Neue Krümmungsmittelpunkt-Constructionen für Kegelschnitte.

Von **Eduard Janisch** in Bielitz.

Es sei

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

die Gleichung einer auf die Hauptaxen bezogenen Ellipse. Man hat dann bekanntlich für die Coordinaten des Mittelpunktes Ω des osculierenden Kreises im Punkte $P(x', y')$ der Ellipse die Werte:

$$X = + \frac{c^2}{a^4} x'^3, Y = - \frac{c^2}{b^4} y'^3, \text{ wo } c^2 = a^2 - b^2 \text{ ist.}$$

Wir stellen uns nun die Frage nach der Enveloppe der Inversen der über den Verbindungsstrecken der einzelnen Krümmungsmittelpunkte mit dem Mittelpunkte O der Ellipse als Durchmesser construierten Kreise für O als Inversionscentrum und für c^2 als Inversionspotenz.¹⁾

Wir haben als Gleichung eines solchen Kreises K :

$$x^2 + y^2 = xX + yY;$$

seiner Inversen kommt daher die Gleichung zu:

$$xX + yY = c^2,$$

oder

$$x \frac{x'^3}{a^4} - y \frac{y'^3}{b^4} = 1.$$

Differentieren wir die Gleichung, so kommt:

$$x \frac{x'^2}{a^4} - y \frac{y'^2}{b^4} \cdot \frac{dy'}{dx'} = 0.$$

¹⁾ Die Wahl von $-c^2$ als Inversionspotenz könnte ebensogut platzgreifen. Die Modificationen, welche hiedurch die nachstehenden Entwicklungen und die aus ihnen gezogenen Consequenzen erfahren, sind indessen so naheliegend, dass der Hinweis auf diesen Umstand genügt.

Hierin den Wert von

$$\frac{dy'}{dx'} = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'}$$

eingeführt, haben wir schließlich:

$$x \frac{x'}{a^2} + y \frac{y'}{b^2} = 0.$$

Diese Gleichung in Verbindung mit $x \frac{x'}{a^4} - y \frac{y'}{b^4} = 1$ liefert für x, y :

$$x = \frac{a^2}{x'}, y = -\frac{b^2}{y'}, \text{ da } \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \text{ ist.}$$

Die so erhaltenen Werte für x, y sind die Coordinaten des Berührungspunktes Π der Tangente $xX + yY = 1$ der gesuchten Enveloppe.

Wir wollen den Punkt Π und die Tangente $xX + yY = 1$ als zum Punkte $P(x', y')$ der Ellipse gehörig bezeichnen und erkennen nun sofort aus der Form der Ausdrücke für die Coordinaten von Π , dass die Abscisse x gleichkommt der Abscisse des Schnittpunktes der Hauptaxe der Ellipse und der an die Curve in P gezogenen Tangente, während die Ordinate y von Π bloß dem Zeichen nach verschieden ist von der Ordinate des Schnittpunktes jener Tangente mit der Nebenaxe. Hiernach ist die Construction des zu irgend einem Ellipsenpunkte P gehörigen Punktes Π evident. Beiläufig sei bemerkt, dass die Gerade $O\Pi$ offenbar zur Ellipsentangente in P parallel läuft.

Substituieren wir jetzt in die Gleichung $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$ für x', y' die sich ergebenden Werte in den x, y des Punktes Π , so finden wir die Gleichung des Ortes aller Punkte Π :

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = x^2 y^2.$$

Diese Punkte erfüllen demnach eine Curve $C^{(4)}$ vierter Ordnung. Gelingt es uns, eine einfache Tangentenconstruction für diese Curve zu finden, so haben wir damit augenscheinlich auch eine einfache Construction für die Krümmungsmittelpunkte der gegebenen Ellipse gewonnen. Denn die Senkrechte aus dem Mittelpunkte O der Ellipse auf irgend eine Tangente der $C^{(4)}$ geht der Definition der Curve zufolge stets durch den Mittelpunkt Ω des osculierenden Kreises im Ellipsenpunkte P , welcher dem Berührungspunkte Π jener Tangente der $C^{(4)}$ entspricht.

Solche Tangentenconstructionen ergeben sich aber unschwer, wenn man die $C^{(4)}$ darstellt als Projectioncurve des Schnittes zweier Flächen zweiter Ordnung.

Betrachten wir beispielsweise die beiden Flächen:

$$xy = az, \quad b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 z^2,$$

so sehen wir unmittelbar, dass die Projection ihrer Schnittecurve $\mathfrak{C}^{(4)}$ auf die xy -Ebene mit unserer Curve $C^{(4)}$ identisch ist, da das Resultat der Elimination von z aus den beiden Flächengleichungen mit der Gleichung der $C^{(4)}$ übereinstimmt.

