Ueber algebraische Relationen zwischen den Entwicklungscoefficienten höherer Differentiale.

Von

FRANZ MEYER in Clausthal.

Unterliegt das Differential dx einer Veränderlichen x keiner beschränkenden Voraussetzung, sodass dx nebst den folgenden Differentialen $d^2x, d^3x, \dots$ geradezu eine Reihe von unabhängigen Variabeln bildet, und ist y eine Function von x , so lässt sich, wie bekannt, das n^{te} Differential von y linear und homogen durch die Ableitungen von y nach x , bis zur n^{ten} incl., ausdrücken, mit Hülfe von Coefficienten C , welche ganze, rationale Functionen der $dx, d^2x, \dots, d^nx$ sind.

Zwischen diesen, succ. für $n=1, 2, 3, \dots$ aufgestellten Coefficienten herrschen eigenthümliche algebraische Beziehungen, unter denen diejenigen vom ersten und zweiten Grade in besonderer Weise ausgezeichnet sind.

Man gelangt zu den gemeinten Beziehungen am einfachsten auf Grund des Satzes, dass bei der Entwicklung der n^{ten} Ableitung des reciproken Werthes einer Function $f(x)$ von x nach steigenden Potenzen von $f(x)$ die dabei auftretenden Coefficienten Γ von den Grössen $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)$ genau in derselben Weise abhängen, wie die Coefficienten C von den Grössen $dx, d^2x, \dots, d^nx$. Somit geht eine jede algebraische Beziehung zwischen den C in eine solche zwischen den Γ über, wenn man nur noch die Ableitungen von $f(x)$ mit den bezüglichen Differentialen von x vertauscht, und umgekehrt.

Die gewünschten Beziehungen zwischen den Γ fließen nun fast unmittelbar aus den Theilbarkeitsbeziehungen, welche in der voranstehenden Abhandlung für gewisse ganze Functionen höherer Differentialquotienten von $\frac{1}{f(x)}$ hergeleitet sind.

Aus den so gewonnenen Relationen zwischen den Γ resp. C lässt sich als besonders merkwürdig ein System von $\frac{n(n-1)}{2}$ Functionalgleichungen für jene Grössen vom zweiten Grade herausheben. Durch

diese Gleichungen werden alle darin vorkommenden Unbekannten bis auf n von ihnen, welche willkürlich bleiben, als ganze, ganzzahlige Functionen der letzteren n Argumente eindeutig definirt. Jenachdem man für eben diese Argumente die Ableitungen von $f(x)$, oder die Differentiale von x substituirt, gehen die Werthe der Unbekannten in die Γ resp. C über.

§ 1.

Grundformeln.

Man verdankt Herrn Faà di Bruno*) den Satz:

„Sei φ als Function von x und x selbst als Function von y durch die Gleichung

$$(1) \quad x = \psi(y)$$

gegeben, so ist (für $\Pi(k) = 1.2.3 \dots k$ und $\Pi(0) = 1$):

$$(I) \quad \frac{\partial^n \varphi}{\partial y^n} = \sum_{e,k} \frac{\Pi(n)}{\Pi(k_1) \dots \Pi(k_n)} \frac{\partial^e \varphi}{\partial x^e} \left(\frac{\psi'}{1} \right)^{k_1} \left(\frac{\psi''}{1.2} \right)^{k_2} \dots \left(\frac{\psi^{(n)}}{\Pi(n)} \right)^{k_n},$$

wo die Summe alle ganzen nicht negativen Werthe von $e, k_1, \dots, k_n$ umfasst, die den Gleichungen

$$(2) \quad \begin{cases} e = k_1 + k_2 + \dots + k_n, \\ n = k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n \end{cases}$$

genügen“.

Man kann diesem Satze eine allgemeinere Bedeutung geben, wenn man bemerkt, dass sich bei wirklichem Ausschreiben der Ableitungen $\psi', \psi'', \dots, \psi^{(n)}$ das Product der Nenner zufolge der zweiten Relation (2) gegen den Nenner ∂y^n links hebt. Hieraus ergibt sich (wenn man, wie üblich, für φ den Buchstaben y substituirt):

„Ist y eine Function von x , und wird das Differential dx nicht als constant angesehen, sondern selbst wieder als abhängig von irgend welchen Veränderlichen, so drückt sich das n^{te} Differential von y durch die Ableitungen von y nach x und die Differentiale von x vermöge der Formel aus:

$$(II) \quad d^n y = \sum_{e,k} \frac{\Pi(n)}{\Pi(k_1) \dots \Pi(k_n)} y^{(e)} \left(\frac{dx}{1} \right)^{k_1} \left(\frac{d^2 x}{1.2} \right)^{k_2} \dots \left(\frac{d^n x}{\Pi(n)} \right)^{k_n},$$

