Ueber die Multiplication der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung.

Von

MARTIN KRAUSE in Rostock.

Aehnlich wie bei den elliptischen Functionen kann die Multiplication der hyperelliptischen Functionen einen doppelten Ausgangspunkt haben, die Transformationstheorie und das Additionstheorem. In der folgenden Arbeit soll das letztere zu Grunde gelegt werden. Zu gleicher Zeit sollen dabei mit Hülfe der linearen Transformation und der Substitution von halben Perioden eine Reihe von Coefficientenbeziehungen entwickelt werden.

§ 1.

Es sollen zunächst einige Sätze aufgestellt werden, welche mit leichter Mühe aus der Theorie der linearen Transformation und den mit derselben verbundenen Tabellen ersehen werden können. (Siehe die vorangehende Arbeit des Verfassers). Es mag die Thetafunction $\vartheta(v_1, v_2)_{\mu_\alpha \nu_\alpha p_\alpha q_\alpha}$ der Einfachheit halber bezeichnet werden bald mit $\vartheta_\alpha(v_1, v_2)$ bald mit (α) , dann sollen den folgenden Betrachtungen Quadrupel von Thetafunctionen $(\alpha)(\beta)(\gamma)(\delta)$ zu Grunde gelegt werden, zwischen denen die Relationen bestehen:

$$\left. \begin{aligned} \mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma + \mu_\delta &\equiv 0, \\ \nu_\alpha + \nu_\beta + \nu_\gamma + \nu_\delta &\equiv 0, \\ p_\alpha + p_\beta + p_\gamma + p_\delta &\equiv 0, \\ q_\alpha + q_\beta + q_\gamma + q_\delta &\equiv 0, \\ s_\alpha + s_\beta + s_\gamma + s_\delta &\equiv 0. \end{aligned} \right\} \text{mod. } 2$$

$(s_j = \mu_j q_j + \nu_j p_j)$

Es giebt im Ganzen 60 solcher Systeme, welche in zwei Kategorien zerfallen. Die eine enthält Quadrupel aus lauter geraden Thetafunctionen — an Zahl 15 — die andere Quadrupel aus zwei geraden und zwei ungeraden Thetafunctionen — an Zahl 45.

Ist $(\alpha)(\beta)(\gamma)(\delta)$ ein beliebiges System der einen oder der anderen

Art, so können alle Systeme derselben Art geschrieben werden: (a) (b) (c) (d), wenn die Relationen bestehen:

$$\begin{aligned}\mu_i &= a_0 \mu_j + a_1 \nu_j + a_2 p_j + a_3 q_j + a_0 a_3 + a_1 a_2, \\ \nu_i &= b_0 \mu_j + b_1 \nu_j + b_2 p_j + b_3 q_j + b_0 b_3 + b_1 b_2, \\ p_i &= c_0 \mu_j + c_1 \nu_j + c_2 p_j + c_3 q_j + c_0 c_3 + c_1 c_2, \\ q_i &= d_0 \mu_j + d_1 \nu_j + d_2 p_j + d_3 q_j + d_0 d_3 + d_1 d_2.\end{aligned}$$

Dabei ist zu setzen an Stelle von i : a, b, c, d an Stelle von j : $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und es bestehen zwischen den Grössen $a_0 a_1 \dots d_3$ die bekannten Beziehungen.

I. Seien $(\alpha) (\beta) (\gamma) (\delta)$ vier Functionen der definirten Art, (ϵ) eine beliebige andere, so können immer zwei derselben z. B. (α) und (β) derart bestimmt werden, dass $(\alpha) (\beta) (\epsilon)$ und $(\gamma) (\delta) (\epsilon)$ mit einer vierten eindeutig bestimmten Function (ξ) je ein System der vorgelegten Art bildet.

Beispiel.

Wir greifen das System heraus:

$$(2) (34) (01) (5).$$

Dann sind ebenfalls Systeme der definirten Art:

$$\begin{aligned}(2)(34)(4)(23); (2)(34)(24)(3); (2)(01)(0)(12); (2)(01)(1)(02); \\ (2)(5)(03)(14); (2)(5)(13)(04); \\ (01)(5)(4)(23); (01)(5)(24)(3); (34)(5)(0)(12); (34)(5)(1)(02); \\ (34)(01)(03)(14); (34)(01)(13)(04);\end{aligned}$$

II. Sei ein Quadrupel aus lauter geraden Thetafunctionen vorgelegt, $(\alpha) (\beta) (\gamma) (\delta)$, so giebt es 48 von einander verschiedene lineare Transformationen, welche, von achten Einheitswurzeln und der Reihenfolge abgesehen, dieses Quadrupel in sich selbst überführen. Dieselben bringen zweimal alle möglichen Combinationen hervor.

Beispiel.

