Sur les transcendentes élémentaires et les nombres de Bernoulli et d'Euler.

(Par NIELS NIELSEN, à Copenhague.)

PREMIÈRE PARTIE.

Applications des fonctions trigonométriques

I. SUR UNE CLASSE DE SÉRIES DE PUISSANCES.

M. WORPITZKY (*) a donné, à l'aide de deux développements des fonctions de BERNOULLI, une suite de représentations indépendantes des nombres de BERNOULLI et d'EULER.

Or, comme je le démontrerais dans une autre occasion (**), les deux formules fondamentales susdites de M. WORPITZKY ne sont que des représentants isolés d'une infinité de formules contenant un paramètre quelconque et donnant, pour une valeur spéciale de ce paramètre, les formules en question.

Du reste, la méthode de M. WORPITZKY est assez partielle; car les polynomes entiers de x , définis comme coefficients des séries de puissances de x , obtenues pour les fonctions

$$(\cos x)^{-x}, \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{-x}, \left(\frac{1+e^{-x}}{2}\right)^{-x}, \left(\frac{1-e^{-x}}{x}\right)^{-x} \quad (1)$$

(*) *Journal de Crelle*, t. 94, p. 203-232; 1883.

(**) Dans un Mémoire qui paraîtra dans les *Annales de l'École Normale*.

nous donnent aussi, pour des valeurs spéciales de x , les nombres de BERNOULLI et d'EULER.

Dans nos recherches suivantes nous avons à donner un nombre de représentations indépendantes des polynômes susdites et par conséquent des nombres de BERNOULLI et d'EULER.

Quant aux séries de puissances obtenues pour les fonctions (1), soit $\varphi(x)$ une fonction analytique, régulière aux environs du point $x=0$, et telle que $\varphi(0)=1$, il existe un nombre positif ρ , de sorte que $\varphi(x)$ est, pour $|x| < \rho$, régulière et différente de zéro.

Soit ensuite x un nombre complexe quelconque, la série de puissances

$$(\varphi(x))^{-x} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{f_n(x) x^n}{n!} \quad (2)$$

a son rayon de convergence plus grand que zéro; de plus, il existe un nombre positif r , de sorte que la série (2) est uniformément convergente et par rapport à x et par rapport à α , pourvu que $|\alpha| \leq r$ et $|x| \leq K < \infty$.

En se rappelant les identités

$$f_0(x) = 1, \quad f_n(x) = D_x^n \left[(\varphi(x))^{-x} \right]_{x=0},$$

on conclut que $f_n(x)$ est un polynôme entier de x , dont le degré ne peut jamais être plus grand que n .

Posons maintenant, dans (2), y au lieu de x , puis multiplions d'après la règle de CAUCHY les deux séries de puissances ainsi obtenues, nous aurons, pour les polynômes $f_n(x)$, la formule d'addition suivante

$$f_n(x+y) = \sum_{s=0}^{s=n} \binom{n}{s} f_{n-s}(x) f_s(y). \quad (3)$$

Quant aux coefficients des polynômes $f_n(x)$, différencions p fois par rapport à x la formule (2), puis posons $x=0$, nous aurons

$$(-1)^p (\log \varphi(x))^p = \sum_{n=p}^{n=\infty} \frac{f_n^{(p)}(0)}{n!} x^n, \quad (4)$$

formule qui montrera clairement que les polynômes $f_n(x)$ sont généralement d'une nature très compliquée.

Posons dans (4) $p=1$, puis différencions par rapport à α , il résulte

$$-\frac{\varphi'(\alpha)}{\varphi(\alpha)} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{f_n'(0)}{(n-1)!} \alpha^{n-1}; \quad (5)$$

différentions ensuite par rapport à x la formule (2), ce qui donnera

$$-x \left(\varphi(x) \right)^{-x} \cdot \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{f_n(x)}{(n-1)!} x^{n-1},$$

puis multiplions, d'après la règle de CAUCHY, les deux séries de puissances (2) et (5), nous aurons pour les polynômes $f_n(x)$ les formules récursives

$$f_n(x) = x \cdot \sum_{s=0}^{s=n-1} \binom{n-1}{s} f'_{n-s}(0) f_s(x). \quad (6)$$

Prenons maintenant pour point de départ l'identité évidente

$$\varphi(x) = 1 - \left(1 - \varphi(x) \right),$$

puis remarquons qu'il existe un nombre positif σ , de sorte que nous aurons, pour $|x| < \sigma$, constamment $|1 - \varphi(x)| < 1$, la formule binomiale donnera

$$\left(\varphi(x) \right)^{-x} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \binom{x+n-1}{n} \left(1 - \varphi(x) \right)^n, \quad (7)$$

où la série qui figure au second membre est uniformément convergente et par rapport à x et par rapport à α , pourvu que nous ayons à la fois $|x| \leq K < \infty$, $|\alpha| \leq \sigma - \delta$, où δ désigne une quantité positive arbitrairement petite.

Cela posé, nous aurons, pour les polynômes $f_n(x)$, les représentations indépendantes

$$f_n(x) = \sum_{p=1}^{p=n} \binom{x+p-1}{p} D_x^n \left((1 - \varphi(x))^p \right)_{x=0}. \quad (8)$$

Or, il faut bien remarquer que des représentations indépendantes de la forme (8) ne sont pas particulières pour les polynômes définis à l'aide d'une série de puissances de la forme (2).

En effet, soit n un positif entier et p un nombre entier, tel que $0 \leq p \leq n$, nous aurons par décomposition (en posant $s^0 = 1$, pour $s = 0$):

$$\frac{n! x^n}{x(x+1) \dots (x+n)} = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^s (-s)^p}{x+s} \binom{n}{s}; \quad (9)$$

soit ensuite

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

un polynome entier quelconque du degré n par rapport à x , puis multiplions par α_{n-p} les deux membres de (9), nous aurons

$$f(x) = x \binom{x+n}{n} \cdot \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^s f(-s)}{x+s} \binom{n}{s}, \quad (10)$$

ou, ce qui est la même chose,

$$f(x) = \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \binom{x+s-1}{s} \binom{x+n}{n-s} f(-s). \quad (11)$$

Désignons maintenant par α , β et x trois nombres complexes quelconques, par $F(x)$ un polynome entier de x du degré n au plus, nous aurons immédiatement, en vertu de (11), cette autre formule plus générale

$$F(\alpha x + \beta) = \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \binom{x+s-1}{s} \binom{x+n}{n-s} F(\beta - s\alpha). \quad (12)$$

Nous ne nous arrêtons pas par la généralisation, à l'aide de (12), de la formule (8), ce qui ne joue aucun rôle pour nos recherches suivantes.

II. DÉRIVÉES SUPÉRIEURES DE LA FONCTION $(\cos \varphi)^{-\alpha}$.

Pour étudier la première des fonctions (1) du paragraphe I, nous aurons par la conclusion ordinaire de n à $n+1$ une expression de la forme

$$D_{\varphi}^n (\cos \varphi)^{-\alpha} = (\cos \varphi)^{-\alpha} \Phi^{\alpha, n}(\operatorname{tg} \varphi), \quad (1)$$

où $\Phi^{\alpha, n}(x)$ est, pour tous les n , un polynome entier précisément du degré n et par rapport à x et par rapport à α .