*) Cf. dessen Lehrbuch „Formes Binaires“ § 1. Für die, mit (I) äquivalente Formel (II) hat Herr Königsberger einen selbstständigen Beweis gegeben. (Diese Annalen, Band XXVII, pag. 473 u. flg.). Was endlich die Formel (III) anlangt, die wiederum inhaltlich mit (I) und (II) identisch ist, so habe ich einen elementaren Beweis derselben (welcher von der Entwickelbarkeit einer Function $f(x)$ in eine Taylor'sche Reihe keinen Gebrauch macht) in den Wiener Monatsheften für Mathematik und Physik Heft 1 veröffentlicht.

Ueber einen weiteren neuen Beweis von (I) siehe § 5.

wo die ganzen Zahlen $\varrho, k_1, \dots, k_n$ gerade, wie oben, den Relationen (2) genügen.“

Setzt man zur Abkürzung:

$$(3) \quad \frac{d^n y}{\Pi(n)} = d_n y, \quad \frac{d^i x}{\Pi(i)} = d_i x, \quad \frac{y^{(\varrho)}}{\Pi(\varrho)} = y_\varrho \quad (i, \varrho = 1, 2, \dots, n)$$

so nimmt (II) die Gestalt an*):

$$(IIa) \quad d_n y = \sum_{\varrho, k} \frac{\Pi(\varrho)}{\Pi(k_1) \dots \Pi(k_n)} y_\varrho (d_1 x)^{k_1} (d_2 x)^{k_2} \dots (d_n x)^{k_n} \\ = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=n} y_\varrho C_{n, n-\varrho}.$$

Zwischen diesen Entwicklungskoeffizienten

$$C_{n, n-\varrho} \quad (n=1, 2, 3, \dots, \varrho=1, 2, \dots, n)$$

finden, wie sich zeigen wird, eigenthümliche algebraische Relationen statt.

Um dieselben zu gewinnen, wenden wir die Formel (I) auf den besonderen Fall an, wo φ den reciproken Werth einer beliebigen Function f von x darstellt. Nun ist

$$(4) \quad \frac{d^\varrho \left(\frac{1}{f} \right)}{d f^\varrho} = (-1)^\varrho \frac{\Pi(\varrho)}{f^{\varrho+1}} \quad (\varrho=1, 2, \dots).$$

Bedient man sich der weiteren Abkürzungen:

$$(5) \quad \frac{1}{\Pi(n)} f^{n+1} \frac{d^n \left(\frac{1}{f} \right)}{d x^n} = E_n, \quad \frac{1}{\Pi(i)} \frac{d^i f}{d x^i} = f_i \quad (i=1, 2, \dots),$$

so liefert die Formel (I) für den vorliegenden Fall nach leichter Umformung das Ergebniss:

„Die n^{te} Ableitung von $\frac{1}{f(x)}$ nach x drückt sich in Function der Ableitungen von f nach x vermöge der Formel aus:

$$(III) \quad (-1)^n E_n = \sum_{\varrho, k} \frac{\Pi(\varrho)}{\Pi(k_1) \dots \Pi(k_n)} (-f)^{n-\varrho} f_1^{k_1} f_2^{k_2} \dots f_n^{k_n} \\ = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=n} (-f)^{n-\varrho} \Gamma_{n, n-\varrho},$$

wo die ganzen (nicht negativen) Zahlen $\varrho, k_1, \dots, k_n$, wie früher, alle Werthe durchlaufen, welche den Relationen (2) genügen.“

*) Zur Illustration der Formel (IIa) dient die als Anhang beigegebene Tabelle, welche die Fälle $n=1$ bis $n=10$ umfasst. Durch Vertauschung der d_i mit den f_i und zugleich der y_{n-i} mit den Potenzen $\{-f(x)\}^i$ leistet die Tabelle das Entsprechende für die Formel (III).

Der Vergleich der Entwicklungen (IIa) und (III) lehrt, dass die Coefficienten $C_{n,n-\varrho}$ und $\Gamma_{n,n-\varrho}$, ganze, ganzzahlige, homogene und isobare Functionen der Argumente $d_i x$ resp. f_i ($i=1,2,\dots,n$), durch Vertauschung derselben genau in einander übergehen, das heisst, die nämlichen Zahlencoefficienten besitzen.

Nun haben im Allgemeinen sowohl die $d_i x$, als die f_i den Charakter von n willkürlichen und unabhängigen Variabeln.