Nun gehört die erste der beiden Flächengleichungen einem orthogonalen hyperbolischen Paraboloid an, dessen Richtebenen die xz - und die yz -Ebene sind, während die x - und die y -Axe der Fläche als Erzeugende angehören. Ist Π die Projection irgend eines Punktes $\mathfrak{P}$ des Paraboloides auf die xy -Ebene, so ist demnach die Verbindungslinie der Fußpunkte der von Π auf die x - und auf die y -Axe gefällten Perpendikel die Schnittlinie der xy -Ebene und der Tangentialebene der Fläche in $\mathfrak{P}$.

Die zweite der Flächengleichungen bestimmt einen Kegel zweiter Ordnung mit dem Ursprung O als Centrum. Der Kegel wird von der Ebene $z = b$ in einer Ellipse geschnitten, deren Projection auf die xy -Ebene mit der gegebenen Ellipse coincidiert. Demzufolge wird die Schnittlinie der xy -Ebene und der Tangentialebene in irgend einem Punkte $\mathfrak{P}$ des Kegels mit dem der Richtung $O\Pi$ conjugierten Diameter unserer Ellipse übereinstimmen, wenn Π wiederum die Projection von $\mathfrak{P}$ auf die xy -Ebene bedeutet.

Wenn also $\mathfrak{P}$ ein beiden Flächen gemeinsamer Punkt — ein Punkt der $\mathfrak{C}^{(4)}$ — ist, dann gehört Π der $C^{(4)}$ an und die Tangente in Π an die $C^{(4)}$ geht durch den Schnittpunkt des der Richtung $O\Pi$ conjugierten Durchmessers (d. i. OP) und der Verbindungslinie der senkrechten Projectionen von Π in die Axen der Ellipse.

Wir haben demnach die folgende Krümmungsmittelpunkt-Construction für einen Punkt P einer Ellipse:

„Man ziehe in P die Tangente t und die Normale n an die Ellipse, ferner durch den Mittelpunkt O eine Parallele zu t . Letztere bringe man in Π zum Schnitte mit der durch den Schnittpunkt der t und der Hauptaxe gezogenen Parallelen zur Nebenaxe. Hierauf verbinde man Π mit dem Schnittpunkte der OP und der rücksichtlich der Hauptaxe zur t symmetrischen Tangente der Ellipse. Es trifft alsdann die aus O auf jene Verbindungsgerade gefällte Senkrechte die Normale n im Krümmungsmittelpunkte Ω .“

In principiell gleicher Art können wir indessen noch eine zweite Methode zur Construction der Krümmungscentra ableiten. Schreiben wir nämlich die Gleichung der $C^{(4)}$ in der Form:

$$y^2(x^2 - a^2) = b^2 x^2$$

und setzen wir

$$yz = bx, \quad z^2 = x^2 - a^2,$$

so ist das Resultat der Elimination von z aus diesen beiden Gleichungen übereinstimmend mit der Gleichung der $C^{(4)}$, d. h. die $C^{(4)}$ darf aufgefasst werden als die Projection auf die xy -Ebene einer Raumcurve $\mathfrak{C}_1^{(4)}$, welche die Schnittlinie der beiden Flächen $yz = bx$ und $z^2 = x^2 - a^2$ ist.

Es gelingt nun wiederum leicht, den Schnittpunkt irgend einer Tangente der $\mathfrak{C}_1^{(4)}$ mit der xy -Ebene anzugeben, wenn die Projection Π des Berührungspunktes $\mathfrak{P}_1$ auf die xy -Ebene gegeben vorliegt. Damit ist dann auch die Tangente in Π an die $C^{(4)}$ bestimmt.

Wir erkennen zuvörderst in der ersten der beiden Flächen ein gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid, welches die y - und die z -Axe zu Erzeugenden und die xz -, sowie die xy -Ebene zu Richtebenen besitzt. Die Schnittlinie der xy -Ebene mit der Tangentialebene in einem Punkte $\mathfrak{P}_1$ der Fläche wird demnach gefunden als Parallele zu $O\Pi$ durch den Schnittpunkt der Ordinatenaxe mit der durch Π gelegten Parallelen zur Abscissenaxe, wenn Π die Projection von $\mathfrak{P}_1$ auf die xy -Ebene bedeutet.