Supposons ensuite que φ ne soit pas de la forme $\left(q + \frac{1}{2}\right)\pi$, où q est un nombre entier, la série de puissances

$$\left(\frac{\cos(y+\varphi)}{\cos \varphi}\right)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\Phi^{\alpha, n}(\operatorname{tg} \varphi)}{n!} y^n \quad (2)$$

a son rayon de convergence égal au plus petit des nombres

$$\left| -\varphi + \left(p + \frac{1}{2} \right) \pi \right|,$$

où p désigne un entier quelconque.

Posons $\operatorname{tg} \varphi = x$, nous aurons en vertu de (2)

$$(\cos y - x \sin y)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\Phi^{\alpha,n}(x)}{n!} y^n. \quad (3)$$

Quant aux polynômes $\Phi^{\alpha,n}(x)$, nous aurons sans peine, en vertu de (2) et (3), ces deux équations fonctionnelles

$$\Phi^{\alpha,n+1}(x) = (1+x^2) D_x \Phi^{\alpha,n}(x) + \alpha x \Phi^{\alpha,n}(x) \quad (4)$$

$$\Phi^{\alpha,n+2}(x) = x(\alpha+1)(1+x^2) \Phi^{\alpha+2,n}(x) - x^2 \Phi^{\alpha,n}(x), \quad (5)$$

d'où, en posant $x=0$,

$$\Phi^{\alpha,n}(0) = \left(D_x \Phi^{\alpha,n-1}(x) \right)_{x=0} \quad (6)$$

Posons pour abréger

$$\omega_n(\alpha) = \alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1), \quad n \geq 1,$$

nous aurons pour les six premiers des polynômes en question les expressions suivantes

$$\Phi^{\alpha,0}(x) = 1$$

$$\Phi^{\alpha,1}(x) = \alpha x$$

$$\Phi^{\alpha,2}(x) = \omega_2(\alpha) x^2 + \alpha$$

$$\Phi^{\alpha,3}(x) = \omega_3(\alpha) x^3 + (3\alpha^2 + 2\alpha) x$$

$$\Phi^{\alpha,4}(x) = \omega_4(\alpha) x^4 + 2\omega_2(\alpha)(3\alpha+4)x^2 + (3\alpha^2+2\alpha)$$

$$\Phi^{\alpha,5}(x) = \omega_5(\alpha) x^5 + 10\omega_3(\alpha)(\alpha+2)x^3 + (15\alpha^3+30\alpha^2+16\alpha)x.$$

Remarquons que la formule (3) donnera pour $\alpha = -1$

$$\Phi(x) = (-1)^n, \quad \Phi(x) = (-1)^{n-1} x, \quad (7)$$

nous aurons, en vertu de la formule d'addition (3) du paragraphe I, cette équation aux différences finies par rapport à α

$$\Phi(x) - \Phi(x) = x \cdot \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \binom{n}{2s+1} \Phi(x)^{\alpha, n-2s-1} + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} \binom{n}{2s} \Phi(x)^{\alpha, n-2s} \quad (8)$$

On voit que la formule générale (12) du paragraphe I ne donne aucun résultat simple pour notre fonction Φ . Or, il est très facile de donner d'autres représentations indépendantes qui sont plus simples.

A cet effet, appliquons l'identité évidente

$$\frac{\cos(y + \varphi)}{\cos \varphi} = \frac{e^{iy+2\varphi i} + e^{-iy}}{e^{2\varphi i} + 1} = e^{iy} \left(1 + \frac{e^{-2yi} - 1}{e^{2\varphi i} + 1} \right),$$

nous aurons

$$\left(\frac{\cos(\varphi + y)}{\cos \varphi} \right)^{-\alpha} = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \binom{\alpha + p - 1}{p} \left(\frac{e^{-2yi} - 1}{e^{2\varphi i} + 1} \right)^p e^{-\alpha yi}, \quad (9)$$

où la série ainsi obtenue est du même caractère que celle qui figure dans la formule (7) du paragraphe I.

Posons pour abréger

$$L_p^*(\alpha) = \sum_{s=0}^{s=p} (-1)^s \binom{p}{s} (\alpha + 2p - 2s)^n, \quad L_0^*(\alpha) = \alpha^n, \quad (10)$$

nous aurons en vertu de (2) et en cherchant, dans la série qui figure au second membre de (9), le coefficient de la puissance y^n

$$\Phi(\operatorname{tg} \varphi)^{\alpha, n} = (-1)^n \sum_{p=0}^{p=n} (-1)^p \binom{\alpha + p - 1}{p} L_p^*(\alpha) \cdot \frac{e^{-ip\varphi}}{(2 \cos \varphi)^p}, \quad (11)$$

représentation indépendante qui est très curieuse.

En effet, remarquons que le premier membre de (11) est toujours réel pour des valeurs réelles de α et φ , nous aurons, outre les représentations indépendantes cherchées, savoir

$$\Phi(\operatorname{tg} \varphi)^{\alpha, 2n} = \sum_{p=0}^{p=2n} (-1)^{n+p} \binom{\alpha + p - 1}{p} L_p^*(\alpha) \frac{\cos p \varphi}{(2 \cos \varphi)^p} \quad (12)$$

$$\Phi(\operatorname{tg} \varphi)^{\alpha, 2n+1} = \sum_{p=1}^{p=2n+1} (-1)^{n+p+1} \binom{\alpha + p - 1}{p} L_p^*(\alpha) \frac{\sin p \varphi}{(2 \cos \varphi)^p}, \quad (13)$$

ces deux identités

$$\sum_{p=0}^{p=2n+1} (-1)^p \binom{\alpha+p-1}{p} L_p(\alpha) \frac{\cos p \varphi}{(2 \cos \varphi)^p} = 0 \quad (14)$$

$$\sum_{p=1}^{p=2n} (-1)^p \binom{\alpha+p-1}{p} L_p(\alpha) \frac{\sin p \varphi}{(2 \cos \varphi)^p} = 0. \quad (15)$$

Cela posé, les formules de MOIVRE

$$\frac{\cos p \varphi}{(\cos \varphi)^p} = \sum_{s=0}^{\leq \frac{p}{2}} (-1)^s \binom{p}{2s} (\operatorname{tg} \varphi)^{2s}$$

$$\frac{\sin p \varphi}{(\cos \varphi)^p} = \sum_{s=0}^{\leq \frac{p-1}{2}} (-1)^s \binom{p}{2s+1} (\operatorname{tg} \varphi)^{2s+1}$$

donnent finalement, pour le polynome $\Phi^{a,n}(x)$, les représentations indépendantes

$$\Phi^{a,2n}(x) = \sum_{p=0}^{p=2n} (-1)^{n+p} \binom{\alpha+p-1}{p} L_p(\alpha) \frac{(1+ix)^p + (1-ix)^p}{2^{p+1}} \quad (16)$$

$$\Phi^{a,2n+1}(x) = i \cdot \sum_{p=1}^{p=2n+1} (-1)^{n+p} \binom{\alpha+p-1}{p} L_p(\alpha) \frac{(1+ix)^p - (1-ix)^p}{2^{p+1}}. \quad (17)$$

Remarquons que la formule (1) donnera pour $\alpha = 1$, $\alpha = 2$ respectivement

$$D_{\varphi}^n \left(\frac{1}{\cos \varphi} \right) = \frac{1}{\cos \varphi} \Phi^{1,n}(\operatorname{tg} \varphi) \quad (18)$$

$$D_{\varphi}^{n+1} \operatorname{tg} \varphi = (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) \Phi^{2,n}(\operatorname{tg} \varphi), \quad (19)$$

nous venons de donner des représentations indépendantes de ces deux dérivées d'ordre supérieur.