Mithin gelten alle algebraischen Relationen zwischen den $\Gamma_{n,n-\varrho}$, bei deren Herleitung keinerlei algebraische Beziehung zwischen den f_i in Frage kam, genau in derselben Weise zwischen den $C_{n,n-\varrho}$.

§ 2.

Lineare Relationen zwischen den C .

Nach Nr. (7) der vorangehenden Abhandlung genügt die Function E_n (5) der recurrenten Functionalgleichung:

$$(IV) \quad E_n + f_1 E_{n-1} + f_2 f E_{n-2} + f_3 f^2 E_{n-3} + \dots + f_{n-1} f^{n-2} E_1 + f_n f^{n-1} = 0.$$

Setzt man hier die Entwicklung (III) ein:

$$(III) \quad (-1)^k E_k = \Gamma_{k,0} + (-1)f\Gamma_{k,1} + (-1)^2 f^2 \Gamma_{k,2} + \dots + (-1)^{k-1} f^{k-1} \Gamma_{k,k-1},$$

und sieht das Ergebniss als eine in f identisch verschwindende Gleichung an, so fliessen daraus n Beziehungen zwischen den Γ und den f_i . Von diesen haben $n-1$ die recurrirende Form:

$$(6) \quad \Gamma_{n,k} = f_1 \Gamma_{n-1,k} + f_2 \Gamma_{n-2,k-1} + f_3 \Gamma_{n-3,k-2} + \dots + f_{k+1} \Gamma_{n-(k+1),0} \\ (k=0,1,2,\dots,n-2)$$

während die letzte lautet:

$$(7) \quad \Gamma_{n,n-1} = f_n.$$

Sieht man umgekehrt in diesen Relationen (6), (7) die f_i als beliebig gegebene Grössen an, so sind damit die $\Gamma_{n,k}$ eindeutig und völlig bestimmt.

Somit gilt, nach den am Schlusse von § 1 gemachten Bemerkungen, für die Entwicklungscoefficienten C von $d_n y = \frac{d^n y}{\Pi(n)}$:

$$(IIa) \quad d_n y = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=n} y_{\varrho} C_{n,n-\varrho} \quad \left(y_{\varrho} = \frac{1}{\Pi(\varrho)} \frac{d^{\varrho} y}{d x^{\varrho}} \right)$$

ein entsprechendes Resultat, nämlich, wenn man noch der Kürze halber

$$\frac{d^2 x}{\Pi(2)} = d_i x \text{ durch } d_i \text{ ersetzt:}$$

„Die Coefficienten C sind durch die $\frac{n(n+1)}{2}$ linearen Relationen*):

$$(V) \begin{cases} C_{n,k} = d_1 C_{n-1,k} + d_2 C_{n-2,k-1} + d_3 C_{n-3,k-2} + \dots + d_{k+1} C_{n-(k+1),0} \\ \quad (k=0, 1, 2, \dots, n-2), \quad (n=1, 2, 3, \dots, n), \\ C_{n,n-1} = d_n \end{cases}$$

Es ist nun merkwürdig, dass die $\frac{n(n-1)}{2}$ ersten dieser in den C linearen Relationen, welche als Coefficienten noch die Differentiale d_i mit sich führen, vollständig durch eine gleiche Anzahl solcher ersetzt werden können, die in den C bis zum zweiten Grade ansteigen, deren Coefficienten aber nur ganze Zahlen sind.

Quadratische Relationen zwischen den C .

[illegible]

*) Um Missverständnisse auszuschliessen, sei bemerkt, dass bezüglich der „Anzahl“ solcher Relationen, wie (V), eine doppelte Sprechweise Berechtigung hat. Jenachdem man hervorheben will, dass ein derartiges System von recurrenten Gleichungen für einen vorgeschriebenen Werth von n aufgestellt sein soll, oder aber, dass dieses System mit allen vorhergehenden, d. i. kleineren Werthen von n entsprechenden, zusammengefasst werden soll, wird man den Ausdruck wählen, dass die Anzahl der Gleichungen (V) gleich n , oder aber gleich $\frac{n(n+1)}{2}$ sei.

Das im Falle $n=2$ auftretende Zeichen $C_{0,0}$ (das nur der Gleichförmigkeit halber eingeführt ist) hat hierbei die Bedeutung der positiven Einheit.

$$(10) \quad \begin{vmatrix} C_{n-2,0} & C_{n-2,1} & C_{n-2,2} & . & . & C_{n-2,n-3} & 0 \\ 0 & C_{n-2,0} & C_{n-2,1} & . & . & C_{n-2,n-4} & C_{n-2,n-3} \\ 0 & 0 & C_{n-2,0} & . & . & C_{n-2,n-5} & C_{n-2,n-4} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 & C_{n-2,0} \end{vmatrix}.$$
$$(11) \quad C_{2,0} = C_{1,0}^2; \quad C_{3,0} = C_{1,0}^{3*}; \dots; C_{n,0} = C_{1,0}^n.$$

Alsdann gestatten die $n - 1$ Systeme von Gleichungen (VI), welche der Reihe nach den Werthen $2, 3, 4, \dots, n$ des Index n correspondiren, Schritt für Schritt je eine einzige Auflösung nach den jeweiligen Unbekannten $C_{n,n-2}, C_{n,n-3}, \dots, C_{n,0}$.