Die Transformationen:

	a_0	b_0	c_0	d_0	a_1	b_1	c_1	d_1	a_2	b_2	c_2	d_2	a_3	b_3	c_3	d_3
1)	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
2)	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	1
3)	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	-1	1
4)	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1
5)	0	0	-1	0	1	0	0	-1	1	0	0	0	0	1	-1	0

führen das Quadrupel $(2) (34) (01) (5)$ von achten Einheitswurzeln abgesehen der Reihe nach über in:

$$(2) (34) (01) (5); (2) (34) (01) (5); (34) (2) (01) (5); (01) (34) (2) (5); \\ (5) (34) (01) (2).$$

III. Unter den definirten 48 Transformationen giebt es je acht, welche eine beliebige der 12 übrigen Thetafunctionen (ε) in eine beliebige andere derselben Art (gerade oder ungerade) überführen. Sind $(\alpha)(\beta)$ und $(\gamma)(\delta)$ aus dem vorgelegten Quadrupel die beiden Paare, welche mit (ε) und (ξ) ein System der definirten Art bilden, so führen die Transformationen, die (ε) in (ε) überführen, das Quadrupel $(\alpha)(\beta)(\gamma)(\delta)$ über in $(\beta)(\alpha)(\gamma)(\delta)$; $(\alpha)(\beta)(\delta)(\gamma)$; $(\gamma)(\delta)(\alpha)(\beta)$ und den daraus entspringenden Combinationen. Hierbei ist von achten Einheitswurzeln abgesehen.

Beispiel.

Die Transformationen 2, 3, 4, 5 und

	a_0	b_0	c_0	d_0	a_1	b_1	c_1	d_1	a_2	b_2	c_2	d_2	a_3	b_3	c_3	d_3
6)	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1
7)	0	0	1	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	-1	0	0

führen der Reihe nach die Function (0) von achten Einheitswurzeln abgesehen über in: (12) (03) (0) (4) (14) (23).

Die Transformation 4 und die Transformationen:

	a_0	b_0	c_0	d_0	a_1	b_1	c_1	d_1	a_2	b_2	c_2	d_2	a_3	b_3	c_3	d_3
8)	-1	0	1	0	-1	-1	0	1	0	0	-1	0	0	0	1	-1
9)	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	-1	0	1	0	0	1

führen (0) in (0) über und das Quadrupel (2) (34) (01) (5) in:

(01) (34) (2) (5); (2) (5) (01) (34); (34) (2) (5) (01).

IV. Es sei ein Quadrupel von zwei geraden und zwei ungeraden Thetafunctionen $(\alpha)(\beta)(\gamma)(\delta)$ vorgelegt, dann giebt es 16 von einander verschiedene lineare Transformationen, welche, von achten Einheitswurzeln und der Reihenfolge abgesehen, dieses Quadrupel in sich selbst überführen. Es werden unter Rücksichtnahme darauf, dass gerade Thetafunctionen in gerade und ungerade in ungerade übergeführt werden, viermal die möglichen Combinationen hervorgebracht.

Beispiel.

Die Transformationen

	a_0	b_0	c_0	d_0	a_1	b_1	c_1	d_1	a_2	b_2	c_2	d_2	a_3	b_3	c_3	d_3
10)	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
11)	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	-1	1
12)	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	0	0	1
13)	1	0	0	0	1	0	1	0	1	-1	0	0	1	1	1	1
14)	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1
15)	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1

führen das Quadrupel (01) (5) (3) (24) der Reihe nach über in:

$$(01)(5)(3)(24); (01)(5)(3)(24); (01)(5)(3)(24); (01)(5)(3)(24); \\ (01)(5)(24)(3); (5)(01)(3)(24).$$

V. Seien $(\varepsilon)(\xi)$ und $(\varepsilon_1)(\xi_1)$ die beiden Paare, welche mit dem geraden Paare des vorgelegten Quadrupels: $(\alpha)(\beta)$ ausser $(\gamma)(\delta)$ je ein System der definirten Art bilden, dann geht eine jede der vier Functionen $(\varepsilon)(\xi)(\varepsilon_1)(\xi_1)$ durch vier Transformationen unter den definirten 16 in eine beliebige andere über. Dasselbe gilt von den vier übrigen bleibenden geraden Thetafunctionen und von den ungeraden. Hierbei ist wiederum von achten Einheitswurzeln abgesehen.

Ein Beispiel für diesen Fall ist nach dem letzten leicht zu bilden.

In allen diesen Sätzen ist von dem allen Thetafunctionen gemeinsamen Factor, welcher bei der linearen Transformation auftritt, abgesehen.

§ 2.