M. JENSEN a trouvé, il y a trente ans à peu près, de telles représentations indépendantes, et un grand nombre d'autres formules, à l'aide du calcul symbolique; mais malheureusement il n'a pas publié les très beaux et très importants résultats qu'il a trouvés par ce procédé (*).

(*) Dans une conférence, faite à la Société Mathématique de Copenhague dans la séance du 25 janvier 1912, M. JENSEN a développé les plus importants de ses résultats susdits.

III. ÉTUDE DES FONCTIONS PARTICULIÈRES.

Posons dans la formule (3) du paragraphe II $x=0$, $\alpha=x$, nous avons à étudier les polynomes

$$a_n(x) = \Phi^{x, 2n}(0) = \left(D_\alpha \Phi^{\alpha, 2n-1}(\alpha) \right)_{\alpha=0}, \quad n \geq 1, \quad (1)$$

ce qui nous conduira à la série de puissances

$$(\cos z)^{-x} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{a_n(x)}{(2n)!} \alpha^{2n}, \quad |\alpha| < \frac{\pi}{2}. \quad (2)$$

L'équation fonctionnelle (5) du paragraphe II donnera dans ce cas

$$a_{n+1}(x) = x(x+1)a_n(x+2) - x^2 a_n(x), \quad (3)$$

d'où particulièrement

$$a'_{n+1}(0) = a_n(2), \quad a_n(-1) = (-1)^n, \quad (4)$$

de sorte que les séries de puissances

$$\frac{1}{\cos \alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{E_n \alpha^{2n}}{(2n)!}, \quad |\alpha| < \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{T_{n+1} \alpha^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad |\alpha| < \frac{\pi}{2},$$

où les E_n sont les nombres d'EULER, les T_n les coefficients des tangentes, donnent ces valeurs spéciales

$$a'_n(0) = T_n, \quad a_n(1) = E_n, \quad a_n(2) = T_{n+1}. \quad (5)$$

Appliquons ensuite les formules (3) et (6) du paragraphe I, nous aurons ici

$$a_n(x+y) = \sum_{s=0}^{s=n} \binom{2n}{2s} a_{n-s}(x) a_s(y) \quad (6)$$

$$a_{n+1}(x) = x \cdot \sum_{s=1}^{s=n+1} \binom{2n+1}{2s-1} T_s a_{n-s+1}(x), \quad (7)$$

ce qui donnera pour les six premiers des polynomes $a_n(x)$ les expressions

suivantes

$$\begin{aligned}\alpha_0(x) &= 1 \\ \alpha_1(x) &= x \\ \alpha_2(x) &= 3x^2 + 2x \\ \alpha_3(x) &= 15x^3 + 30x^2 + 16x \\ \alpha_4(x) &= 105x^4 + 420x^3 + 588x^2 + 272x \\ \alpha_5(x) &= 945x^5 + 6300x^4 + 16380x^3 + 18960x^2 + 7936x.\end{aligned}$$

Nous avons encore à déterminer le nombre entier $\alpha_n(-p)$, où $p > 1$ est un entier.

A cet effet, nous appliquons la formule élémentaire

$$(\cos \alpha)^p = \frac{1}{2^p} \cdot \sum_{s=0}^{\frac{p-1}{2}} \binom{p}{s} \varepsilon_{p-2s} \cos(p-2s)\alpha,$$

où il faut admettre $\varepsilon_0 = 1$, mais $\varepsilon_m = 2$ pour $m \geq 1$. Posons pour abrégé

$$\mathfrak{A}_p^n = \sum_{s=0}^{\frac{p-1}{2}} \binom{p}{s} (p-2s)^n, \quad (8)$$

nous aurons

$$D_a^{2n}(\cos^p \alpha)_{\alpha=0} = \frac{(-1)^n}{2^{p-1}} \mathfrak{A}_p^{2n},$$

d'où la valeur cherchée

$$\alpha_n(-p) = \frac{(-1)^n}{2^{p-1}} \mathfrak{A}_p^{2n}, \quad n \geq 1. \quad (9)$$

Cela posé appliquons, pour $\beta = 0$, $\alpha = q$, où q désigne un positif entier, la formule générale (12) du paragraphe I, nous aurons pour $\alpha_n(x)$ la représentation indépendante

$$\alpha_n(x) = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{(-1)^{n+p}}{2^{q p-1}} \binom{\frac{x}{q} + p - 1}{p} \binom{\frac{x}{q} + n}{n-p} \mathfrak{A}_{pq}^{2n}, \quad (10)$$

d'où particulièrement pour $q = 1$

$$\alpha_n(x) = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{(-1)^{n+p}}{2^{p-1}} \binom{x+p-1}{p} \binom{x+n}{n-p} \mathfrak{A}_p^{2n}. \quad (11)$$

Combinons maintenant les formules (1) et (12), (13) du paragraphe II,

nous aurons, pour $a_n(x)$, ces deux autres représentations indépendantes

$$a_n(x) = \sum_{p=0}^{p=2n} \frac{(-1)^{n+p}}{2^p} \binom{x+p-1}{p} L_p^{2n}(x) \quad (12)$$

$$a_n(x) = \sum_{p=1}^{p=2n-1} \frac{(-1)^{n+p}}{2^p} p \binom{x+p-1}{p} L_p^{2n-1}(x). \quad (13)$$

D'autres représentations indépendantes peuvent être déduites à l'aide des identités

$$\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = (1 - \sin^2 \alpha)^{\frac{1}{2}},$$

ce qui donnera

$$(\cos \alpha)^{-x} = \sum_{p=0}^{p=\infty} \binom{x+p-1}{p} \left(2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)^p = \sum_{p=0}^{p=\infty} \binom{\frac{x}{2}+p-1}{p} (\sin \alpha)^{2p}, \quad (14)$$

de sorte que nous avons à calculer les dérivées

$$D_{\alpha}^n \left((\sin \alpha)^p \right)_{\alpha=0},$$

où n et p sont des positifs entiers.

A cet effet, appliquons les formules élémentaires

$$\begin{aligned} (\sin \alpha)^{2p} &= \frac{(-1)^p}{2^{2p}} \sum_{s=0}^{s=p} (-1)^s \binom{2p}{s} \epsilon_{2p-2s} \cos (2p-2s) \alpha \\ (\sin \alpha)^{2p+1} &= \frac{(-1)^p}{2^{2p}} \sum_{s=0}^{s=p} (-1)^s \binom{2p+1}{s} \sin (2p-2s+1) \alpha, \end{aligned}$$

puis posons pour abréger

$$A_p^n = \sum_{s=0}^{\leq \frac{p-1}{2}} (-1)^s \binom{p}{s} (p-2s)^n, \quad (15)$$

nous aurons

$$D_{\alpha}^n (\sin^p \alpha)_{\alpha=0} = \frac{(-1)^q}{2^{p-1}} A_p^n, \quad n-p=2q \geq 0. \quad (16)$$

Cela posé, nous aurons, en vertu de (14), ces deux autres représentations

indépendantes

$$a_n(x) = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{(-1)^{n+p}}{2^{2n+p-1}} \binom{x+p-1}{p} A_{2p}^{2n} \quad (17)$$

$$a_n(x) = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{(-1)^{n+p}}{2^{2p-1}} \binom{\frac{x}{2}+p-1}{p} A_{2p}^{2n}. \quad (18)$$

