\circ$ und Oq_1 gemeinsam. Also ist auch $\angle Oq_1p_2 = Oq_1p_1$. Also sind die 3 diesseits der Linie P_3 um den Punkt q_1 herumliegenden Winkel einander gleich, so daß jeder $= 60^\circ$ ist. Hiermit ist gefunden, »daß in einem Punkthaufen mit 4 in einer geraden Linie sich schneidenden Symmetrieebenen außer der auf ihnen senkrechten noch 4 andere existiren können, welche in σ_1 und σ_3 Winkel von 45° bilden, und sich außerdem noch in $q_1q_2q_3q_4$ unter 60° schneiden.«

2) Es sey Winkel $Op_1 = 60^\circ$, dann ist $\angle p_1\sigma_3 = 30^\circ$, also hätte man 2 unter 30° geneigte Symmetrieebenen, was in diesem Punkthaufen unmöglich ist.

Also ist nur der obige einzige Fall möglich.

§. 16.

Es bleibt nur noch zu untersuchen, wie beschaffen ein Punkthaufen seyn muß, wenn er außer 4 in einer Geraden sich schneidenden Symmetrieebenen und der auf ihnen senkrechten noch 4 andere in der gedachten Lage enthalten soll?

Vorher (Seite 87) ist gezeigt, daß das zu den ersten 4 Symmetrieebenen senkrechte Netz quadratische Maschen haben muß. Dann sind zwei Fälle möglich:

1) Die 4 neuen Symmetrieebenen gehen durch die Schnittlinien von S_1 und S_3 mit der auf den 4 Ebenen senkrechten Symmetrieebene (Fig. 33 Taf. III), d. h. durch die Seiten der Quadrate; oder:

2) Sie gehen durch die Schnittlinien von S_2 und S_4 mit jener Ebene, d. h. durch die Diagonalen der Quadrate.

1) Die mit der Zeichnungsebene zusammenfallende Ebene heiße S . Die Ebenen P_2 und P_4 sind je unter 45° gegen S und S_1 geneigt; ebenso P_1 und P_3 gegen S und S_3 . (Vergl. Fig. 32 und 33 Taf. III.)

Dann erfordert P_4 den zu r symmetrischen Punkt r_4 , der senkrecht über q liegt, so daß $qr_4 = qr$ ist. — P_3 erfordert den zu r symmetrischen Punkt r_3 , der senkrecht über s liegt, so daß $sr_3 = sr$ ist. Die Entfernung der

oberen Punkte vom Anfangsnetz ist also gleich den Quadratseiten, und man erkennt, daß die gerade quadratische Säule in diesem Falle in den Würfel übergeht.

Die gerade quadratische Säule, die im Centrum noch einen Punkt trägt, war die zweite mögliche Form in dem System mit nur 4 in einer Geraden sich schneidenden Symmetrieebenen. Befindet sich nun hier im Centrum des Würfels auch ein Punkt, so ist dies ebenfalls eine mögliche Anordnung, denn dieser Punkt fällt gerade in den Schnitt der zwei neuen Symmetrieebenen P_3 und P_4 .

2) Die neuen Symmetrieebenen P gehen durch die Quadratdiagonalen, nämlich durch die Schnittlinien von S_2 und S_4 mit der Zeichnungsebene, und sind gegen die Zeichnungsebene unter 45° geneigt. Die durch S_2 gehende Symmetrieebene fordert den zu s symmetrischen Punkt s_1 , der gerade in die Mitte des über pr senkrecht errichteten Quadrates fällt. Verlängert man ps_1 über s_1 hinaus um sich selbst, so muß man auf einen Punkt des Haufens treffen. Dies ist die obere Ecke des gedachten Quadrats; sie liegt senkrecht über r . Ebenso ergibt sich die andere obere Ecke. Auf dieselbe Art findet man senkrecht auf pu , ut , rt Quadrate stehen, deren Centra je 1 Punkt tragen. So ergibt sich eine Punktanordnung nach Würfeln, deren Flächencentra noch Punkte tragen. Es fragt sich, ob diese Anordnung auch nicht den Punktanordnungen widerspricht, welche allein im System mit 4 Symmetrieebenen möglich sind, weil wir es ja hier nur mit einem speciellen Fall jenes Systems zu thun haben. In der That ist aber diese Anordnung keine andere als eine nach quadratischen Säulen, deren Mitten Punkte tragen. Denn man kann den Haufen so ansehen, als bestände er aus geraden, über den Quadraten $pqr s$ errichteten Säulen von der Höhe $\overline{pr} = \overline{pq} \cdot \sqrt{2}$, deren Centra noch je 1 Punkt tragen. Würde man auch hier im Schnitt zweier neuen Symmetrieebenen noch 1 Punkt liegend annehmen, der sich dann in der Distanz $\frac{1}{2}\overline{pr}$ über s befinden müßte, so würde dies wieder eine Anordnung nach Würfeln ergeben (Würfelkante $= \frac{1}{2}\overline{pr}$).

