SULLE TRASFORMAZIONI $(2,2)$ CHE SI POSSONO OTTENERE
MEDIANTE DUE TRASFORMAZIONI DOPPIE,

Nota di **C. Burali-Forti**, in Torino.

Adunanza del 22 febbrajo 1891

Dati tre piani σ , σ' , σ'' trasformiamo, mediante due trasformazioni doppie (*), rispettivamente degli ordini n e n' e di generi p e p' , σ in σ'' e σ' in σ'' , supponendo in gen. tale che in σ'' non coincidano i punti fondamentali delle trasformazioni doppie. Passando da σ a σ'' e da σ'' a σ' , o da σ' a σ'' e da σ'' a σ si trasforma σ in σ' mediante una trasformazione $(2, 2)$ se i piani σ e σ' sono ambedue doppi o semplici, o mediante una trasformazione $(1, 4)$ se uno dei piani è doppio, l'altro semplice.

Quando i due piani σ e σ' sono ambedue semplici si ottengono, per un noto teorema del BERTINI, tutte le trasformazioni $(2, 2)$ per le quali le due congiunte sono trasformazioni $(1, 1)$ involutorie. Tali trasformazioni presentano analogie con le trasformazioni doppie e con le Cremoniane, anzi per una speciale posizione delle due trasformazioni doppie che le generano, hanno per punti fondamentali i punti fondamentali delle congiunte con eguale molteplicità. La trasformazione qua-

(*) De PAOLIS, *Atti della R. Accademia dei Lincei*, 1876-77

dratica (2, 2) studiata dal sig. VISALLI (questi *Rendiconti*, 1889) appartiene, come il caso più semplice, a questo gruppo

Quando i due piani σ e σ' sono ambedue doppi, si ottengono delle speciali trasformazioni (2, 2) per le quali le congiunte sono pure (2, 2). Queste trasformazioni presentano delle analogie con le trasformazioni generali (2, 2), delle quali firò vedere in altra Nota le proprietà generali, ma ne differiscono essenzialmente anche solo per quello che riguarda la natura delle curve fondamentali

Indicherò in questa Nota, quasi sempre senza dimostrarle, le principali proprietà di queste due specie di trasformazioni, la cui esistenza dipende evidentemente dall'esistenza delle due corrispondenti trasformazioni doppie.

I

1. Supponiamo che i piani σ e σ' , per le due trasformazioni doppie che indicheremo con (σ) e (σ') sieno ambedue semplici, e indichiamo con $i''_1, i''_2, i''_r, i_1, i_2, i_s$ le molteplicità dei punti fondamentali di σ'' e σ per la (σ) e con $j''_1, j''_2, j''_r, j'_1, j'_2, j'_s$ quelle dei punti fondamentali di σ'' e σ' per la (σ') . Se N e N' sono gli ordini delle due congiunte in σ e σ' per le trasformazioni doppie (σ) e (σ') , ν e ν' gli ordini delle curve doppie, sono note le relazioni

$$\sum i''_r = n^2 - (N + 1), \quad \sum i_s = n^2 - 2, \quad \sum i''_r = 3(n - 1) - \nu, \quad \sum i_s = 3n + 2(p - 2)$$

$$\sum j''_r = n'^2 - (N' + 1), \quad \sum j'_s = n'^2 - 2, \quad \sum j''_r = 3(n' - 1) - \nu', \quad \sum j'_s = 3n' + 3(p' - 2)$$

Indicheremo con Φ_a , o Φ'_a la curva di σ o σ' che per la (2, 2) corrisponde ad una retta a' o a di σ' o σ , e con Φ''_a o Φ'''_a la curva, di σ'' , che per la (σ) o (σ') corrisponde ad una retta a o a' di σ o σ' .

Ad un punto P'' fondamentale j'' -plo per (σ') e non fondamentale per (σ) corrispondono in σ due punti congiunti PP che sono fondamentali j'' -pli di 2^a specie (*) per la (2, 2). Ad una curva ψ'' di

(*) Nella trasformazione (2, 2) diremo che un punto è fondamentale di 1^a, 2^a o 3^a specie secondochè è congiunto ad una curva, ad un altro punto o a sè stesso, che una curva è fondamentale di 1^a, 2^a o 3^a specie secondochè è congiunta ad un punto, ad un'altra curva o a sè stessa.