Étudions encore la série de puissances

$$\left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)^{-x} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{b_n(x)}{(2n)!} \alpha^{2n}, \quad |\alpha| < \pi, \quad (19)$$

les formules d'EULER

$$\frac{1}{\alpha} - \cot \alpha = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2^{2n} B_n}{(2n)!} \alpha^{2n-1}, \quad |\alpha| < \pi,$$

$$\left(\frac{\alpha}{\sin \alpha}\right)^2 = 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2^{2n} (2n-1) B_n}{(2n)!} \alpha^{2n}, \quad |\alpha| < \pi,$$

où les B_n sont les nombres de BERNOULLI, donneront

$$b'_n(0) = \frac{2^{2n} B_n}{2n}, \quad b_n(1) = (2^{2n} - 2) B_n, \quad b_n(2) = (2n-1) 2^{2n} B_n. \quad (20)$$

De plus, nous trouvons en vertu de (16)

$$b_n(-p) = \frac{(-1)^n (2n)!}{(p+2n)! 2^{p-1}} A_p^{p+2n}, \quad p \geq 1,$$

ce qui donnera, en vertu de la formule générale (12) du paragraphe I, cette représentation indépendante

$$b_n(x) = \sum_{p=1}^{p=n} (-1)^{n+p} \binom{\frac{x}{q}+p-1}{p} \binom{\frac{x}{q}+n}{n-p} \frac{(2n)!}{(pq+2n)! 2^{pq-1}} A_{pq}^{pq+2n}, \quad (21)$$

où q désigne un positif entier quelconque.

DEUXIÈME PARTIE.

Applications de la fonction exponentielle

IV. GÉNÉRALISATION D'UNE SÉRIE D'EULER.

Soient x et α deux nombres donnés quelconques, il existe un nombre positif ρ , tel que la série de puissances de y

$$\left(\frac{x - e^{-y(x-1)}}{x-1}\right)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Psi^{\alpha,n}(x)}{n!} y^n \quad (1)$$

a son rayon de convergence égal à ρ ; pour les coefficients $\Psi^{\alpha,n}(x)$ nous trouvons sans peine les équations fonctionnelles

$$\Psi^{\alpha,n+1}(x) = \alpha x \Psi^{\alpha+1,n}(x) - \alpha (x-1) \Psi^{\alpha,n}(x) \quad (2)$$

$$\Psi^{\alpha,n+1}(x) = (\alpha + n x) \Psi^{\alpha,n}(x) - x(x-1) D_x \Psi^{\alpha,n}(x), \quad (3)$$

d'où nous obtenons pour les six premières fonctions $\Psi^{\alpha,n}(x)$ les expressions suivantes

$$\Psi^{\alpha,0}(x) = 1$$

$$\Psi^{\alpha,1}(x) = \alpha$$

$$\Psi^{\alpha,2}(x) = \alpha x + \alpha^2$$

$$\Psi^{\alpha,3}(x) = \alpha x^2 + (3\alpha^2 + \alpha)x + \alpha^3$$

$$\Psi^{\alpha,4}(x) = \alpha x^3 + (7\alpha^2 + 4\alpha)x^2 + (6\alpha^3 + 4\alpha^2 + \alpha)x + \alpha^4$$

$$\begin{aligned} \Psi^{\alpha,5}(x) = & \alpha x^4 + (15\alpha^2 + 11\alpha)x^3 + (25\alpha^3 + 30\alpha^2 + 11\alpha)x^2 + \\ & + (10\alpha^4 + 10\alpha^3 + 5\alpha^2 + \alpha)x + \alpha^5. \end{aligned}$$

Combinons ces valeurs spéciales et les équations fonctionnelles susdites, nous verrons que $\Psi^{a,n}(x)$ est un polynôme entier et par rapport à a et par rapport à x , et ce polynôme est du degré n par rapport à a mais du degré $n-1$ par rapport à x ; dans le dernier cas il faut supposer $n \geq 1$.

Posons $a = -1$, nous aurons

$$\Psi^{(-1),n}(x) = -(x-1)^{n-1}, \quad n \geq 1,$$

ce qui donnera, en vertu de la formule d'addition (3) du paragraphe I, l'équation aux différences finies

$$\Psi^{a,n}(x) = \Psi^{a-1,n}(x) + \sum_{s=1}^{s=n} \binom{n}{s} (x-1)^{n-s} \Psi^{a,n-s}(x). \quad (4)$$

La même formule d'addition donnera, en vertu de (2), cette autre formule spéciale

$$\Psi^{a,n+1}(x) = x \Psi^{a,n}(x) + a x \sum_{s=1}^{s=n} \binom{n}{s} \Psi^{a,n-s-1}(x) \Psi^{a,s}(x) \quad (5)$$

qui nous sera très utile dans ce qui suit.

Il est très facile de trouver, pour les $\Psi^{a,n}(x)$, des représentations indépendantes; car l'identité évidente

$$\frac{x - e^{-y(x-1)}}{x-1} = 1 - \frac{e^{-y(x-1)} - 1}{x-1}$$

donnera la formule

$$\left(\frac{x - e^{-y(x-1)}}{x-1} \right)^{-a} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \binom{a+n-1}{n} \left(\frac{e^{-y(x-1)} - 1}{x-1} \right)^n \quad (6)$$

qui est du même caractère que la formule (7) du paragraphe I.

Appliquons ensuite la formule, où p est un positif entier,

$$(e^{-y(x-1)} - 1)^p = \sum_{s=0}^{s=p} (-1)^s \binom{p}{s} e^{-(p-s)y(x-1)},$$

puis posons pour abréger

$$L_p^*(x) = \sum_{r=0}^{r=p-1} (-1)^r \binom{p}{r} (p-r)^n = \frac{1}{2^n} L_p^*(0), \quad (7)$$

où $L_p^*(x)$ est la fonction définie par la formule (10) du paragraphe II, nous

aurons

$$(e^{-y(x-1)} - 1)^p = \sum_{n=p}^{n=\infty} \frac{(-1)^n L_p^n}{n!} y^n (x-1)^n,$$

d'où, en vertu de (1) et (6), la représentation suivante

$$\Psi(x) = \sum_{p=1}^{\alpha, n} \binom{\alpha + p - 1}{p} L_p^n \cdot (x-1)^{n-p}. \quad (8)$$

Ordonnons maintenant, selon des puissances ascendantes de x , le second membre de (8), puis posons

$$\Psi(x) = \sum_{p=1}^{\alpha, n} \mathfrak{F}_p^n(\alpha) x^{n-p}, \quad (9)$$

nous aurons

$$\mathfrak{F}_p^n(\alpha) = \sum_{r=0}^{r=p-1} (-1)^r \binom{n-p+r}{p-r} \binom{\alpha+p-r-1}{p-r} L_{p-r}^n. \quad (10)$$

Cherchons ensuite, au second membre de (10), le coefficient de la puissance $(p-r)^n$, ce coefficient deviendra

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{s=r} \binom{\alpha+p-s-1}{p-s} \binom{n-p+s}{s} \binom{p-s}{r-s} = \\ = \binom{\alpha+p-r-1}{p-r} \sum_{s=0}^{s=r} \binom{\alpha+p-s-1}{r-s} \binom{n+p-s}{s}; \end{aligned}$$

nous aurons pour $\mathfrak{F}_p^n(\alpha)$ cette autre expression

$$\mathfrak{F}_p^n(\alpha) = \sum_{r=0}^{r=p-1} (-1)^r \binom{\alpha+p-r-1}{p-r} \binom{\alpha+n}{r} (p-r)^n. \quad (11)$$

Inversement nous aurons en vertu de (9) et (10)

$$\binom{\alpha+p-1}{p} L_p^n = \sum_{s=0}^{s=p-1} \binom{n-p+s}{s} \mathfrak{F}_{p-s}^n(\alpha). \quad (12)$$

Introduisons maintenant dans (2) et (3) les expressions (9) et (10), nous aurons les formules récursives

$$L_p^{n+1} = p (L_p^n + L_{p-1}^n) \quad (13)$$

$$\mathfrak{F}_p^{n+1}(\alpha) = p \mathfrak{F}_p^n(\alpha) + (n-p+2) \mathfrak{F}_{p-1}^n(\alpha), \quad (14)$$

dont la première est due à GRUNERT (*).