Seien vier Thetafunctionen der definirten Art vorgelegt, so lassen sich bekanntlich die Quadrate aller Thetafunctionen linear durch die Quadrate derselben ausdrücken. Nehmen wir z. B. das Quadrupel (2) (34) (01) (5), so wird:

$$\begin{aligned} \vartheta_0^2(v_1, v_2)(\vartheta_{23}^4 - \vartheta_4^4) &= \vartheta_{03}^2 \vartheta_2^2 \vartheta_5^2(v_1, v_2) - \vartheta_{03}^2 \vartheta_4^2 \vartheta_{34}^2(v_1, v_2) \\ &\quad - \vartheta_{14}^2 \vartheta_4^2 \vartheta_{01}^2(v_1, v_2) + \vartheta_{14}^2 \vartheta_{23}^2 \vartheta_5^2(v_1, v_2), \\ \vartheta_{03}^2(v_1, v_2)(\vartheta_{23}^4 - \vartheta_4^4) &= -\vartheta_{23}^2 \vartheta_0^2 \vartheta_5^2(v_1, v_2) + \vartheta_4^2 \vartheta_0^2 \vartheta_{34}^2(v_1, v_2) \\ &\quad + \vartheta_{12}^2 \vartheta_{23}^2 \vartheta_{01}^2(v_1, v_2) - \vartheta_{12}^2 \vartheta_4^2 \vartheta_5^2(v_1, v_2), \\ \vartheta_4^2(v_1, v_2)(\vartheta_{23}^4 - \vartheta_4^4) &= -\vartheta_{14}^2 \vartheta_{12}^2 \vartheta_5^2(v_1, v_2) + \vartheta_{03}^2 \vartheta_0^2 \vartheta_{34}^2(v_1, v_2) \\ &\quad + \vartheta_{14}^2 \vartheta_0^2 \vartheta_{01}^2(v_1, v_2) - \vartheta_{03}^2 \vartheta_{12}^2 \vartheta_5^2(v_1, v_2). \end{aligned}$$

Die übrigen Ausdrücke sind aus diesen durch Substitution von halben Perioden abzuleiten.

Ferner folgt aus dem Additionstheorem der Satz, dass das Product

$$\vartheta_2(v_1 + u_1, v_2 + u_2) \vartheta_2(v_1 - u_1, v_2 - u_2)$$

sich als homogene Function zweiter Ordnung der Grössen

$$\vartheta^2(v_1, v_2), \vartheta_{\rho}^2(v_1, v_2), \vartheta_{\gamma}^2(v_1, v_2), \vartheta_{\delta}^2(v_1, v_2); \\ \vartheta_{\alpha}^2(u_1, u_2), \vartheta_{\rho}^2(u_1, u_2), \vartheta_{\gamma}^2(u_1, u_2), \vartheta_{\delta}^2(u_1, u_2)$$

ausdrücken lässt.

Nehmen wir wiederum das Quadrupel (2) (34) (01) (5) und setzen:

$$\begin{aligned} a &= 2\vartheta_{34}^2 \vartheta_{01}^2 \vartheta_5^2 + \vartheta_2^2 [\vartheta_2^4 - \vartheta_{34}^4 - \vartheta_{01}^4 - \vartheta_5^4], \\ b &= 2\vartheta_{01}^2 \vartheta_5^2 \vartheta_2^2 + \vartheta_{34}^2 [\vartheta_{34}^4 - \vartheta_{01}^4 - \vartheta_5^4 - \vartheta_2^4], \end{aligned}$$

$$c = 2 \vartheta_5^2 \vartheta_2^2 \vartheta_{34}^2 + \vartheta_{01}^2 [\vartheta_{01}^4 - \vartheta_5^4 - \vartheta_2^4 - \vartheta_{34}^4],$$

$$d = 2 \vartheta_2^2 \vartheta_{34}^2 \vartheta_{01}^2 + \vartheta_5^2 [\vartheta_5^4 - \vartheta_2^4 - \vartheta_{34}^4 - \vartheta_{01}^4],$$

so wird:

$$\begin{aligned} & \vartheta_2(v_1 + u_1, v_2 + u_2) \vartheta_2(v_1 - u_1, v_2 - u_2) \prod_{\varepsilon \varepsilon_1} (\vartheta_2^2 + \varepsilon \vartheta_{34}^2 + \varepsilon_1 \vartheta_{01}^2 + \varepsilon \varepsilon_1 \vartheta_5^2) \\ &= a [\vartheta_2^2(v_1, v_2) \vartheta_2^2(u_1, u_2) + \vartheta_{34}^2(v_1, v_2) \vartheta_{34}^2(u_1, u_2) + \vartheta_{01}^2(v_1, v_2) \vartheta_{01}^2(u_1, u_2) \\ & \quad + \vartheta_5^2(v_1, v_2) \vartheta_5^2(u_1, u_2)] \\ &+ b [\vartheta_2^2(v_1, v_2) \vartheta_{34}^2(u_1, u_2) + \vartheta_{34}^2(v_1, v_2) \vartheta_2^2(u_1, u_2) + \vartheta_{01}^2(v_1, v_2) \vartheta_5^2(u_1, u_2) \\ & \quad + \vartheta_5^2(v_1, v_2) \vartheta_{01}^2(u_1, u_2)] \\ &+ c [\vartheta_2^2(v_1, v_2) \vartheta_{01}^2(u_1, u_2) + \vartheta_{34}^2(v_1, v_2) \vartheta_5^2(u_1, u_2) + \vartheta_{01}^2(v_1, v_2) \vartheta_2^2(u_1, u_2) \\ & \quad + \vartheta_5^2(v_1, v_2) \vartheta_{34}^2(u_1, u_2)] \\ &+ d [\vartheta_2^2(v_1, v_2) \vartheta_5^2(u_1, u_2) + \vartheta_{34}^2(v_1, v_2) \vartheta_{01}^2(u_1, u_2) + \vartheta_{01}^2(v_1, v_2) \vartheta_{34}^2(u_1, u_2) \\ & \quad + \vartheta_5^2(v_1, v_2) \vartheta_2^2(u_1, u_2)]. \end{aligned}$$