ordine j'' fondamentale per $\iota_1(\sigma')$ e non fondamentale per (σ) corrisponde in σ una curva di ordine nj'' che è fondamentale per la (2, 2). Viceversa, ad ogni punto P di σ fondamentale ι -plo per la (2, 2) e non fondamentale per (σ) deve corrispondere in σ'' un punto fondamentale ι -plo della (σ') . Ad ogni punto P di σ fondamentale per la (2,2) e fondamentale ι -plo per (σ) corrisponde in σ'' una curva, alla quale, per la (σ') , corrisponde in σ' una curva di ordine $n'\iota$. Dunque:

I punti fondamentali ι -pli per (σ) e (σ') in σ e σ' sono fondamentali $n'\iota$ -pli e $n\iota$ -pli per la (2,2), questa ha inoltre tante coppie di punti fondamentali (di 2^a specie) quanti sono ι punti fondamentali in σ'' per (σ') e (σ) e multipli come questi.

Ogni punto di σ'' ι'' -plo per (σ) e j'' -plo per (σ') , diminuisce l'ordine della (2,2) di $\iota''j''$ unità

Ad un punto di σ'' fondamentale per (σ) e (σ') corrisponde un punto, ed una curva fondamentale per la (2, 2) se è di 1^a specie per una almeno delle trasformazioni doppie. Essendo P'' di 1^a specie per una sola delle due trasformazioni doppie si ha un sol punto fondamentale per la (2,2) di molteplicità eguale a quella di P'' considerato come punto di 2^a o 3^a specie. Essendo P'' di 1^a specie per (σ) e (σ') , e, rispettivamente, ι'' -plo, j'' -plo, si ha in σ un punto j'' -plo e in σ' un punto ι'' -plo per la (2,2).

Se un punto ι -plo per la congiunta (di σ o σ') è fondamentale j -plo per la (2, 2) e ad esso corrisponde (in σ' o σ) una curva fondamentale di 1^a specie, il punto congiunto a questa è fondamentale j -plo per la congiunta e ι -plo per la (2, 2)

2. Supposto che in σ'' non coincidano punti fondamentali di (σ) e (σ') abbiamo

$$\sum (n'\iota_i)^2 + 2 \sum j''^2 = (nn')^2 - 2(N' + 1)$$

Dunque (De Paolis, luogo citato)

Le Φ o Φ' formano una serie $(\infty)^2$ di indue 4 e di ordine nn' di curve iperellittiche, due qualunque delle quali si tagliano in $2(N' + 1)$ o $2(N + 1)$ punti variabili, dei quali, due corrispondono al punto comune alle due rette dell'altro piano alle quali sono corrispondenti le due curve e sono separati dai rimanenti $2N'$ o $2N$ dalla curva di ordine nn' , cor-

rispondente al luogo dei punti congiunti separati armonicamente dalle due rette, curva che passa semplicemente per i punti doppi variabili delle due Φ o Φ' , per i punti in cui le Φ o Φ' toccano la curva limite e infine con i rami per ogni punto fondamentale i plo. I rimanenti $2N$ o $2N'$ punti corrispondono ai punti di una delle rette i cui congiunti sono sull'altra.

Ricordando che si è indicato con v e v' l'ordine della curva doppia in σ e σ' avremo.

Le Φ o Φ' hanno $N' - v'$ o $N - v$ punti doppi variabili

Le Φ o Φ' toccano la curva limite del loro piano in $2v'$ o $2v$ punti variabili

Per il genere π e π' delle Φ e Φ' abbiamo

$$\sum \frac{n'_i(n'_i - 1)}{2} + 2 \sum \frac{j''_i(j''_i - 1)}{2} + N' - v' = \frac{(nn' - 1)(nn' - 2)}{2} - \pi.$$

Le Φ o Φ' sono di genere $n'(p + 1) - 1$, o $n(p' + 1) - 1$.

In σ'' si ha per la (σ') una curva limite di ordine $2(p' + 1)$ e quindi la curva limite in σ per la $(2, 2)$ è di ordine $2n(p' + 1)$

La curva limite di σ o σ' è di ordine $2(\pi' + 1)$ o $2(\pi + 1)$ come doveva avvenire perchè le Φ sono iperellittiche

Facilmente si possono dimostrare teoremi analoghi a quelli dati su alcuni luoghi ed involucri nelle trasformazioni doppie (1 c)

3 Se indichiamo con r_b , $r'_{b'}$, le molteplicità dei punti fondamentali per la $(2, 2)$ in σ e σ' e con m l'ordine della trasformazione, abbiamo le relazioni

$$\sum r_b^2 = m^2 - 2(N' + 1), \quad \sum r_b = 3m + 2\pi - 2(v' + 2)$$

$$\sum r'_{b'} = m^2 - 2(N + 1), \quad \sum r'_{b'} = 3m + 2\pi' - 2(v + 2)$$

che si possono ottenere anche direttamente senza ricorrere alle due trasformazioni (σ) e (σ')