(*) *Mathematische Abhandlungen*, Altona, 1822. Citation de M. WOPITZKY, dans le *Journal de Crelle*, t. 94, p. 210; 1883.

Posons dans (1) $x = 0$, $x = 1$, la fonction qui figure au premier membre deviendra respectivement

$$e^{-\sigma y}, \quad (1 + y)^{-\alpha},$$

ce qui donnera

$$\Psi^{a,n}(0) = \alpha^n, \quad \Psi^{a,n}(1) = \binom{\alpha + n - 1}{n}, \quad (15)$$

d'où en vertu de (8) et (9) ces deux développements

$$x^n = \sum_{p=1}^{p=n} (-1)^{n-p} \binom{x + p - 1}{p} I_p^n \quad (16)$$

$$\binom{x + n - 1}{n} = \sum_{p=1}^{p=n} \xi_p^n(x). \quad (17)$$

La première de ces deux formules est due à CAUCHY (*) et joue un rôle fondamental dans les recherches de M. WOPITZKY.

V. FORMULES D'EULER, DE LAPLACE ET DE SCHERK.

Le cas particulier de nos recherches précédentes qui correspond à $\alpha = 1$ est classique.

Posons pour abréger

$$\psi_n(x) = \Psi^{1,n}(x), \quad (1)$$

l'équation fonctionnelle (2) du paragraphe IV donnera

$$\left(D_x \Psi^{a,n+1}(x) \right)_{a=0} = x \psi_n(x), \quad n \geq 1;$$

c'est-à-dire que nous aurons ces deux séries de puissances

$$\frac{x-1}{x-e^{-y(x-1)}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \psi_n(x)}{n!} y^n \quad (2)$$

$$\log \left(\frac{x-1}{x-e^{-y(x-1)}} \right) = -y + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n+1} x \psi_n(x)}{(n+1)!} y^{n+1}, \quad (3)$$

(*) *Résumés Analytiques*, p. 35; Turin, 1833.

tandis que les formules (4) et (5) du paragraphe IV donnent ici

$$\psi_n(x) = \sum_{s=1}^{s=n} \binom{n}{s} (x-1)^{s-1} \psi_{n-s}(x), \quad n \geq 1 \quad (4)$$

$$\psi_{n+1}(x) = (x+1) \psi_n(x) + x \cdot \sum_{s=1}^{s=n-1} \binom{n}{s} \psi_s(x) \psi_{n-s}(x). \quad (5)$$

Posons pour abréger

$$\mathfrak{P}_p^n = \sum_{r=0}^{r=p-1} (-1)^r \binom{n+1}{r} (p-r)^n = \mathfrak{P}_p^n(1), \quad (6)$$

nous aurons ces deux représentations indépendantes

$$\psi_n(x) = \sum_{p=1}^{p=n} L_p^n (x-1)^{n-p} \quad (7)$$

$$\psi_n(x) = \sum_{p=1}^{p=n} \mathfrak{P}_p^n x^{n-p}, \quad (8)$$

dont la seconde est indiquée par EULER (*) et démontrée par LAPLACE (**).

EULER (***) a calculé les huit premiers des fonctions $\psi_n(x)$, savoir

$$\psi_0(x) = 1$$

$$\psi_1(x) = 1$$

$$\psi_2(x) = x + 1$$

$$\psi_3(x) = x^2 + 4x + 1$$

$$\psi_4(x) = x^3 + 11x^2 + 11x + 1$$

$$\psi_5(x) = x^4 + 26x^3 + 66x^2 + 26x + 1$$

$$\psi_6(x) = x^5 + 57x^4 + 302x^3 + 302x^2 + 57x + 1$$

$$\psi_7(x) = x^6 + 120x^5 + 1191x^4 + 2416x^3 + 1191x^2 + 120x + 1.$$

Il saute aux yeux que ces polynômes spéciaux sont réciproques; appliquons la formule récurrente (5), nous aurons la proposition suivante due à SCHERK (****):

(*) *Institutiones calculi differentialis*, p. 486; Saint-Petersbourg, 1755.

(**) Voir LACROIX: *Traité du calcul différentiel et intégral*, t. 3, p. 110; Paris, 1819.

(***) *Institutiones calculi differentialis*, p. 485-486.

(****) *Journal de Crelle*, t. 4, p. 302; 1829.

Le polynome $\psi_n(x)$ est, pour $n \geq 1$, un polynome réciproque du degré $n - 1$, savoir

$$x^{n-1} \psi_n\left(\frac{1}{x}\right) = \psi_n(x), \quad (9)$$

de sorte que nous aurons, pour $1 \leq p < n$:

$$\mathfrak{F}_p^n = \mathfrak{F}_{n-p+1}^n. \quad (10)$$

Remplaçons maintenant dans (2) y par $y : (x - 1)$, il en résulte

$$\frac{x - 1}{x - e^{-y}} = 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \psi_n(x)}{n! (x - 1)^n} y^n,$$

d'où en posant $-e^{2xi}$ au lieu de x et $2hi$ au lieu de y

$$\frac{1}{e^{2xi} + e^{-2hi}} = \frac{1}{e^{2xi} + 1} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\psi_n(-e^{2xi}) (2hi)^n}{n! (e^{2xi} + 1)^{n+1}},$$

ce qui donnera, en vertu des identités

$$e^{2xi} + 1 = 2e^{xi} \cos x, \quad \operatorname{tg}(x + h) = \frac{1}{i} \left(\frac{2e^{2xi}}{e^{2xi} + e^{-2hi}} - 1 \right),$$

la série de TAYLOR

$$\operatorname{tg}(x + h) = \operatorname{tg} x + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{i^{n-1} \psi_n(-e^{2xi}) e^{-(n-1)xi} h^n}{n! (\cos x)^{n+1}},$$

de sorte que nous aurons en différentiant n fois par rapport à h , puis posant $h = 0$

$$D_x^n \operatorname{tg} x = \frac{i^{n-1} \psi_n(-e^{2xi}) e^{-(n-1)xi}}{(\cos x)^{n+1}}. \quad (11)$$

Cela posé, introduisons dans (11) le développement (7), nous aurons

$$D_x^n \operatorname{tg} x = (-i)^{n-1} \cdot \sum_{p=0}^{p=n-1} (-1)^p 2^{n-p-1} L_{p+1}^n \cdot \frac{e^{-pxi}}{(\cos x)^{p+2}}, \quad (12)$$

ce qui donnera les deux représentations indépendantes

$$D_x^{2n} \operatorname{tg} x = \frac{2^{2n-1}}{(\cos x)^2} \cdot \sum_{p=1}^{p=2n-1} (-1)^{n+p} L_{p+1}^{2n} \cdot \frac{\sin p x}{(2 \cos x)^p} \quad (13)$$

$$D_x^{2n+1} \operatorname{tg} x = \frac{2^{2n}}{(\cos x)^2} \cdot \sum_{p=0}^{p=2n} (-1)^{n+p} L_{p+1}^{2n+1} \cdot \frac{\cos p x}{(2 \cos x)^p} \quad (14)$$

et les identités

$$\sum_{p=1}^{p=2n} (-1)^{p-1} L_{p+1}^{2n+1} \cdot \frac{\sin p x}{(2 \cos x)^p} = 0 \quad (15)$$

$$\sum_{p=0}^{p=2n-1} (-1)^p L_{p+1}^{2n} \cdot \frac{\cos p x}{(2 \cos x)^p} = 0. \quad (16)$$

On voit que ces formules sont du même genre que les formules plus générales (12), (13) et (14), (15) développées dans le paragraphe II, mais que les coefficients ne sont pas formellement les mêmes. Nous ne nous arrêtons pas à l'étude des relations numériques ainsi obtenues.