$$\varepsilon, \varepsilon_1: \begin{matrix} \pm 1 \\ \pm 1 \end{matrix}.$$

$$\begin{aligned} & \vartheta_0(v_1 + u_1, v_2 + u_2) \vartheta_0(v_1 - u_1, v_2 - u_2) (\vartheta_0^4 - \vartheta_{12}^4) \\ &= \vartheta_0^2 [-\vartheta_2^2(v_1, v_2) \vartheta_2^2(u_1, u_2) + \vartheta_{34}^2(v_1, v_2) \vartheta_{34}^2(u_1, u_2) - \vartheta_{01}^2(v_1, v_2) \vartheta_{01}^2(u_1, u_2) \\ & \quad + \vartheta_5^2(v_1, v_2) \vartheta_5^2(u_1, u_2)] \\ &+ \vartheta_{12}^2 [-\vartheta_2^2(v_1, v_2) \vartheta_{01}^2(u_1, u_2) - \vartheta_{34}^2(v_1, v_2) \vartheta_5^2(u_1, u_2) + \vartheta_{01}^2(v_1, v_2) \vartheta_2^2(u_1, u_2) \\ & \quad - \vartheta_5^2(v_1, v_2) \vartheta_{34}^2(u_1, u_2)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \vartheta_{03}(v_1 + u_1, v_2 + u_2) \vartheta_{03}(v_1 - u_1, v_2 - u_2) (\vartheta_{03}^4 - \vartheta_{14}^4) \\ &= -\vartheta_{03}^2 [-\vartheta_2^2(v_1, v_2) \vartheta_2^2(u_1, u_2) + \vartheta_{34}^2(v_1, v_2) \vartheta_{34}^2(u_1, u_2) + \vartheta_{01}^2(v_1, v_2) \vartheta_{01}^2(u_1, u_2) \\ & \quad - \vartheta_5^2(v_1, v_2) \vartheta_5^2(u_1, u_2)] \\ &+ \vartheta_{14}^2 [-\vartheta_2^2(v_1, v_2) \vartheta_5^2(u_1, u_2) - \vartheta_{34}^2(v_1, v_2) \vartheta_{01}^2(u_1, u_2) - \vartheta_{01}^2(v_1, v_2) \vartheta_{34}^2(u_1, u_2) \\ & \quad + \vartheta_5^2(v_1, v_2) \vartheta_2^2(u_1, u_2)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \vartheta_{23}(v_1 + u_1, v_2 + u_2) \vartheta_{23}(v_1 - u_1, v_2 - u_2) (\vartheta_{23}^4 - \vartheta_{14}^4) \\ &= \vartheta_{23}^2 [-\vartheta_2^2(v_1, v_2) \vartheta_2^2(u_1, u_2) - \vartheta_{34}^2(v_1, v_2) \vartheta_{34}^2(u_1, u_2) + \vartheta_{01}^2(v_1, v_2) \vartheta_{01}^2(u_1, u_2) \\ & \quad + \vartheta_5^2(v_1, v_2) \vartheta_5^2(u_1, u_2)] \\ &+ \vartheta_{14}^2 [-\vartheta_2^2(v_1, v_2) \vartheta_{34}^2(u_1, u_2) + \vartheta_{34}^2(v_1, v_2) \vartheta_2^2(u_1, u_2) - \vartheta_{01}^2(v_1, v_2) \vartheta_5^2(u_1, u_2) \\ & \quad - \vartheta_5^2(v_1, v_2) \vartheta_{01}^2(u_1, u_2)]. \end{aligned}$$

Aus diesen Formeln sind die übrigen zwölf durch Substitution von halben Perioden abzuleiten.

Zu dem Multiplicationsproblem gelangt man, wenn an Stelle von $^1a, v_2, u_1, u_2$ resp. gesetzt wird: mv_1, mv_2, nv_1, nv_2 .