4 Supponiamo che le (σ) e (σ') sieno eguali e che in σ'' coin-

cidano i punti fondamentali ($n=n'$, $r=r'$, $\pi=\pi'$, $p=p'$, $N=N'$) le curve fondamentali possono coincidere o no, ma se le due trasformazioni sono speciali allora le curve fondamentali corrispondenti, se non coincidono necessariamente perchè determinate dai punti fondamentali e da altre condizioni, devono toccare le medesime rette fisse (De Paolis, l. c.) La trasformazione speciale (2,2) che si ottiene in tal caso la indicheremo con $(2,2)_1$,

Per l'ordine della $(2,2)_1$ abbiamo

$$n^2 - \sum j_i''^2 = N + 1$$

L'ordine della $(2,2)_1$ supera di un'unità l'ordine delle due congiunte.

Consideriamo in σ'' una curva fondamentale ψ_i'' della (σ') di 2^a o 3^a specie. La ψ_i'' e quindi la ψ'' relativa a (σ) (se non coincide con ψ_i'') non è incontrata in punti variabili da Φ_a'' , dunque la Φ_a non passa per i punti fondamentali di 2^a o 3^a specie di (σ) . Sia invece ψ_i'' una curva fondamentale di ordine j di 1^a specie per la (σ') , essa, e quindi anche ψ'' , è incontrata in i punti variabili dalla Φ_a'' , e per ciò Φ_a passa con i rami per il punto fondamentale corrispondente a ψ'' che è i -plo per la congiunta. Sia ora P un punto fondamentale i -plo per la congiunta e non fondamentale per la (σ) , ad esso corrisponde in σ'' un punto P'' fondamentale i -plo di 1^a specie per (σ) e (σ') e quindi P è i -plo per la $(2,2)$.

La trasformazione $(2,2)_1$ ha per punti fondamentali i -pli i punti fondamentali i -pli delle congiunte e per curve fondamentali le curve fondamentali di queste. La $(2,2)_1$ non ha altri punti e curve fondamentali.

Chiamando $\pi = \pi'$ il genere della trasformazione $(2,2)_1$, dalle formule del n° 3 si deduce facilmente

Il genere della trasformazione $(2,2)_1$ è inferiore di un'unità all'ordine della curva doppia e quindi nella $(2,2)_1$ non può mancare la curva doppia.

La curva limite è di ordine $2(\pi + 1) = \nu$ e corrispondendo nella $(2,2)_1$ ad una curva di ordine ν , la curva doppia deve incontrare la curva congiunta ad una retta in $\nu(N + 1) - 2\nu = \nu(N - 1)$ punti fissi nei punti fondamentali, risultato già noto per altra via.

Per $m = 2$ le $(2,2)$ e $(2,2)_1$ coincidono con la trasformazione

studiata dal VISALLI, che si ottiene da due trasformazioni doppie di ordine 2 le cui congiunte sono due omologie armoniche

5. Supponiamo che i piani σ e σ' coincidano senza che vengano a coincidere dei punti fondamentali. Preso un punto P indichiamo con ϕ'_p o ϕ_p la curva luogo dei punti comuni alle rette del fascio di centro P con le curve che a queste rette corrispondono nella 2^a o 1^a figura. La ϕ'_p o ϕ_p è dell'ordine $m+2$ ed ha in P un punto doppio le cui tangenti sono le rette che congiungono P con i due punti che gli corrispondono nella 1^a o 2^a figura. Di più le ϕ passano con i piani per ogni punto fondamentale i -plo della 2^a o 1^a figura. È facile dimostrare che le ϕ'_p , ϕ'_q relative ai punti P e Q (non congiunti) si tagliano nei punti uniti, nei punti fondamentali, in m punti della retta PQ e in $2(m+N+2)$ punti M' i cui corrispondenti nella prima figura sono uno nella retta $M'P$, l'altro nella retta $M'Q$. Indicando allora con u il numero dei punti uniti, abbiamo

$$(m+2)^2 = \sum r_b'^2 + m + 2(m+N+2) + u,$$

da cui si ha $u = m+4$.