Die zweite Fläche ist hingegen ein gleichseitiger hyperbolischer Cylinder, mit zur y -Axe parallelen Erzeugenden. Insbesondere sind die durch die Scheitel A, A_1 der großen Axe der Ellipse gehenden Parallelen zur y -Axe seine Scheitelerzeugenden und es ist die natürlich ebenfalls zur y -Axe parallele Schnittlinie der Tangentialebene im Punkte $\mathfrak{P}_1$ des Cylinders mit der xy -Ebene durch die Punkte A, A_1 harmonisch getrennt von der durch Π (der Projection von $\mathfrak{P}_1$ auf die xy -Ebene) zur y -Axe parallel geführten Geraden.

Ist jetzt $\mathfrak{P}_1$ ein gemeinsamer Punkt beider Flächen — ein Punkt der $\mathfrak{C}_1^{(4)}$, Π also ein Punkt der $C^{(4)}$, dann erhalten wir einen Punkt der Tangente in Π an die $C^{(4)}$ und zwar den Schnittpunkt der xy -Ebene mit der Tangente in $\mathfrak{P}_1$ an die $\mathfrak{C}_1^{(4)}$ und somit weiterhin den Krümmungsmittelpunkt Ω für den zu Π gehörigen Punkt P der Ellipse in folgender Art:

„Man ziehe durch die Projection des Punktes Π in die Nebenaxe der Ellipse die Parallele zur Tangente t und bringe diese Parallele zum Schnitte mit der durch den Ellipsenpunkt P zur Nebenaxe parallel geführten Geraden. Den Schnittpunkt verbinde man hierauf mit Π und fälle aus dem Mittelpunkt O der Ellipse die Senkrechte auf die Verbindungslinie; diese Senkrechte trifft dann die Normale n in Ω .“

Es unterliegt nicht der geringsten Schwierigkeit, eine vollständig analoge Discussion, ausgehend von der Form $x^2(y^2 - b^2) = a^2y^2$ der Gleichung der $C^{(4)}$, durchzuführen. Das Ergebnis überblickt man nach dem Vorangehenden ohneweiters; es wird lauten:

„Zieht man durch den zu P bezüglich der Hauptaxe symmetrischen Punkt der Ellipse zu

dieser Axe die Parallele und verbindet den Schnittpunkt der Parallelen und der Tangente t in P mit Π , so geht die Senkrechte aus dem Mittelpunkt O auf diese Verbindungslinie durch Ω .“

Beide Resultate lassen sich nun zu dem Satze verbinden:

Sind P', P'' zwei diametral gegenüberliegende Punkte einer Ellipse und ist P der rücksichtlich der Hauptaxe zu P' symmetrische Punkt der Curve, so geht die Senkrechte durch den Mittelpunkt O auf die Verbindungslinie des Schnittpunktpaares (t', PP'') , (t'', PP') — unter t', t'' die Tangenten in P' , resp. P'' verstanden — durch die Krümmungsmittelpunkte in P', P'' .“

Es bedarf wohl kaum der ausdrücklichen Bemerkung, dass die hier gefundenen Constructionen und der vorstehende Satz unverändert für die Hyperbel gelten. Zum Schlusse wollen wir unsere Betrachtungsweise aber auch auf die Parabel ausdehnen. Es steht zwar von vorneherein zu erwarten, dass für die Parabel keine den vorigen Constructionen analoge hiedurch gefunden werden, allein es ergeben sich anderweitige Resultate von einigem Interesse.

Nehmen wir den Krümmungsmittelpunkt für den Scheitel einer Parabel vom Parameter p zum Anfangspunkt O eines rechtwinkligen Coordinatensystems, die Axe der Parabel zur Abscissenaxe, so lautet die Gleichung der Curve: $y^2 = 2p(x + p)$. Für die Coordinaten X, Y des Krümmungsmittelpunktes Ω für den Punkt $P(x', y')$ der Parabel haben wir die Werte:

$$X = 3(x' + p), \quad Y = -\frac{y'^3}{b^2}.$$

Nach früherem stellt alsdann die Gerade

$$xX + yY = c^2$$

die Inverse des über der Verbindungsstrecke des Anfangspunktes O und des Krümmungsmittelpunktes Ω als Durchmesser beschriebenen Kreises

$$x^2 + y^2 = xX + yY$$

dar, wenn O das Inversionscentrum ist und c^2 die Inversionspotenz bedeutet.