Wie aus den angestellten Betrachtungen ersichtlich ist, reducirt sich dasselbe wesentlich auf die Betrachtung von

$$\vartheta_{\alpha}(mv_1, mv_2) \vartheta_{\beta}(mv_1, mv_2) \vartheta_{\gamma}(mv_1, mv_2) \vartheta_{\delta}(mv_1, mv_2).$$

Als speciellen Fall wählen wir wiederum das Quadrupel:

$$(2) (34) (01) (5).$$

Für denselben ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \vartheta_2 \vartheta_2(2v_1, 2v_2) \prod_{\substack{\varepsilon \\ \varepsilon_1}} (\vartheta_2^2 + \varepsilon \vartheta_{34}^2 + \varepsilon_1 \vartheta_{01}^2 + \varepsilon \varepsilon_1 \vartheta_5^2) \\ &= a(\vartheta_2^4(v_1, v_2) + \vartheta_{34}^4(v_1, v_2) + \vartheta_{01}^4(v_1, v_2) + \vartheta_5^4(v_1, v_2)) \\ &+ 2b(\vartheta_2^2(v_1, v_2) \vartheta_{34}^2(v_1, v_2) + \vartheta_{01}^2(v_1, v_2) \vartheta_5^2(v_1, v_2)) \\ &+ 2c(\vartheta_2^2(v_1, v_2) \vartheta_{01}^2(v_1, v_2) + \vartheta_5^2(v_1, v_2) \vartheta_{34}^2(v_1, v_2)) \\ &+ 2d(\vartheta_2^2(v_1, v_2) \vartheta_5^2(v_1, v_2) + \vartheta_{34}^2(v_1, v_2) \vartheta_{01}^2(v_1, v_2)). \end{aligned}$$

Eine interessante andere Gestalt nimmt diese Formel unter Berücksichtigung der Göpel'schen biquadratischen Relationen an. (Siehe Crelle 83, pag. 239). Im speciellen Falle lautet dieselbe:

$$\begin{aligned} 0 &= \vartheta_2^4(v_1, v_2) + \vartheta_{34}^4(v_1, v_2) + \vartheta_{01}^4(v_1, v_2) + \vartheta_5^4(v_1, v_2) \\ &+ 2 \vartheta_2 \vartheta_{34} \vartheta_{01} \vartheta_5 \prod_{\substack{\varepsilon \\ \varepsilon_1}} (\vartheta_2^2 + \varepsilon \vartheta_{34}^2 + \varepsilon_1 \vartheta_{01}^2 + \varepsilon \varepsilon_1 \vartheta_5^2) \vartheta_2^2(v_1, v_2) \vartheta_{34}^2(v_1, v_2) \vartheta_{01}^2(v_1, v_2) \vartheta_5^2(v_1, v_2) \\ &+ \frac{(\vartheta_2^2 \vartheta_{34}^2 - \vartheta_{01}^2 \vartheta_5^2)(\vartheta_2^2 \vartheta_{01}^2 - \vartheta_{34}^2 \vartheta_5^2)(\vartheta_2^2 \vartheta_5^2 - \vartheta_{34}^2 \vartheta_{01}^2)}{(\vartheta_2^2 \vartheta_{34}^2 - \vartheta_{01}^2 \vartheta_5^2)(\vartheta_2^2 \vartheta_{01}^2 - \vartheta_{34}^2 \vartheta_5^2)(\vartheta_2^2 \vartheta_5^2 - \vartheta_{34}^2 \vartheta_{01}^2)} \\ &- \frac{\vartheta_2^4 + \vartheta_{34}^4 - \vartheta_{01}^4 - \vartheta_5^4}{\vartheta_2^2 \vartheta_{34}^2 - \vartheta_{01}^2 \vartheta_5^2} (\vartheta_2^2(v_1, v_2) \vartheta_{34}^2(v_1, v_2) + \vartheta_{01}^2(v_1, v_2) \vartheta_5^2(v_1, v_2)) \\ &- \frac{\vartheta_2^4 + \vartheta_{01}^4 - \vartheta_{34}^4 - \vartheta_5^4}{\vartheta_2^2 \vartheta_{01}^2 - \vartheta_{34}^2 \vartheta_5^2} (\vartheta_2^2(v_1, v_2) \vartheta_{01}^2(v_1, v_2) + \vartheta_5^2(v_1, v_2) \vartheta_{34}^2(v_1, v_2)) \\ &- \frac{\vartheta_2^4 + \vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4 - \vartheta_{01}^4}{\vartheta_2^2 \vartheta_5^2 - \vartheta_{34}^2 \vartheta_{01}^2} (\vartheta_2^2(v_1, v_2) \vartheta_5^2(v_1, v_2) + \vartheta_{34}^2(v_1, v_2) \vartheta_{01}^2(v_1, v_2)). \end{aligned}$$