Auf diese Weise stellen sich von den $\frac{n(n+1)}{2}$, in (VI) vorkommenden Grössen $C_{n,k}$ vermöge eben dieser $\frac{n(n-1)}{2}$ Gleichungen $\frac{n(n-1)}{2}$, nämlich die $C_{i,k} \left\{ \begin{matrix} i = 2, 3, \dots, n \\ k = 0, 1, \dots, i-2 \end{matrix} \right\}$ als rationale Functionen der n noch übrigen $C_{i,i-1}$ dar, die, weil sie durch die Bedingungen (VI)

allein nicht bestimmbar sind, als die willkürlichen Constanten der letzteren figuriren. Und zwar wird der Nenner der genannten rationalen Functionen immer nur aus einer Potenz von $C_{1,0}$ gebildet, während die Coefficienten der Zähler ganze Zahlen sind.

Aber diese rationalen Functionen der $C_{i,i-1}$ reduciren sich tatsächlich auf ganze Functionen ihrer Argumente. Denn eine derartige Auflösung der Gleichungen (VI) kennen wir von früher her: es sind dies die Coefficienten C der y_0 in der Entwicklung (IIa) von $d_n y$, wobei die $C_{i,i-1}$ in die d_i übergehen. Die letzteren Grössen konnten aber, wie das die linearen Functionalgleichungen (V) deutlich zeigen, ebenfalls als n willkürliche und von einander unabhängige Constanten aufgefasst werden. Wir sind somit zu dem Ergebnisse gelangt*):

„Durch die $\frac{n(n-1)}{2}$ quadratischen Relationen (VI) werden die Grössen $C_{i,k}$ ($i = 2, 3, \dots, n$
 $k = 0, 1, \dots, i-2$) in eindeutiger Weise als ganze, ganzzahlige Functionen der $C_{i,i-1}$ defnirt. Durch Vertauschung der $C_{i,i-1}$ mit den $d_i = \frac{1}{i!} d^i x$ gehen die in Rede stehenden $C_{i,k}$ unmittelbar über in die entsprechenden Entwicklungscoefficienten (IIa) des n^{ten} Differentialen von y “.

Damit erweisen sich wirklich die $\frac{n(n-1)}{2}$ quadratischen Relationen (VI) als äquivalent mit den $\frac{n(n-1)}{2}$, unter (V) an erster Stelle aufgeführten linearen Relationen, während die noch hinzutretenden Substitutionen $C_{n,n-1} = d_n$ beiden gemeinsam sind.

Es erübrigt noch die Beantwortung der Frage, in welcher Weise die nach Ausschluss der fundamentalen Gleichungen (VI) noch verbleibenden quadratischen Relationen (8), d. s. die den Werthen $s = 3, 4, \dots, n$ zugehörigen, von den ersteren abhängen.

Sei z. B. $n=3, s=3, s_1=1, s_2=2$, so liefert (8) die eine Relation:

$$C_{3,0} - C_{1,0}C_{2,0} = 0.$$

Nun ist identisch:

$$C_{1,0}(C_{3,0} - C_{1,0}C_{2,0}) = C_{2,0}(C_{2,0} - C_{1,0}^2) + (C_{1,0}C_{3,0} - C_{2,0}^2),$$

während die Gleichungen:

$$C_{2,0} - C_{1,0}^2 = 0, \quad C_{1,0}C_{3,0} - C_{2,0}^2 = 0$$

dem Systeme (VI) angehören.

*) Dieser Satz lässt auch den Grund erkennen, warum in den Sätzen (A₁), (C₁), (D₁), (E) der vorausgehenden Arbeit der Grösse $\Delta_n \Delta_{n-2} - \Delta_{n-1}^2$ eine fundamentale Rolle zukommt.