Die Werte für X, Y eingeführt, haben wir daher als Gleichung jener Geraden

$$3(x' + p)x - \frac{y'^3}{p^2}y = c^2.$$

Dieselbe nach x' differentiiert gibt:

$$x - \frac{y'^2}{p^2} \frac{dy'}{dx'} y = 0$$

oder wegen $\frac{dy'}{dx'} = \frac{p}{y'}$,

$$p x - y' y = 0.$$

Dies ist die Gleichung einer zur Parabeltangente in (x', y') Parallelen durch den Ursprung O . Eliminieren wir nun aus den Gleichungen

$$3(x' + p)x - \frac{y'^3}{p^2}y = c^2, \quad px - y'y = 0 \quad \text{und} \quad y'^2 = 2p(x' + p)$$

x' und y' , so kommt als Gleichung der Einhüllenden der Geraden $xX + yY = c^2$:

$$y^2 = \frac{p x^3}{2 c^2}.$$

Diese Enveloppe ist also eine Neil'sche Parabel; sie wird identisch mit der Evolute $y^2 = \frac{8x^3}{27p}$ der gegebenen Parabel, wenn die Inversionspotenz $c^2 = \frac{27p^2}{16}$ gewählt wird.

Eine leichte Überlegung lässt uns schon die Richtigkeit des folgenden Satzes erkennen:

„Das Product der Entfernung irgend einer Tangente einer Neil'schen Parabel von der Spitze der Curve in die durch die Spitze gehende, zu jener Tangente normalen Sehne ist constant und zwar $= \frac{4q^2}{27}$, wenn $qy^2 = x^3$ die Gleichung der Neil'schen Parabel ist.“ —

Beachtung verdient die überaus einfache Beziehung zwischen den trigonometrischen Tangenten der Neigungswinkel gegen die Abscissenaxe der Normale im Punkte (x', y') und der Senkrechten zur zugehörigen Geraden $xX + yY = c^2 = \frac{27p^2}{16}$. Die Werte der bezüglichen trigonometrischen Tangenten sind:

$$-\frac{y'}{p} \quad \text{und} \quad \frac{Y}{X} = -\frac{y'^3}{3p^2(x' + p)} = -\frac{2y'}{3p}.$$

Letzterer Wert beträgt also gerade $\frac{2}{3}$ des ersteren. Da nun speciell die durch O gehende Senkrechte ($xY - yX = 0$) zur $xX + yY = c^2$ den Krümmungsmittelpunkt $\Omega(X, Y)$ enthält, so haben wir auf Grund des gefundenen Resultates die folgende Construction für Ω :

„Man projiciere P in die Axe der Parabel nach P_0 und verlängere die Subnormale $\overline{P_0N} = p$ um ihre halbe Länge über N hinaus bis P_1 und ziehe

durch den Krümmungsmittelpunkt O des Scheitels zur Geraden PP_1 die Parallele, deren Schnittpunkt mit der Normalen n des Punktes P schon den Punkt Ω ergibt.“

Denn es ist $\tan (PP_1, Ox) = \frac{2}{3} \tan (PN, Ox)$, wie unmittelbar ersichtlich.

Wenn man bedenkt, dass die Gerade $xX + yY = \frac{27p^2}{16}$ offenbar ebenfalls eine Normale der Parabel ist, so drängt sich die Frage auf nach dem zugehörigen Parabelpunkt $P' (x', y')$.

Die Gleichung der Normalen in P' lautet aber:

$$(x - x') y'' + (y - y') p = 0;$$

vergleichen wir diese Gleichung mit der dieselbe Gerade darstellenden Gleichung

$$xX + yY = 3(x' + p)x - \frac{y'^3}{p^2}y = \frac{27p^2}{16},$$

so ergibt sich zunächst durch Gleichsetzung der Richtungscoefficienten $-\frac{y''}{p} = \frac{3(x' + p)p^2}{y'^3} = \frac{3p}{2y'}$, demnach $y'' = -\frac{3p^2}{2y'}$, und daraus $x'' + p = \frac{y''^2}{2p} = \frac{9p^2}{16(x' + p)}$.

Für solche Punkte P', P'' ist also das Product der Ordinaten $-y'y''$ — sowohl, als auch das Product der vom Parabelscheiden aus gemessenen Abscissen $-(x' + p)(x'' + p) = \text{constant}$. Alle diese Punktpaare bilden daher eine Involution und man wird leicht nachweisen, dass die Verbindungslinien der Punkte sämtlicher Paare durch jenen Punkt der Parabelaxe gehen, welcher vom Scheitel die Entfernung $\frac{3}{4}p$ besitzt. Wegen $\frac{p}{y''} = -\frac{2y'}{3p} = \frac{Y}{X}$ gilt nun der Satz:

„Sind P, P' zwei Punkte einer Parabel $y^2 = 2px$ und geht die Verbindungslinie PP' durch den Punkt $(\frac{3}{4}p, 0)$, so liegt der Krümmungsmittelpunkt von $\left. \begin{matrix} P \\ P' \end{matrix} \right\}$ auf der durch den Krümmungsmittelpunkt des Scheitels gehenden Parallelen zur Tangente in $\left. \begin{matrix} P \\ P' \end{matrix} \right\}$.“