Mit ihrer Hülfe wird:

$$\begin{aligned} \vartheta_2(2v_1, 2v_2) &= \vartheta_2 \left[\frac{\vartheta_2^2(v_1, v_2) \vartheta_{34}^2(v_1, v_2) + \vartheta_{01}^2(v_1, v_2) \vartheta_5^2(v_1, v_2)}{\vartheta_2^2 \vartheta_{34}^2 - \vartheta_{01}^2 \vartheta_5^2} \right. \\ &+ \frac{\vartheta_2^2(v_1, v_2) \vartheta_{01}^2(v_1, v_2) + \vartheta_5^2(v_1, v_2) \vartheta_{34}^2(v_1, v_2)}{\vartheta_2^2 \vartheta_{01}^2 - \vartheta_5^2 \vartheta_{34}^2} \\ &+ \left. \frac{\vartheta_2^2(v_1, v_2) \vartheta_{01}^2(v_1, v_2) + \vartheta_{34}^2(v_1, v_2) \vartheta_{01}^2(v_1, v_2)}{\vartheta_2^2 \vartheta_5^2 - \vartheta_{34}^2 \vartheta_{01}^2} \right] \\ &+ \frac{-2\alpha \vartheta_{34} \vartheta_5 \vartheta_{01} \vartheta_2(v_1, v_2) \vartheta_{34}(v_1, v_2) \vartheta_{01}(v_1, v_2) \vartheta_5(v_1, v_2)}{(\vartheta_2^2 \vartheta_{34}^2 - \vartheta_{01}^2 \vartheta_5^2)(\vartheta_2^2 \vartheta_{01}^2 - \vartheta_5^2 \vartheta_{34}^2)(\vartheta_2^2 \vartheta_5^2 - \vartheta_{34}^2 \vartheta_{01}^2)}. \end{aligned}$$

Die Formeln für $\vartheta_{34}(2v_1, 2v_2)$ $\vartheta_{01}(2v_1, 2v_2)$ $\vartheta_5(2v_1, 2v_2)$ sind hieraus durch lineare Transformation abzuleiten.

Die Formeln für die Multiplication mit 3 gestalten sich complicirter. Eine der einfachsten Formen ist folgende.

Wir setzen:

$$\begin{aligned}
\vartheta_2^2(v_1, v_2) \vartheta_{34}^2(v_1, v_2) - \vartheta_{01}^2(v_1, v_2) \vartheta_5^2(v_1, v_2) &= B; \\
\vartheta_2^4(v_1, v_2) + \vartheta_{34}^4(v_1, v_2) - \vartheta_{01}^4(v_1, v_2) - \vartheta_5^4(v_1, v_2) &= B'; \\
\vartheta_2^2(v_1, v_2) \vartheta_{01}^2(v_1, v_2) - \vartheta_5^2(v_1, v_2) \vartheta_{34}^2(v_1, v_2) &= C; \\
\vartheta_2^4(v_1, v_2) + \vartheta_{01}^4(v_1, v_2) - \vartheta_5^4(v_1, v_2) - \vartheta_{34}^4(v_1, v_2) &= C'; \\
\vartheta_2^2(v_1, v_2) \vartheta_5^2(v_1, v_2) - \vartheta_{34}^2(v_1, v_2) \vartheta_{01}^2(v_1, v_2) &= D; \\
\vartheta_2^4(v_1, v_2) + \vartheta_5^4(v_1, v_2) - \vartheta_{34}^4(v_1, v_2) - \vartheta_{01}^4(v_1, v_2) &= D'.
\end{aligned}$$

Für die Nullwerthe der Argumente mag an Stelle von B, C, D, B', C', D' gesetzt werden. $B_0, C_0, D_0, B'_0, C'_0, D'_0$. Dann wird:

$$\begin{aligned}
&\vartheta_2(3v_1, 3v_2) \vartheta_2(v_1, v_2) \prod_{\varepsilon \varepsilon_1} (\vartheta_2^2 + \varepsilon \vartheta_{34}^2 + \varepsilon_1 \vartheta_{01}^2 + \varepsilon \varepsilon_1 \vartheta_5^2) \\
&= \vartheta_2^2(v_1, v_2) \left[\prod_{\varepsilon \varepsilon_1} (\vartheta_2^2(v_1, v_2) + \varepsilon \vartheta_{34}^2(v_1, v_2) + \varepsilon_1 \vartheta_{01}^2(v_1, v_2) + \varepsilon \varepsilon_1 \vartheta_5^2(v_1, v_2)) \right. \\
&\quad \left. - 4(\vartheta_{34}^4(v_1, v_2) B' + \vartheta_{01}^4(v_1, v_2) C' + \vartheta_5^4(v_1, v_2) D') \right. \\
&\quad \left. + 16 \vartheta_2^2(v_1, v_2) \vartheta_{34}^2(v_1, v_2) \vartheta_{01}^2(v_1, v_2) \vartheta_5^2(v_1, v_2) \right] \\
&+ 4 \left[\frac{\vartheta_{34}^2(v_1, v_2) B^2 B'_0}{B_0} + \frac{\vartheta_{01}^2(v_1, v_2) C^2 C'_0}{C_0} + \frac{\vartheta_5^2(v_1, v_2) D^2 D'_0}{D_0} \right] \\
&- 4 \vartheta_{34}^2(v_1, v_2) \vartheta_{01}^2(v_1, v_2) \vartheta_5^2(v_1, v_2) [\vartheta_2^4(v_1, v_2) + \vartheta_{34}^4(v_1, v_2) + \vartheta_{01}^4(v_1, v_2) \\
&\quad + \vartheta_5^4(v_1, v_2)].
\end{aligned}$$