Il numero $2(m+N+2)$ non varia se esiste una curva unita, ma se P e Q sono congiunti si riduce a $2(m+N)$. Indicando con y il numero dei punti comuni a ϕ_p e ϕ'_p fuori di P e fuori degli $m+4$ punti uniti abbiamo $y = (m+4)(m-1)$, e si deduce che le rette a , tali che per uno dei loro punti A_0 , uno dei punti A_i e A'_i che gli corrispondono quando si considera A_0 come appartenente alla 2^a o 1^a figura sieno in a , inviluppano una curva della classe $m(m+4)$, dalla quale si staccano $m+4$ fasci di rette aventi i centri negli $m+4$ punti uniti.

Coincidendo ancora i due piani σ e σ' supponiamo che la trasformazione (2,2) sia involutoria ed esista una curva unita di ordine $\mathfrak{s}$ che passi con $\mathfrak{s}_b$ rami per ogni punto r_b -plo. Ad un punto fondamentale di 1^a specie può corrispondere . 1° una curva congiunta ad un altro punto Q che è pure fondamentale e la cui curva corrispondente è congiunta a P , 2° la sua congiunta, ma in tal caso alla coppia di punti congiunti MM , essendo M infinitamente vicino a P , deve corrispondere una coppia di punti congiunti $M'M'$, distinta, in generale, da MM ,

3° una curva di 2^a o 3^a specie, ma in tal caso non vi sono coppie di punti uniti infinitamente vicini a P . Se P è fondamentale di 2^a specie può avere per corrispondenti una curva da 2^a o 3^a specie o anche di 1^a, ma in questo caso non vi sono coppie di punti uniti infinitamente vicini a P . Se infine P è di 3^a specie può ad esso corrispondere una curva limite o un altro punto di 3^a specie o sè stesso e nel 2° caso non ha punti uniti infinitamente vicini mentre nel 3° è punto unito.

Indicando con u il numero dei punti uniti si ha facilmente

$$u = m + 2\chi - 2(2s - 1) - \sum \alpha_b$$

ove si è posto $2\chi = (s - 1)(s - 2) - \sum s_b(s_b - 1)$ e α_b indica il numero dei rami con cui la curva fondamentale corrispondente a P , r_b -plo, passa per P . È pure evidente la relazione

$$\sum r_b s_b = s(m - 2).$$

La curva unita taglia la curva doppia in direzione principale e in questi punti la curva unita è tangente alla curva limite. La curva unita e la curva limite si toccano nei punti nei quali la curva doppia taglia la curva unita e non hanno altri punti a comune fuori dei punti fondamentali. La curva limite e la curva doppia si tagliano nei punti comuni alla curva unita e alla curva doppia e in altri μ ($\mu \geq 0$) coppie di punti corrispondenti per i quali non passa la curva unita. Queste μ coppie sono le sole coppie di punti corrispondenti (non uniti) della curva doppia.

II

6 Supponiamo ora che i piani σ e σ' sieno ambedue doppi per le trasformazioni (σ) e (σ') . Conservando le notazioni precedenti abbiamo.

$$\sum i_r'' = n^2 - 2; \quad \sum i_s' = n^2 - (N + 1), \quad \sum i_r'' = 3n + 2(p - 2), \quad \sum i_s' = 3(n - 1) - v$$

$$\sum j_r'' = n'^2 - 2, \quad \sum j_s' = n'^2 - (N' + 1), \quad \sum j_r'' = 3n' + 2(p' - 2), \quad \sum j_s' = 3(n' - 1) - v'.$$

Ad un punto P di σ corrispondono in σ'' per la (σ) due punti congiunti $P_1'' P_2''$, a P_1'' e al suo congiunto Q_1'' nella (σ') corrisponde per la (σ') in σ' un punto P_1' , a P_2' e al suo congiunto Q_2'' nella (σ') corrisponde per la (σ') in σ' un punto P_2'' . Al punto P dunque corrispondono, per la $(2, 2)$, 1 due punti P_1' e P_2' . Al punto P_1' corrisponde per la (σ') in σ'' la coppia $P_1'' Q_1''$, a P_1'' e al suo congiunto P_2'' nella (σ) corrisponde in σ il punto P , a Q_1'' e al suo congiunto R_1'' corrisponde il punto Q_1 ; a P_2' corrisponde per la (σ') in σ'' la coppia $P_2'' Q_2''$; a P_2'' e al suo congiunto P_1'' nella (σ) corrisponde in σ il punto P , a Q_2'' e al suo congiunto R_2'' corrisponde il punto Q_2 . Dunque a P sono congiunti i due punti Q_1, Q_2 e perciò la trasformazione congiunta è pure una $(2, 2)$.

Il modo ora tenuto per ottenere i corrispondenti e i congiunti di P può ripetersi per un altro elemento qualunque del piano σ .

