LE TRASFORMAZIONI DELLE SUPERFICIE PER CONFIGURAZIONI INVARIABILI.

Memoria di **Pietro Tortorici** (Palermo) ¹⁾.

Adunanza del 27 novembre 1921.

Se fra due superficie S, S' può porsi una corrispondenza biunivoca di punto a punto tale che la configurazione costituita da due punti corrispondenti P, P' e dai piani π, π' , tangenti rispettivamente alle superficie in tali punti rimanga invariabile al variare della coppia di punti corrispondenti, diremo che le due superficie *sono vincolate o sono trasformate una dell'altra per configurazioni invariabili*.

Evidentemente se fra due superficie esiste un tale vincolo risultano pure trasformate per configurazioni invariabili due altre superficie ad esse rispettivamente parallele e del resto arbitrarie; nella ricerca dunque di tutte le coppie di superficie godenti della proprietà indicata è lecito sostituire a ciascuna di esse una superficie parallela.

DARBOUX, che appunto si è occupato di tale ricerca ²⁾, è pervenuto al seguente risultato:

Se due superficie sono vincolate per configurazioni invariabili e non sono parallele esse sono parallele rispettivamente o a due superficie a curvatura totale costante ed uguale o a due superficie d'area minima.

Il caso delle superficie a curvatura totale costante è ben noto; per le trasformazioni delle superficie d'area minima il BIANCHI ha poi dato le effettive formule di trasformazione dimostrandole per verifica ³⁾.

¹⁾ Estratto dalla tesi di abilitazione all'insegnamento presentata alla R. Scuola Normale Superiore di Pisa (aprile 1920).

²⁾ Cfr. G. DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces* t. III (Gauthier-Villars et fils, Paris 1894), p. 441.

³⁾ Cfr. L. BIANCHI, *Sulle trasformazioni di DARBOUX delle superficie di area minima* [Atti del IV^o Congresso Internazionale dei Matematici, Vol. II (Sez. II, Geometria), (Roma, Tipografia della R. Accademia dei Lincei, 1909)], pag. 264.

Scopo principale della presente ricerca è di ritrovare direttamente tali formule e studiare particolarmente le trasformazioni delle superficie minime alle quali danno luogo; il problema però è qui ripreso dal principio con un metodo nuovo e sono messi in luce altri casi di trasformazione taciuti dal DARBOUX i quali, benchè siano semplici e meno importanti di quelli citati, sono pure abbastanza interessanti.

La ricerca è divisa in due capitoli: nel primo sono esaminati tutti i possibili casi di trasformazione, nel secondo sono studiate le trasformazioni delle superficie d'area minima.

CAPITOLO I.

Le condizioni di trasformabilità ed i casi possibili di trasformazione.

1. Le due superficie S , S' , luogo rispettivamente dei punti $P \equiv (x, y, z)$, $P' \equiv (x', y', z')$, siano vincolate per configurazioni invariabili.

Siano le $x, y, z; x', y', z'$ funzioni, al solito, di due variabili indipendenti u, v e indichiamo per la superficie S con

$$X_1, Y_1, Z_1; \quad X_2, Y_2, Z_2; \quad X_3, Y_3, Z_3$$

i coseni direttori rispettivamente della tangente alla linea secondo cui v è costante, della tangente alla linea secondo cui u è costante e della normale alla superficie. Notazioni analoghe munite di apici valgono per la superficie S' .

Essendo $\cos \gamma, \cos \beta, \cos \beta'$; t quattro costanti, esprimiamo analiticamente il vincolo per configurazioni invariabili mediante le quattro relazioni:

$$(1) \quad \begin{cases} S(x' - x)^2 = t^2, \\ S(x' - x)X_3 = t \cos \beta, & S(x' - x)X'_3 = t \cos \beta', \\ SX_3X'_3 = \cos \gamma. \end{cases}$$

Indicando ora con k una costante e con $\varphi = \varphi(u, v)$ una funzione da determinare, si soddisfa a tali relazioni ponendo:

$$(2) \quad x' = x + t(X_1 \sin \beta \cos \varphi + X_2 \sin \beta \sin \varphi + X_3 \cos \beta)$$

$$(3) \quad X'_3 = X_1 \sin \gamma \cos (\varphi + k) + X_2 \sin \gamma \sin (\varphi + k) + X_3 \cos \gamma$$

e analoghe per $y', z'; Y'_3, Z'_3$.