Sei ferner $n = 4$, $s = 4$, $s_1 = 1$, $s_2 = 3$, so ergeben sich aus (8) zwei Relationen, deren erste lautet:

$$C_{4,0} - C_{1,0} C_{3,0} = 0.$$

Es gilt aber wiederum die Identität:

$$C_{1,0} C_{2,0} (C_{4,0} - C_{1,0} C_{3,0}) = C_{2,0} C_{3,0} (C_{2,0} - C_{1,0}^2) + C_{3,0} (C_{1,0} C_{3,0} - C_{2,0}^2) \\ + C_{1,0} (C_{2,0} C_{4,0} - C_{3,0}^2)$$

und die gleich Null gesetzten Klammerausdrücke rechter Hand liefern gleichfalls Relationen des Systems (VI). In beiden Beispielen ist eine Gleichung (8) ($s > 2$) mit Gleichungen (VI) derart linear verknüpft, dass die begleitenden Factoren die Form ganzer ganzzahliger Functionen der C besitzen.

Um das Entsprechende allgemein nachzuweisen, und zugleich die Mittel zu einer vollständigen Aufstellung der fraglichen Verknüpfungen zu gewinnen, greifen wir noch einmal auf die Entstehung der Gleichungen (8) zurück. Die Existenz der letzteren war nur der Ausdruck der Thatsache, dass bei der Entwicklung der Differenz

$$E_n E_{n-s} - E_{n-s_1} E_{n-s_2} \quad (s = s_1 + s_2 = 2, 3, \dots, n)$$

nach steigenden Potenzen von f der erste nicht verschwindende Coefficient der von f^{n-s+1} war. Die genannten Differenzen zerlege man ebenfalls in zwei Gruppen, je nachdem s gleich oder grösser als Zwei ausfällt:

$$(A) \ E_n E_{n-2} - E_{n-1}^2, \quad (B) \ E_n E_{n-s} - E_{n-s_1} E_{n-s_2} \quad (s = s_1 + s_2 = 3, 4, \dots, n).$$

Wir werden zuvörderst die zwischen den Gruppen (A) und (B) bestehenden Verknüpfungen studiren: dann werden sich diejenigen zwischen den Gleichungen (8) ($s > 2$) und (VI) als eine unmittelbare Folge daraus ableiten lassen.

Aus der Gruppe (B) greife man zunächst den Theil heraus, der erhalten wird, indem man nicht nur n , sondern auch s je einen festen Werth beilegt. Ein solcher Theil umfasst nur Ausdrücke (B) von ein und demselben Gewicht $g = 2n - s$. Alle Individuen des Theiles lassen sich offenbar durch blosse Addition aus den folgenden zusammensetzen:

$$(B_1) \left\{ \begin{array}{l} E_g E_0 - E_{g-1} E_1, E_{g-1} E_1 - E_{g-2} E_2, \dots, E_{\frac{g}{2}+2} E_{\frac{g}{2}-2} - E_{\frac{g}{2}+1} E_{\frac{g}{2}-1} \\ \text{resp. } E_{\frac{g+3}{2}} E_{\frac{g-3}{2}} - E_{\frac{g+1}{2}} E_{\frac{g-1}{2}}, \end{array} \right.$$

je nachdem g gerade oder ungerade ist.

k der kleinste der sechs auftretenden Indices. Ordnet man also die Determinante linker Hand nach den Elementen der letzten Reihe, und entwickelt nach Potenzen von f , so verschwinden die Coefficienten von $f^0, f^1, \dots$ bis f^k incl. Durch das Verschwinden der Determinante wird aber die der Gruppe (B_1) zugehörige Differenz $E_{g-k}E_k - E_{g-(k+1)}E_{k+1}$ vom Gewichte g als lineare ganze Function der ebenfalls zu (B_1) gehörenden Differenz $E_{g-(k+1)}E_k - E_{g-(k+2)}E_{k+1}$ vom Gewichte $g-1$ und der zu (A) gehörenden Differenz $E_{g-k}E_{g-(k+2)} - E_{g-(k+1)}^2$ ausgedrückt. Folglich wird auch jede, aus der erstgenannten Differenz nach Früherem, überhaupt ableitbare Relation (8) linear ausgedrückt durch eine ebensolche, aber von nächst niedrigerem Gewichte, und eine der Relationen (VI). Setzt man diesen Process fort, indem man das Gewicht g der bezüglichen Differenzen (B_1) genügend weit herunterdrückt, und substituiert schliesslich wieder die C statt der Γ , so gelangt man zu dem Satze:

„Schafft man in den Relationen (8) ($s > 2$), nachdem noch die Γ durch die C ersetzt sind, sowie in den Functionalrelationen (VI) alle Glieder auf die linke Seite, so ist eine jede der linken Seiten von (8) mit einer Anzahl linker Seiten von (VI) durch eine lineare Identität verknüpft, deren Coefficienten ganze, ganzzahlige Functionen der C sind. Diese Identitäten sind in den Determinantengleichungen (VII) implicite enthalten“.