Somit sind für dies neue System noch 3 mögliche Punktanordnungen gefunden: 1) nach Würfeln; 2) nach Würfeln, in deren Centren Punkte stehen; 3) nach Würfeln, deren Flächenmitten Punkte tragen.

Hiermit sind die möglichen verschiedenen Combinationen von Symmetrieebenen in krystallinen Punkthaufen erschöpft.

§. 17.

Das Resultat der ganzen Abhandlung ist folgendes:

Es kann nur 7 durch ihre Symmetrieverhältnisse verschiedene Arten von krystallinen Punkthaufen, d. h. 7 Krystallsysteme, geben; aber in den meisten von ihnen sind mehrere verschiedene Punktanordnungen möglich. Es sind folgende:

I) *Punkthaufen ohne Symmetrieebene oder »das ein und eingliedrige System.«*

1 *Unterabtheilung: 1) Anordnung nach schiefwinkligen, Parallelepipeden.*

II) *Punkthaufen mit 1 Symmetrieebene oder »das zwei und eingliedrige System.«*

2 *Unterabtheilungen:* { 2) Anordnung nach klinorhombischen Säulen.
3) Anordnung nach geraden Parallelepipeden mit rhomboidischer Basis.

III) *Punkthaufen mit 3 aufeinander senkrechten Symmetrieebenen oder »das zwei und zweigliedrige System.«*

4 *Unterabtheilungen:* { 4) Anordnung nach geraden rhombischen Säulen.
5) Dieselbe, wo jedes Säulencentrum noch 1 Punkt trägt.
6) Anordnung nach rechtwinkligen Parallelepipeden.
7) Dieselbe, wo jedes Parallelepipeden-centrum noch 1 Punkt hat.

IV) *Punkthaufen mit 3 durch dieselbe Gerade gehenden, unter 60° geneigten, Symmetrieebenen oder »das dreigliedrige oder rhomboëdrische System.«*

1 Unterabtheilung: 8) Anordnung nach Rhomboëdern.

V) *Punkthaufen mit 4 durch dieselbe Gerade gehenden, unter 45° geneigten Symmetrieebenen und einer auf ihnen senkrechten, oder »das viergliedrige System.«*

2 Unterabtheilungen: $\left\{ \begin{array}{l} 9) \text{ Anordnung nach geraden quadratischen Säulen.} \\ 10) \text{ Dieselbe, wo jedes Säulencentrum noch 1 Punkt trägt.} \end{array} \right.$

VI) *Punkthaufen mit 6 durch dieselbe Gerade gehenden, unter 30° geneigten, Symmetrieebenen und einer auf ihnen senkrechten, oder »das sechsgliedrige System.«*

1 Unterabtheilung: 11) Anordnung nach geraden regulär dreiseitigen Säulen.

VII) *Punkthaufen mit 9 Symmetrieebenen oder »das reguläre System.«*

3 Unterabtheilungen: $\left\{ \begin{array}{l} 12) \text{ Anordnung nach Würfeln.} \\ 13) \text{ Dieselbe, wo jedes Würfelfzentrum 1 Punkt trägt.} \\ 14) \text{ Dieselbe, wo jedes Würfelflächenzentrum 1 Punkt trägt.} \end{array} \right.$

Nach dem Vorhergehenden ist kein Grund vorhanden, die Gestalten des ein und eingliedrigen, zwei und eingliedrigen und rhomboëdrischen Systems als Halbflächner anderer Systeme anzusehen. — Was aber die Halbflächner des regulären und viergliedrigen Systems anbetrifft, welche in den vorstehenden Gruppen keinen Platz zu finden scheinen, so kann zu ihrer Erklärung angenommen werden, die Moleküle seyen nicht materielle *Punkte*, sondern kleine Polyëder von geringerer Symmetrie, die aber so gruppirt sind, wie das System verlangt. Dadurch erklärt sich das verschiedene Verhalten von sonst gleichwerthigen Flächen. Genaueres hierüber giebt Bravais (*Etudes cristallographiques* im *Journal de l'école polyt. Tome XX*) nach dem Vorgange von Häüy und Delafosse.