Unter Zuhilfenahme der vorhin gebrauchten Göpel'schen Relation zeigt sich das Resultat, dass auch die rechte Seite den Factor $\vartheta_2(v_1, v_2)$ besitzt, so dass $\vartheta_2(3v_1, 3v_2)$ eine ganze homogene Function 9ter Ordnung der Grössen $\vartheta_2(v_1, v_2) \vartheta_{34}(v_1, v_2) \vartheta_{01}(v_1, v_2) \vartheta_5(v_1, v_2)$ ist.

Durch Substitution von halben Perioden oder durch lineare Transformation können hieraus die Formeln für $\vartheta_{34}(3v_1, 3v_2)$, $\vartheta_{01}(3v_1, 3v_2)$, $\vartheta_5(3v_1, 3v_2)$ entwickelt werden.

Hieraus folgt mit Hülfe weniger Schlüsse ganz allgemein der Lehrsatz:

Bilden die geraden Thetafunctionen $(\alpha), (\beta), (\gamma), (\delta)$ ein Quadrupel der ursprünglich vorgelegten Art, so sind die Functionen $\vartheta_\alpha(mv_1, mv_2)$, $\vartheta_\beta(mv_1, mv_2)$, $\vartheta_\gamma(mv_1, mv_2)$, $\vartheta_\delta(mv_1, mv_2)$ ganze homogene Functionen m^{2ter} Ordnung der Grössen $\vartheta_\alpha(v_1, v_2)$, $\vartheta_\beta(v_1, v_2)$, $\vartheta_\gamma(v_1, v_2)$, $\vartheta_\delta(v_1, v_2)$, deren Coefficienten rationale Functionen der Functionen $\vartheta_\alpha, \vartheta_\beta, \vartheta_\gamma, \vartheta_\delta$ sind.

Bilden die beiden geraden Functionen $(\alpha), (\beta)$ mit den ungeraden Functionen $(\gamma), (\delta)$ ein Quadrupel der vorgelegten Art und sind $(\varepsilon), (\xi), (\eta), (\kappa)$ die vier geraden Thetafunctionen, welche aus ihnen durch Substitution von halben Perioden hervorgehen, so sind die Functionen $\vartheta_\alpha(mv_1, mv_2)$, $\vartheta_\beta(mv_1, mv_2)$, $\vartheta_\gamma(mv_1, mv_2)$, $\vartheta_\delta(mv_1, mv_2)$ homogene ganze Functionen m^{2ter} Ordnung der Grössen $\vartheta_\alpha(v_1, v_2)$, $\vartheta_\beta(v_1, v_2)$, $\vartheta_\gamma(v_1, v_2)$, $\vartheta_\delta(v_1, v_2)$, deren Coefficienten rationale Functionen von $\vartheta_\varepsilon, \vartheta_\xi, \vartheta_\eta, \vartheta_\kappa$ sind.

Hieraus wiederum folgt der Lehrsatz:

Ist $(\alpha), (\beta), (\gamma), (\delta)$ ein beliebiges Quadrupel der vorgelegten Art, (ε) eine beliebige Thetafunction, so ist das Product

$\vartheta_\varepsilon((m+n)v_1, (m+n)v_2), \vartheta_\varepsilon((m-n)v_1, (m-n)v_2)$
eine ganze homogene Function $2(m^2+n^2)^{\text{te}}$ Ordnung der Grössen $\vartheta_\alpha(v_1, v_2), \vartheta_\beta(v_1, v_2), \vartheta_\gamma(v_1, v_2), \vartheta_\delta(v_1, v_2)$.

Auch in diesem Falle lassen sich für die Coefficienten specielle Sätze angeben, indessen sehen wir von ihrer Aufstellung ab.

§ 3.

Aus den Sätzen des ersten Paragraphen und durch Substitution von halben Perioden kann eine grosse Reihe von Coefficientenbeziehungen unmittelbar hergestellt werden. In jedem speciellen Falle sind dieselben mit Hülfe der in der citirten Arbeit angegebenen Tabelle mit leichter Mühe zu verificiren. Es sollen diese Beziehungen nicht ausführlich aufgestellt werden. Wir beschränken uns darauf, die Interpretation der angeführten Sätze an einem Beispiele klar zu machen.