Zur Erläuterung mögen die früher direct behandelten Fälle $n=3$, $s=3$, $s_1=1$, $s_2=2$ und $n=4$, $s=4$, $s_1=s$, $s_2=3$ dienen.

Die beiden ersten Beziehungen (VII) ergeben, wenn man den Parameter λ beidemale gleich Null setzt:

$$\begin{aligned} E_1(E_3 - E_1E_2) &= E_2(E_2 - E_1^2) + (E_1E_3 - E_2^2), \\ E_2(E_4 - E_1E_3) &= E_3(E_3 - E_1E_2) + (E_2E_4 - E_3^2) \end{aligned}$$

also auch durch geeignete Combinirung:

$$E_1E_2(E_4 - E_1E_3) = E_2E_3(E_2 - E_1^2) + E_3(E_1E_3 - E_2^2) + E_1(E_2E_4 - E_3^2).$$

Setzt man die von f freien Glieder zu beiden Seiten der ersten resp. der dritten Identität einander gleich, so wird man, nach Vertauschung der Γ mit den C , gerade zu den beiden, damals erhaltenen Formeln geführt:

$$\begin{aligned} C_{1,0}(C_{3,0} - C_{1,0}C_{2,0}) &= C_{2,0}(C_{2,0} - C_{1,0}^2) + (C_{1,0}C_{3,0} - C_{2,0}^2), \\ C_{1,0}C_{2,0}(C_{4,0} - C_{1,0}C_{3,0}) &= C_{2,0}C_{3,0}(C_{2,0} - C_{1,0}^2) + C_{3,0}(C_{1,0}C_{3,0} - C_{2,0}^2) \\ &\quad + C_{1,0}(C_{2,0}C_{4,0} - C_{3,0}^2). \end{aligned}$$

§ 5.

Zur Begründung der Bruno'schen Formel.

Zum Schlusse möge noch ein neuer, kurzer Beweis*) der von H. Faà di Bruno gegebenen Grundformel (I) seinen Platz finden, der die Form der darin auftretenden Coefficienten zu einer sehr durchsichtigen macht.

Sei wiederum φ eine Function von x , und x eine solche von y . Der n^{te} Differentialquotient von φ nach y sei mit $\frac{\partial^n \varphi}{\partial y^n}$ bezeichnet; der, durch $\Pi(\varrho)$ dividirte ϱ^{te} Differentialquotient von φ nach x mit φ_ϱ , und analog der, durch $\Pi(k)$ dividirte k^{te} Differentialquotient von x nach y mit x_k .

Endlich bedeute Δy eine beliebige Aenderung von y , Δx die entsprechende von x und $\Delta \varphi$ diejenige von φ .

Die Grösse $\frac{1}{\Pi(n)} \frac{\partial^n \varphi}{\partial y^n}$ erscheint als Coefficient von $(\Delta y)^n$ in der Taylor'schen Entwicklung von $\Delta \varphi = \varphi(x(y + \Delta y)) - \varphi(x(y))$. Diese Entwicklung kann aber auf doppelte Art vorgenommen werden. Entweder ersetzt man unter dem Functionszeichen φ von vornherein x durch seine Function in y und entwickelt direct nach Potenzen von Δy ; dabei spielt y die Rolle der unabhängigen Veränderlichen, und die Zwischenvariable x ist gleich zu Anfang eliminirt. Oder aber es lässt sich $\Delta \varphi = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)$ zunächst nach Potenzen von Δx entwickeln, wobei x als unabhängige Veränderliche fungirt; wird so dann nicht nur x durch die Function $x(y)$ ersetzt, sondern auch $\Delta x = x(y + \Delta y) - x(y)$ von Neuem (nach Taylor) nach Potenzen von Δy entwickelt und die letztere Entwicklung überall in die erst erwähnte eingeführt, und wird endlich nach Potenzen von Δy geordnet, so resultirt eine Entwicklung von $\Delta \varphi$ nach Potenzen von Δy , welche mit der ursprünglich direct abgeleiteten nothwendig Glied für Glied übereinstimmen muss. Die Vergleichung des beiderseitigen Coefficienten von $(\Delta y)^n$ stellt somit $\frac{1}{\Pi(n)} \frac{\partial^n \varphi}{\partial y^n}$ als ganze, rationale Function der φ_ϱ und x_k ($\varrho = 1, 2, \dots, n$) ($k = 1, 2, \dots, n$) dar.

Man hat demnach zuvörderst:

$$(14) \quad \Delta \varphi = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) = \sum_1^{\infty} (\Delta x)^\varrho \varphi_\varrho.$$

*) Das diesem Beweise zu Grunde liegende Princip verdanke ich einer gütigen Mittheilung von Herrn R. Dedekind.