Introduisons ensuite dans (11) le développement (8), nous trouvons les formules de SCHERK (*)

$$D_x^{2n} \operatorname{tg} x = 2 \cdot \sum_{p=0}^{p=n-1} (-1)^p \mathfrak{L}_{n-p}^{2n} \cdot \frac{\sin (2p+1)x}{(\cos x)^{2n+1}} \quad (17)$$

$$D_x^{2n+1} \operatorname{tg} x = \frac{\mathfrak{L}_{n+1}^{2n+1}}{(\cos x)^{2n+2}} - 2 \cdot \sum_{p=0}^{p=n-1} (-1)^p \mathfrak{L}_{n-p}^{2n+1} \cdot \frac{\cos (2p+2)x}{(\cos x)^{2n+2}}. \quad (18)$$

VI. ÉTUDE D'AUTRES FONCTIONS PARTICULIÈRES.

Posons dans les formules du paragraphe IV $x = -1$ et x au lieu de α , nous avons à étudier les fonctions

$$c_n(x) = \Psi^{x,n}(-1), \quad (1)$$

ce qui nous conduira à la série de puissances

$$\left(\frac{1+e^{2\alpha}}{2}\right)^{-x} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n c_n(x)}{n!} x^n, \quad |\alpha| < \frac{\pi}{2}. \quad (2)$$

Dans ce cas nous aurons l'équation fonctionnelle

$$c_{n+1}(x) = 2x c_n(x) - x c_n(x+1) \quad (3)$$

et les représentations indépendantes

$$c_n(x) = \sum_{p=1}^{p=n} (-2)^{n-p} \binom{x+p-1}{p} L_p^n \quad (4)$$

(*) *Journal de Crelle*, t. 4, p. 303; 1829.

$$c_n(x) = \sum_{p=1}^{p=n} (-1)^{n-p} \mathfrak{E}_p^*(x), \quad (5)$$

ce qui donnera les valeurs spéciales

$$\begin{aligned} c_0(x) &= 1 \\ c_1(x) &= x \\ c_2(x) &= x^2 - x \\ c_3(x) &= x^3 - 3x^2 \\ c_4(x) &= x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 2x \\ c_5(x) &= x^5 - 10x^4 + 15x^3 + 10x^2. \end{aligned}$$

Remarquons que l'équation fonctionnelle (3) donnera

$$c'_{n+1}(0) = -c_n(1), \quad c_n(2) = 2c_n(1) - c_{n+1}(1),$$

nous aurons, en vertu de la série de puissances

$$\frac{2}{1+e^{2z}} = 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n T_n}{(2n-1)!} \alpha^{2n-1}, \quad (z) < \frac{\pi}{2},$$

ces valeurs numériques

$$c'_{2n}(0) = (-1)^n T_n, \quad c'_{2n+1}(0) = 0 \quad (6)$$

$$c_{2n}(1) = 0, \quad c_{2n+1}(1) = (-1)^n T_{n+1} \quad (7)$$

$$c_{2n}(2) = (-1)^{n+1} T_{n+1}, \quad c_{2n+1}(2) = (-1)^n 2 T_{n+1}. \quad (8)$$

Pour déterminer les valeurs numériques $c_n(-p)$, où p est un positif entier, nous posons

$$B_p^* = \sum_{s=0}^{s=p-1} \binom{p}{s} (p-s)^n, \quad (9)$$

et nous aurons, en vertu de l'identité

$$\left(\frac{1+e^{2\alpha}}{2}\right)^p = \frac{1}{2^p} \cdot \sum_{s=0}^{s=p} \binom{p}{s} e^{2(p-s)\alpha},$$

l'expression suivante

$$c_n(-p) = (-1)^n 2^{n-p} B_p^*, \quad (10)$$

de sorte que la formule générale (12) du paragraphe I donnera cette autre

représentation indépendante

$$c_n(x) = \sum_{p=1}^{p=n} (-1)^{n+p} \binom{\frac{x}{q} + p - 1}{p} \binom{\frac{x}{q} + n}{n-p} 2^{n-pq} B_{pq}^n, \quad (11)$$

où q est un positif entier quelconque.

Nous avons encore à considérer le développement suivant

$$\left(\frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha}\right)^{-x} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{d_n(x)}{n!} \alpha^n, \quad |\alpha| < 2\pi; \quad (12)$$

multiplions par α^{-x} les deux membres de (12), puis différencions par rapport à α , il en résulte l'équation fonctionnelle

$$x d_{n-1}(x) - x d_n(x+1) = (n-x) d_n(x); \quad (13)$$

c'est-à-dire que nous aurons pour $n \geq 1$

$$d'_n(0) = -\frac{d_n(1)}{n}, \quad d_{n-1}(1) = d_n(2) + (n-1) d_n(1).$$

Cela posé, la série de puissances

$$\frac{\alpha}{1-e^{-\alpha}} = 1 + \frac{\alpha}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n-1} B_n}{(2n)!} \alpha^{2n}, \quad |\alpha| < 2\pi,$$

où les B_n sont les nombres de BERNOULLI, donnera les valeurs numériques suivantes

$$d'_{2n}(0) = \frac{(-1)^n}{2n} B_n, \quad d'_{2n+1}(0) = 0 \quad (14)$$

$$d_{2n}(1) = (-1)^{n-1} B_n, \quad d_{2n+1}(1) = 0 \quad (15)$$

$$d_{2n}(2) = (-1)^n (2n-1) B_n, \quad d_{2n+1}(2) = (-1)^{n-1} B_n. \quad (16)$$

Dans ces formules il faut admettre généralement $n \geq 1$; mais l'expression de $d_{2n}(2)$ n'est pas applicable pour $n=1$; dans cette expression il faut supposer $n \geq 2$.

Appliquons ensuite l'identité

$$\left(\frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha}\right)^p = \frac{(-1)^p}{\alpha^p} \sum_{s=0}^{s=p} (-1)^s \binom{p}{s} e^{-(p-s)\alpha},$$

où p est un positif entier, nous aurons en vertu de la définition (7) du pa-

ragraphe IV la série de puissances toujours convergente

$$\left(\frac{1 - e^{-x}}{x}\right)^p = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{(n+p)!} I_p^{n+p} x^n,$$

ce qui donnera

$$d_n(-p) = \frac{(-1)^n n!}{(n+p)!} I_p^{n+p}, \quad (17)$$

d'où la représentation indépendante

$$d_n(x) = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{(-1)^{n+p} n!}{(n+p q)!} \binom{\frac{x}{q} + p - 1}{p} \binom{\frac{x}{q} + n}{n - p} I_{pq}^{n+pq}, \quad (18)$$

où q est un positif entier quelconque.

Remarquons en passant que les polynômes $d_n(x)$ sont intimement liés avec les fonctions de STIRLING (*).

TROISIEME PARTIE.