Mögen die vier geraden Functionen $(\alpha), (\beta), (\gamma), (\delta)$ ein Quadrupel der definirten Art bilden, so können wir setzen:

$$= \sum f(\sqrt[4]{\vartheta_\alpha^s}, \sqrt[4]{\vartheta_\beta^s}, \sqrt[4]{\vartheta_\gamma^s}, \sqrt[4]{\vartheta_\delta^s})_{abcd} \vartheta_\alpha^a(v_1, v_2) \vartheta_\beta^b(v_1, v_2) \vartheta_\gamma^c(v_1, v_2) \vartheta_\delta^d(v_1, v_2).$$

Die achten Wurzeln sind in jedem speciellen Falle eindeutig bestimmt, sollen aber aus Gründen, die aus dem Früheren hervorgehen, unbestimmt gelassen werden.

Sind dann m und n einander congruent nach dem Modul 2, so ist:

$$\begin{aligned} f(\sqrt[4]{\vartheta_\alpha^s}, \sqrt[4]{\vartheta_\beta^s}, \sqrt[4]{\vartheta_\gamma^s}, \sqrt[4]{\vartheta_\delta^s})_{abcd} &= j_1 f(\sqrt[4]{\vartheta_\alpha^s}, \sqrt[4]{\vartheta_\beta^s}, \sqrt[4]{\vartheta_\gamma^s}, \sqrt[4]{\vartheta_\delta^s})_{acbd} \\ f(\sqrt[4]{\vartheta_\alpha^s}, \sqrt[4]{\vartheta_\beta^s}, \sqrt[4]{\vartheta_\gamma^s}, \sqrt[4]{\vartheta_\delta^s})_{abcd} &= j_2 f(\sqrt[4]{\vartheta_\alpha^s}, \sqrt[4]{\vartheta_\beta^s}, \sqrt[4]{\vartheta_\gamma^s}, \sqrt[4]{\vartheta_\delta^s})_{adcb} \\ f(\sqrt[4]{\vartheta_\alpha^s}, \sqrt[4]{\vartheta_\beta^s}, \sqrt[4]{\vartheta_\gamma^s}, \sqrt[4]{\vartheta_\delta^s})_{abcd} &= j_3 f(\sqrt[4]{\vartheta_\alpha^s}, \sqrt[4]{\vartheta_\beta^s}, \sqrt[4]{\vartheta_\gamma^s}, \sqrt[4]{\vartheta_\delta^s})_{badc} \\ f(\sqrt[4]{\vartheta_\alpha^s}, \sqrt[4]{\vartheta_\beta^s}, \sqrt[4]{\vartheta_\gamma^s}, \sqrt[4]{\vartheta_\delta^s})_{abcd} &= j_4 f(\sqrt[4]{\vartheta_\alpha^s}, \sqrt[4]{\vartheta_\beta^s}, \sqrt[4]{\vartheta_\gamma^s}, \sqrt[4]{\vartheta_\delta^s})_{cdab} \end{aligned}$$

Sind dagegen m und n einander nicht congruent nach dem Modul 2, so folgen die Beziehungen:

$$\begin{aligned} f(\sqrt[4]{\vartheta_\alpha^s}, \sqrt[4]{\vartheta_\beta^s}, \sqrt[4]{\vartheta_\gamma^s}, \sqrt[4]{\vartheta_\delta^s})_{abcd} &= j_1' f(\sqrt[4]{\vartheta_\alpha^s}, \sqrt[4]{\vartheta_\beta^s}, \sqrt[4]{\vartheta_\gamma^s}, \sqrt[4]{\vartheta_\delta^s})_{acbd} \\ f(\sqrt[4]{\vartheta_\alpha^s}, \sqrt[4]{\vartheta_\beta^s}, \sqrt[4]{\vartheta_\gamma^s}, \sqrt[4]{\vartheta_\delta^s})_{abcd} &= j_2' f(\sqrt[4]{\vartheta_\alpha^s}, \sqrt[4]{\vartheta_\beta^s}, \sqrt[4]{\vartheta_\gamma^s}, \sqrt[4]{\vartheta_\delta^s})_{adcb} \\ f(\sqrt[4]{\vartheta_\alpha^s}, \sqrt[4]{\vartheta_\beta^s}, \sqrt[4]{\vartheta_\gamma^s}, \sqrt[4]{\vartheta_\delta^s})_{abcd} &= j_3' f(\sqrt[4]{\vartheta_\alpha^s}, \sqrt[4]{\vartheta_\beta^s}, \sqrt[4]{\vartheta_\gamma^s}, \sqrt[4]{\vartheta_\delta^s})_{badc} \\ f(\sqrt[4]{\vartheta_\alpha^s}, \sqrt[4]{\vartheta_\beta^s}, \sqrt[4]{\vartheta_\gamma^s}, \sqrt[4]{\vartheta_\delta^s})_{abcd} &= j_4' f(\sqrt[4]{\vartheta_\alpha^s}, \sqrt[4]{\vartheta_\beta^s}, \sqrt[4]{\vartheta_\gamma^s}, \sqrt[4]{\vartheta_\delta^s})_{cdab} \end{aligned}$$

Die Grössen j sind achte Einheitswurzeln. Die achten Wurzeln links und rechts können von einander verschieden sein.

Rostock im October 1880.