Die Einführung von y und Δy geschieht durch:

$$(15) \quad \Delta x = x(y + \Delta y) - x(y) = \sum_1^{\infty} (\Delta y)^k x_k.$$

Mithin geht (14) über in:

$$(16) \quad \Delta \varphi = \sum_1^{\infty} \varphi_{\varrho} \{ \Delta y \cdot x_1 + (\Delta y)^2 x_2 + \dots + (\Delta y)^n x_n + \dots \}^{\varrho},$$

wo auch in den φ_{ϱ} nach Ausführung der bez. Differentiation nach x das letztere Argument durch seine Function $x(y)$ in y zu ersetzen ist. Auf der rechten Seite von (16) hat man den Coefficienten $(\Delta y)^n$ aufzusuchen. Die daselbst figurirenden Klammerreihen dürfen desshalb bei der n^{ten} Potenz Δy abgebrochen werden: desgleichen können für den Exponenten ϱ nur die Werthe $\varrho = 1, 2, \dots, n$ in Betracht kommen.

Somit wird $\frac{1}{\Pi(n)} \frac{\partial^n \varphi}{\partial y^n}$ gleich dem Factor von $(\Delta y)^n$ in der endlichen Entwicklung:

$$(17) \quad \sum_1^n \varphi_{\varrho} \{ (\Delta y) x_1 + (\Delta y)^2 x_2 + \dots + (\Delta y)^n x_n \}^{\varrho}.$$

Die letztere wird durch den Polynomialsatz geliefert, wie folgt:

$$(18) \quad \left\{ \sum_1^n \varphi_{\varrho} \sum (\Delta y)^{k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n} \frac{\Pi(\varrho)}{\Pi(k_1) \Pi(k_2) \dots \Pi(k_n)} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}, \right. \\ \left. k_1 + k_2 + \dots + k_n = \varrho \quad (k_i \geq 0) \quad (\Pi(0) = 1) \right\}.$$

Soll also hier der Coefficient von $(\Delta y)^n$ herausgehoben werden, so sind die Indices k_i der weiteren Bedingung zu unterwerfen:

$$(19) \quad k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n,$$

und es ergibt sich schliesslich (für die so eingeschränkten k_i)

$$(20) \quad \frac{1}{\Pi(n)} \frac{\partial^n \varphi}{\partial y^n} = \sum_{\varrho, x} \frac{\Pi(\varrho)}{\Pi(k_1) \Pi(k_2) \dots \Pi(k_n)} \varphi_{\varrho} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}.$$

Dies ist aber die Bruno'sche Formel (I), wenn man sich noch für $x = x(y)$ des Functionszeichens $\psi = \psi(y)$ bedient.

Clausthal, December 1889.

Tabelle der Entwicklungskoeffizienten von $d^n y$ für $n = 1$ bis $n = 10$.