Table des formules numériques

VII. FORMULES CONTENANT DES NOMBRES QUELCONQUES.

Désignons par q un positif entier quelconque, tandis que m est un entier qui doit satisfaire aux conditions indiquées, nous aurons les représentations indépendantes qui contiennent les deux nombres m et q :

$$T_n = \sum_{p=1}^{p=m} \frac{(-1)^{n+p}}{p q \cdot 2^{pq-1}} \binom{m}{p} \mathfrak{A}_{pq}^{2n}, \quad m \geq n. \quad (1)$$

(*) Voir mon *Handbuch der Theorie der Gammafunktion*, p. 71-77; Leipsic, 1906.

$$E_n = \sum_{p=1}^{p=m} \frac{(-1)^{n+p}}{2^{pq-1}} \binom{\frac{1}{q} + p - 1}{p} \binom{\frac{1}{q} + m}{m-p} \mathfrak{H}_{pq}^{2n}, \quad m \geq n. \quad (2)$$

$$T_{n+1} = \sum_{p=1}^{p=m} \frac{(-1)^{n+p}}{2^{pq-1}} \binom{\frac{2}{q} + p - 1}{p} \binom{\frac{2}{q} + m}{m-p} \mathfrak{H}_{pq}^{2n}, \quad m \geq n. \quad (3)$$

$$\frac{2^{2n} B_n}{2n} = \sum_{p=1}^{p=m} \frac{(-1)^{n+p} (2n)!}{p q \cdot (2n + p q)! 2^{pq-1}} \binom{m}{p} A_{pq}^{2n+pq}, \quad m \geq n. \quad (4)$$

$$(2^{2n} - 2) B_n = \sum_{p=1}^{p=m} \frac{(-1)^{n+p} (2n)!}{(2n + p q)! 2^{pq-1}} \binom{\frac{1}{q} + p - 1}{p} \binom{\frac{1}{q} + m}{m-p} A_{pq}^{2n+pq}, \quad m \geq n \quad (5)$$

$$(2n-1) 2^{2n} B_n = \sum_{p=1}^{p=m} \frac{(-1)^{n+p} (2n)!}{(2n + p q)! 2^{pq-1}} \binom{\frac{2}{q} + p - 1}{p} \binom{\frac{2}{q} + m}{m-p} A_{pq}^{2n+pq}, \quad m \geq n. \quad (6)$$

$$T_n = \sum_{p=1}^{p=m} \frac{(-1)^{n+p} 2^{2n-pq}}{p q} \binom{m}{p} B_{pq}^{2n}, \quad m \geq 2n. \quad (7)$$

$$T_{n+1} = \sum_{p=1}^{p=m} (-1)^{n+p+1} 2^{2n-pq+1} \binom{\frac{1}{q} + p - 1}{p} \binom{\frac{1}{q} + m}{m-p} B_{pq}^{2n+1}, \quad m \geq 2n+1. \quad (8)$$

$$T_{n+1} = \sum_{p=1}^{p=m} (-1)^{n+p+1} 2^{2n-pq} \binom{\frac{2}{q} + p - 1}{p} \binom{\frac{2}{q} + m}{m-p} B_{pq}^{2n}, \quad m \geq 2n. \quad (9)$$

$$2 T_{n+1} = \sum_{p=1}^{p=m} (-1)^{n+p+1} 2^{2n-pq+1} \binom{\frac{2}{q} + p - 1}{p} \binom{\frac{2}{q} + m}{m-p} B_{pq}^{2n+1}, \quad m \geq 2n+1. \quad (10)$$

$$\frac{B_n}{2n} = \sum_{p=1}^{p=m} \frac{(-1)^{n+p} (2n)!}{(2n + p q)! p q} \binom{m}{p} L_{pq}^{2n+pq}, \quad m \geq 2n. \quad (11)$$

$$B_n = \sum_{p=1}^{p=m} \frac{(-1)^{n+p+1} (2n)!}{(2n + p q)!} \binom{\frac{1}{q} + p - 1}{p} \binom{\frac{1}{q} + m}{m-p} L_{pq}^{2n+pq}, \quad m \geq 2n. \quad (12)$$

$$(2n-1) B_n = \sum_{p=1}^{p=m} \frac{(-1)^{n+p} (2n)!}{(2n + p q)!} \binom{\frac{2}{q} + p - 1}{p} \binom{\frac{2}{q} + m}{m-p} L_{pq}^{2n+pq}, \quad m \geq 2n. \quad (13)$$

$$B_n = \sum_{p=1}^{p=m} \frac{(-1)^{n+p+1} (2n+1)!}{(2n + p q + 1)!} \binom{\frac{2}{q} + p - 1}{p} \binom{\frac{2}{q} + m}{m-p} L_{pq}^{2n+pq+1}, \quad m \geq 2n+1. \quad (14)$$

Remplaçons maintenant toujours m par sa plus petite valeur, puis posons $q = 1$, et posons encore dans (3), (6), (9) et (10), (13) et (14) $q = 2$, nous aurons les formules plus particulières et plus simples

- I.
$$T_n = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{(-1)^{n+p}}{p \cdot 2^{p-1}} \binom{n}{p} \mathfrak{A}_p^{2^n}.$$
- II.
$$E_n = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{(-1)^{n+p}}{2^{p-1}} \binom{n+1}{n-p} \mathfrak{A}_p^{2^n}.$$
- III.
$$T_{n+1} = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{(-1)^{n+p} (p+1)}{2^{p-1}} \binom{n+2}{n-p} \mathfrak{A}_p^{2^n}.$$
- IV.
$$T_{n+1} = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{(-1)^{n+p}}{2^{2p-1}} \binom{n+1}{n-p} \mathfrak{A}_p^{2^n}.$$
- V.
$$\frac{2^{2n} B_n}{2n} = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{(-1)^{n+p} (2n)!}{(p+2n)! p \cdot 2^{p-1}} \binom{n}{p} A_p^{2^{n+p}}.$$
- VI.
$$(2^{2n} - 2) B_n = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{(-1)^{n+p} (2n)!}{(p+2n)! 2^{p-1}} \binom{n+1}{n-p} A_p^{2^{n+p}}.$$
- VII.
$$(2n-1) 2^{2n} B_n = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{(-1)^{n+p} (2n)! (p+1)}{(p+2n)! 2^{p-1}} \binom{n+2}{n-p} A_p^{2^{n+p}}.$$
- VIII.
$$(2n-1) 2^{2n} B_n = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{(-1)^{n+p} (2n)!}{(2p+2n)! 2^{2p-1}} \binom{n+1}{n-p} A_{2p}^{2^{n+2p}}.$$
- IX.
$$T_n = \sum_{p=1}^{p=2n} \frac{(-1)^{n+p} 2^{2n-p}}{p} \binom{2n}{p} B_p^{2^n}.$$
- X.
$$T_{n+1} = \sum_{p=1}^{p=2n+1} (-1)^{n+p+1} 2^{2n-p+1} \binom{2n+1}{2n-p} B_p^{2^{n+1}}.$$
- XI.
$$T_{n+1} = \sum_{p=1}^{p=2n} (-1)^{n+p+1} 2^{2n-p} \binom{2n+2}{2n-p} (p+1) B_p^{2^n}.$$
- XII.
$$2 T_{n+1} = \sum_{p=1}^{p=2n+1} (-1)^{n+p+1} 2^{2n-p+1} \binom{2n+3}{2n-p+1} (p+1) B_p^{2^{n+1}}.$$
- XIII.
$$T_{n+1} = \sum_{p=1}^{p=2n} (-1)^{n+p+1} 2^{2n-2p} \binom{2n+1}{2n-p} B_{2p}^{2^n}.$$
- XIV.
$$2 T_{n+1} = \sum_{p=1}^{p=2n+1} (-1)^{n+p+1} 2^{2n-2p+1} \binom{2n+2}{2n-p+1} B_{2p}^{2^{n+1}}.$$