7. Supponiamo che P sia fondamentale 1-plo per la (σ) e ad esso corrisponda in σ'' un punto P'' congiunto ad una curva φ'' . Al punto P'' e al suo congiunto per la (σ') , corrisponde in σ' un punto P' ; a φ'' e alla sua congiunta per la (σ') corrisponde una curva φ' di ordine n' . Al punto P' corrisponde per la (σ') in σ'' , P'' e il suo congiunto, quindi a P è congiunto un punto Q_1 e una curva φ di ordine nN' . Se a P corrisponde in σ'' per la (σ) una curva che si spezza in due curve congiunte di ordini i_1 e i_2 ($i_1 + i_2 = 1$) a P corrispondono per la $(2, 2)$ in σ' due curve dell'ordine complessivo n' e a P sono congiunti, nella congiunta di σ relativa alla $(2, 2)$, due curve dell'ordine complessivo nN' . Considerazioni analoghe possono farsi se a P corrisponde in σ'' una curva congiunta a sè stessa. Chiamando allora fondamentale di 1^a , 2^a , 3^a , specie un punto P , per la $(2, 2)$ o per la congiunta, al quale corrisponde un punto e una curva, o due curve, o una sola curva, avremo.

Ogni punto di σ fondamentale 1-plo di r^a specie per la (σ) è fondamentale, di r^a specie, n' 1-plo per la $(2, 2)$ e nN' 1-plo per la congiunta.

In σ i punti fondamentali per la $(2, 2)$ sono i punti fondamentali 1-pli per la (σ) di (σ) , che divengono n' 1-pli per la $(2, 2)$, più tanti punti 1-pli quanti sono i punti 1-pli fondamentali di σ'' per (σ') .

La congiunta di σ ha per punti fondamentali nN' 1-pli, i punti fondamentali 1-pli di (σ) più tanti punti n' 1-pli quanti sono i punti 1-pli di 1^a specie in σ'' per la (σ') .

8 Alla curva limite L di ordine $2(p+1)$ di σ corrisponde in σ'' per la (σ) la curva doppia Ω'' di ordine ν , ad Ω'' corrisponde in σ' , per la (σ') , una curva Ω' di ordine $\nu n'$ che è doppia per la $(2, 2)$ e unita per la congiunta di σ' . Ad L è congiunta in σ una curva Δ di ordine $\nu n N$, che è doppia per la congiunta di σ . Si ha facilmente.

Le curve iperellittiche appartenenti ad una serie $(\infty)^2$ di indice 4 e ordine nn' che nella $(2, 2)$ corrispondono alle rette di σ o σ' sono dei generi p o p' .

Le curve congiunte alle rette di σ o σ' sono dei generi p' o p

La curva congiunta ad una retta di σ o σ' e dell'ordine $n^2 N'$ o $n'^2 N$

9 Indicando con r_h le molteplicità dei punti fondamentali in σ per la $(2, 2)$, abbiamo

$$\sum r_h^2 = \sum (n' i_h)^2 + \sum j_{r'}''^2 = (n n')^2 - (n'^2 N + 2)$$

$$\sum r_h = \sum n i_h + \sum j_{r'}'' = n' (3n - \nu) + 2(p' - 2)$$

Se x è il numero dei punti doppi variabili delle Φ_a , avremo

$$\sum \frac{n' i_h (n i_h - 1)}{2} + \sum \frac{j_{r'}'' (j_{r'}'' - 1)}{2} + x = \frac{(nn' - 1)(nn' - 2)}{2} - p',$$

da cui

$$2x = n' (n' N - \nu)$$

Per i punti fondamentali delle congiunte occorre sapere quali punti di σ'' , fondamentali per (σ) o (σ') , sono di 1^a specie (*)

Torino, dicembre 1890

C. BURALI-FORTI.

(*) Mi limito a considerare queste sole proprietà delle $(2, 2)$ riservandomi di considerare le altre nella Nota riguardante le trasformazioni generali $(2, 2)$

Osserverò anche che trasformando mediante due trasformazioni Cremoniane σ_1 in σ'_1 , σ_2 in σ'_2 e facendo poi coincidere σ_1 e σ_2 con σ , σ'_1 e σ'_2 con σ' si ha pure una speciale trasformazione $(2,2)$ di σ in σ' , nella quale però ad una retta di σ o σ' corrisponde in σ' o σ una curva che si spezza in due curve razionali. Questa trasformazione speculare $(2,2)$ può essere impiegata, in certi casi, per trovare delle proprietà enumerative della trasformazione generale $(2,2)$