$d_n y$	y_n	y_{n-1}	y_{n-2}	y_{n-3}	y_{n-4}	y_{n-5}	y_{n-6}	y_{n-7}	y_{n-8}	y_{n-9}
$n=1$	d_1									
$n=2$	$\frac{d_1^2}{2}$	d_2								
$n=3$	$\frac{d_1^3}{6}$	$\frac{2d_1 d_2}{3}$	d_3							
$n=4$	$\frac{d_1^4}{24}$	$\frac{3d_1^2 d_2}{8}$	$\frac{2d_1 d_3 + d_2^2}{2}$	d_4						
$n=5$	$\frac{d_1^5}{120}$	$\frac{4d_1^3 d_2}{24}$	$\frac{3d_1^2 d_3 + 3d_1 d_2^2}{8}$	$\frac{2d_1 d_4 + 2d_2 d_3}{2}$	d_5					
$n=6$	$\frac{d_1^6}{720}$	$\frac{5d_1^4 d_2}{240}$	$\frac{4d_1^3 d_3 + 6d_1^2 d_2^2}{24}$	$\frac{3d_1^2 d_4 + 6d_1 d_2 d_3 + d_3^2}{6}$	$\frac{2d_1 d_5 + 2d_2 d_4 + d_3^2}{2}$					
$n=7$	$\frac{d_1^7}{5040}$	$\frac{6d_1^5 d_2}{504}$	$\frac{5d_1^4 d_3 + 10d_1^3 d_2^2}{108}$	$\frac{4d_1^3 d_4 + 12d_1^2 d_2 d_3 + 4d_1 d_2^2}{12}$	$\frac{3d_1^2 d_5 + 6d_1 d_2 d_4 + 3d_1 d_3^2 + 8d_2^2 d_3}{24}$	$\frac{2d_1 d_6 + 2d_2 d_5 + 2d_3 d_4}{4}$				
$n=8$	$\frac{d_1^8}{40320}$	$\frac{7d_1^6 d_2}{10080}$	$\frac{6d_1^5 d_3 + 15d_1^4 d_2^2}{1512}$	$\frac{5d_1^4 d_4 + 20d_1^3 d_2 d_3 + 10d_1^2 d_2^2}{120}$	$\frac{4d_1^3 d_5 + 12d_1^2 d_2 d_4 + 6d_1 d_2^2 d_3 + 6d_1 d_3^2 + 3d_2^2 d_4}{240}$	$\frac{3d_1^2 d_6 + 6d_1 d_2 d_5 + 6d_1 d_3 d_4 + 3d_2^2 d_4 + 3d_2 d_3^2}{480}$	$\frac{2d_1 d_7 + 2d_2 d_6 + 2d_3 d_5 + d_4^2}{240}$			
$n=9$	$\frac{d_1^9}{362880}$	$\frac{8d_1^7 d_2}{90720}$	$\frac{7d_1^6 d_3 + 21d_1^5 d_2^2}{18144}$	$\frac{6d_1^5 d_4 + 30d_1^4 d_2 d_3 + 20d_1^3 d_2^2}{1440}$	$\frac{5d_1^4 d_5 + 20d_1^3 d_2 d_4 + 10d_1^2 d_2^2 d_3 + 30d_1 d_2^2 d_3 + 5d_2^3}{1440}$	$\frac{4d_1^3 d_6 + 12d_1^2 d_2 d_5 + 12d_1 d_2^2 d_4 + 12d_1 d_2^2 d_3 + 12d_1 d_2 d_3^2 + 4d_2^3}{2880}$	$\frac{3d_1^2 d_7 + 6d_1 d_2 d_6 + 6d_1 d_3 d_5 + 6d_1 d_4^2 + 3d_2^2 d_6 + 6d_2 d_3 d_4 + d_3^3}{5760}$	$\frac{2d_1 d_8 + 2d_2 d_7 + 2d_3 d_6 + 2d_4 d_5}{2880}$	d_9	
$n=10$	$\frac{d_1^{10}}{3628800}$	$\frac{9d_1^8 d_2}{907200}$	$\frac{8d_1^7 d_3 + 28d_1^6 d_2^2}{181440}$	$\frac{7d_1^6 d_4 + 42d_1^5 d_2 d_3 + 35d_1^4 d_2^2}{14400}$	$\frac{6d_1^5 d_5 + 30d_1^4 d_2 d_4 + 15d_1^3 d_2^2 d_3 + 60d_1^2 d_2^2 d_3 + 15d_1 d_2^3}{14400}$	$\frac{5d_1^4 d_6 + 20d_1^3 d_2 d_5 + 20d_1^2 d_2^2 d_4 + 30d_1 d_2^2 d_3 + 20d_1 d_2 d_3^2 + d_2^3}{28800}$	$\frac{4d_1^3 d_7 + 12d_1^2 d_2 d_6 + 12d_1 d_2^2 d_5 + 6d_1 d_2^2 d_4 + 12d_1 d_2^2 d_3 + 3d_2^3}{57600}$	$\frac{3d_1^2 d_8 + 6d_1 d_2 d_7 + 6d_1 d_3 d_6 + 6d_1 d_4^2 + 3d_2^2 d_8 + 6d_2 d_3 d_4 + 3d_2^2 d_4 + 6d_2 d_3^2}{115200}$	$\frac{2d_1 d_9 + 2d_2 d_8 + 2d_3 d_7 + 2d_4 d_6 + d_5^2}{57600}$	d_{10}
	$C_{n,0}$	$C_{n,1}$	$C_{n,2}$	$C_{n,3}$	$C_{n,4}$	$C_{n,5}$	$C_{n,6}$	$C_{n,7}$	$C_{n,8}$	$C_{n,9}$

Erklärung: $d_n y = \frac{d^n y}{\Pi(n)}$, $d_k = d_k x = \frac{d^k x}{\Pi(k)}$, $y_i = \frac{1}{\Pi(i)} \frac{d^i y}{dx^i}$.

Ersetzt man die y_{n-i} durch $(-1)^i f^i(x)$, die d_k durch $f_k = \frac{1}{\Pi(k)} \frac{d^k f(x)}{dx^k}$, so hat man die Entwicklung von

$$(-1)^n E_n = (-1)^n \frac{1}{\Pi(n)} \frac{d^n}{dx^n} \left\{ \frac{1}{f(x)} \right\} \text{ nach Potenzen von } f(x).$$