$$\text{XV.} \quad \frac{B_n}{2^n} = \sum_{p=1}^{p=2n} \frac{(-1)^{n+p} (2n)!}{(2n+p)! p} \binom{2n}{p} L_p^{2n+p}.$$

$$\text{XVI.} \quad B_n = \sum_{p=1}^{p=2n} \frac{(-1)^{n+p+1} (2n)!}{(2n+p)!} \binom{2n+1}{2n-p} L_p^{2n+p}.$$

$$\text{XVII.} \quad (2n-1) B_n = \sum_{p=1}^{p=2n} \frac{(-1)^{n+p} (2n)! (p+1)}{(2n+p)!} \binom{2n+2}{2n-p} L_p^{2n+p}.$$

$$\text{XVIII.} \quad B_n = \sum_{p=1}^{p=2n+1} \frac{(-1)^{n+p+1} (2n+1)! (p+1)}{(2n+p+1)!} \binom{2n+3}{2n-p+1} L_p^{2n+p+1}.$$

$$\text{XIX.} \quad (2n-1) B_n = \sum_{p=1}^{p=2n} \frac{(-1)^{n+p} (2n)!}{(2n+2p)!} \binom{2n+1}{2n-p} L_{2p}^{2n+2p}.$$

$$\text{XX.} \quad B_n = \sum_{p=1}^{p=2n+1} \frac{(-1)^{n+p+1} (2n+1)!}{(2n+2p+1)!} \binom{2n+2}{2n-p+1} L_{2p}^{2n+2p+1}.$$

Dans ces formules nous avons posé pour abréger

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_p^n &= \sum_{s=0}^{\leq \frac{p-1}{2}} \binom{p}{s} (p-2s)^n, & A_p^n &= \sum_{s=0}^{\leq \frac{p-1}{2}} (-1)^s \binom{p}{s} (p-2s)^n, \\ L_p^n &= \sum_{s=0}^{s=p-1} (-1)^s \binom{p}{s} (p-s)^n, & B_p^n &= \sum_{s=0}^{s=p-1} \binom{p}{s} (p-s)^n. \end{aligned}$$

De plus, nous avons entre les T_n et les B_n la relation suivante

$$T_n = \frac{2^{2n} (2^{2n} - 1)}{2^n} B_n.$$

VIII. REPRÉSENTATIONS SANS DES PARAMÈTRES.

Les représentations indépendantes d'une forme plus simple que nous venons d'indiquer pour les fonctions $a_n(x)$ et $c_n(x)$ donnent une suite d'autres formules numériques, savoir :

$$\text{XXI.} \quad T_n = \sum_{p=1}^{p=2n} \frac{(-1)^{n+p} 2^{2n-p}}{p} L_p^{2n}.$$

$$\text{XXII.} \quad T_n = \sum_{p=1}^{p=2n-1} (-1)^{n+p} 2^{2n-p-1} L_p^{2n-1}.$$

$$\text{XXIII.} \quad E_n = \sum_{p=0}^{p=2n} \frac{(-1)^{n+p}}{2^p} L_p^{2n}(1).$$

$$\text{XXIV.} \quad E_n = \sum_{p=1}^{p=2n-1} \frac{(-1)^{n+p}}{2^p} p L_p^{2n-1}(1).$$

$$\text{XXV.} \quad T_{n+1} = \sum_{p=0}^{p=2n} \frac{(-1)^{n+p} (p+1)}{2^p} L_p^{2n}(2).$$

$$\text{XXVI.} \quad T_{n+1} = \sum_{p=1}^{p=2n-1} \frac{(-1)^{n+p} p (p+1)}{2^p} L_p^{2n-1}(2).$$

$$\text{XXVII.} \quad 2^{2n} T_n = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{(-1)^{n+p}}{2^{p-1} \cdot p} A_{2p}^{2n}.$$

$$\text{XXVIII.} \quad 2^{2n} E_n = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{(-1)^{n+p}}{2^{p-1}} A_{2p}^{2n}.$$

$$\text{XXIX.} \quad 2^{2n} T_{n+1} = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{(-1)^{n+p} (p+1)}{2^{p-1}} A_{2p}^{2n}.$$

$$\text{XXX.} \quad T_n = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{(-1)^{n+p}}{p \cdot 2^{2p}} A_{2p}^{2n}.$$

$$\text{XXXI.} \quad E_n = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{(-1)^{n+p}}{2^{2p-1}} \left(p - \frac{1}{2} \right) A_{2p}^{2n}.$$

$$\text{XXXII.} \quad T_{n+1} = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{(-1)^{n+p}}{2^{2p-1}} A_{2p}^{2n},$$

$$\text{XXXIII.} \quad T_{n+1} = \sum_{p=1}^{p=2n} (-1)^{n+p+1} (p+1) 2^{2n-2p} L_p^{2n}.$$

$$\text{XXXIV.} \quad 2 T_{n+1} = \sum_{p=1}^{p=2n+1} (-1)^{n+p+1} (p+1) 2^{2n-2p+1} L_p^{n+1}.$$

$$\text{XXXV.} \quad T_n = \sum_{p=1}^{p=2n} (-1)^{n+p} \mathfrak{E}_p^{2n-1}.$$

$$\text{XXXVI.} \quad T_{n+1} = \sum_{p=1}^{p=2n+1} (-1)^{n+p+1} \mathfrak{E}_p^{2n+1}.$$

$$\text{XXXVII.} \quad T_{n+1} = \sum_{p=1}^{p=2n} (-1)^{n+p+1} \mathfrak{E}_p^{2n}(2).$$

$$\text{XXXVIII.} \quad 2 T_{n+1} = \sum_{p=1}^{p=2n+1} (-1)^{n+p-1} \mathfrak{E}_p^{2n+1}(2).$$

XXXIX.
$$T_{n+1} = \sum_{p=0}^{p=2n} (-1)^{n+p} 2^{2n-p} L_{p+1}^{2n+1}.$$

XL.
$$T_{n+1} = \mathfrak{L}_{n+1}^{2n+1} - 2 \cdot \sum_{p=0}^{p=n-1} (-1)^p \mathfrak{L}_{n-p}^{2n+1}.$$

Les deux derniers développements sont tirés des formules (14) et (18) du paragraphe V.

Dans les formules de XXIII à XXVI il faut poser

$$L_p^n(x) = \sum_{s=0}^{s=p} (-1)^s \binom{p}{s} (x + 2p - 2s)^n, \quad L_0^n(x) = x^n,$$

ce qui donnera

$$L_p^n(0) = 2^n \cdot L_p^n.$$

Quant à la fonction $\mathfrak{L}_p^n(x)$ qui figure dans les formules XXXVII et XXXVIII, nous avons

$$\mathfrak{L}_p^n(x) = \sum_{s=0}^{s=p-1} (-1)^s \binom{x+p-s-1}{p-s} \binom{x+n}{s} (p-s)^n,$$

ce qui donnera

$$\left(D_x \mathfrak{L}_p^n(x) \right)_{x=0} = \mathfrak{L}_p^{n-1}(1) = \mathfrak{L}_p^{n-1}.$$

On voit que plusieurs des quarante représentations indépendantes particulières que nous venons d'indiquer sont bien connues.