Con ciò resta stabilito anche il legame:

$$(4) \quad \cos \beta' = \sin \beta \sin \gamma \cos k + \cos \beta \cos \gamma.$$

A sistema coordinato u, v sulle superficie S si assuma quello delle linee di curvatura; allora se

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2$$

è il quadrato dell'elemento lineare di S , detti r_1 ed r_2 i raggi principali di curvatura nel punto generico P , derivando le (2), tenute presenti formule ben note che per brevità non riportiamo, si ottengono le relazioni:

$$(5) \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{t} \frac{\partial x'}{\partial u} &= X_1 \left[\frac{\sqrt{E}}{t} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right) \sin \beta \sin \varphi + \frac{\sqrt{E}}{r_2} \cos \beta \right] \\ &\quad + X_2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right) \sin \beta \cos \varphi - X_3 \frac{\sqrt{E}}{r_2} \sin \beta \cos \varphi, \\ \frac{1}{t} \frac{\partial x'}{\partial v} &= X_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right) \sin \beta \sin \gamma \\ &\quad + X_2 \left[\frac{\sqrt{G}}{t} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right) \sin \beta \cos \varphi + \frac{\sqrt{G}}{r_1} \cos \beta \right] - X_3 \frac{\sqrt{G}}{r_1} \sin \beta \sin \varphi. \end{aligned} \right.$$

Per esprimere che la superficie S' , luogo del punto $P' \equiv (x', y', z')$, ha per coseni direttori della normale in P' le X'_3 , Y'_3 , Z'_3 imponiamo le due condizioni:

$$S X'_3 \frac{\partial x'}{\partial u} = 0, \quad S X'_3 \frac{\partial x'}{\partial v} = 0$$

le quali, per le precedenti, scrivonsi:

$$(6) \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right) \sin \beta \sin \gamma \sin k \\ &= \frac{\sqrt{E}}{r_2} [\sin \beta \cos \gamma \cos \varphi - \cos \beta \sin \gamma \cos (\varphi + k)] - \frac{\sqrt{E}}{t} \sin \gamma \cos (\varphi + k), \\ &\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right) \sin \beta \sin \gamma \sin k \\ &= \frac{\sqrt{G}}{r_1} [\sin \beta \cos \gamma \sin \varphi - \cos \beta \sin \gamma \sin (\varphi + k)] - \frac{\sqrt{G}}{t} \sin \gamma \sin (\varphi + k) \end{aligned} \right.$$

e costituiscono un sistema differenziale per la funzione incognita φ .

Le condizioni di integrabilità di tale sistema differenziale, in ordine e formule assai note della Geometria Infinitesimale e che non riportiamo nemmeno, scrivonsi:

$$(7) \left\{ \begin{aligned} &t^2 (\sin^2 \beta \sin^2 \gamma \sin^2 k + \sin^2 \beta \cos^2 \gamma + \cos^2 \beta \sin^2 \gamma - 2 \sin \beta \cos \beta \sin \gamma \cos \gamma \cos k) \frac{1}{r_1 r_2} \\ &\quad + t \sin \gamma (\cos \beta \sin \gamma - \sin \beta \cos \gamma \cos k) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) + \sin^2 \gamma = 0. \end{aligned} \right.$$

Tale relazione esprime il teorema:

Perchè una superficie S sia trasformabile per configurazioni invariabili è necessario e sufficiente che le sue due curvature totale e media siano vincolate da una relazione lineare.

Se ponesi:

$$(8) \quad \begin{cases} \cos \gamma = c, & \cos \beta = b, & \cos \beta' = b', \\ \frac{1}{r_1 r_2} = K, & \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = H, \end{cases}$$

la precedente relazione (7) scrivesi sotto la forma equivalente di DARBOUX:

$$(9) \quad (1 - b'^2)t^2 K + (b - b'c)tH + (1 - c^2) = 0.$$

Per ragioni di simmetria, la curvatura totale K' e la curvatura media H' di S' saranno vincolate dalla relazione analoga:

$$(10) \quad (1 - b^2)t^2 K' + (b' - bc)tH' + (1 - c^2) = 0.$$

Esaminiamo ora i vari casi che possono presentarsi cominciando dai più semplici.

2. Se la relazione (9) è soddisfatta identicamente, se cioè si ha:

$$c = \pm 1, \quad b' = \pm b = \pm 1$$

identica è pure la (10) e la retta PP' congiungente due punti corrispondenti delle superficie S, S' è una loro normale comune: esse risultano quindi parallele.

Intendiamo escluso questo caso evidente di trasformazione.

3. Se la superficie S è una sviluppabile cioè se $K = 0$ e nel medesimo tempo si ha:

$$1 - c^2 = 0, \quad c = \pm 1,$$

la (9) dà:

$$b = \pm b'$$

e la (10) fornisce:

$$K' = 0,$$

cioè: *Anche la superficie S' è sviluppabile.*

Allora, essendo in questo caso:

$$\sin \gamma = 0$$

dalla (3) risulta:

$$(11) \quad X_3 = X'_3$$

e le (6) diventano:

$$\frac{\sqrt{E}}{r_2} \sin \beta \cos \varphi = 0$$

$$\frac{\sqrt{G}}{r_1} \sin \beta \sin \varphi = 0$$

onde, posto $\frac{1}{r_2} = 0$, deducesi $\varphi = 0$ e perciò le (2) danno:

$$x' = x + t(X_1 \sin \beta + X_3 \cos \beta)$$

con le analoghe circolando.

La (II) dimostra intanto che in due punti corrispondenti i piani tangenti a S , S' (osculatori ai rispettivi spigoli di regresso C_0 , C'_0) sono paralleli e ciò esprime che:

Lo spigolo di regresso C'_0 della sviluppabile S' è una curva trasformata di COMBES-SCURE dello spigolo di regresso C_0 della sviluppabile S .

Le equazioni della curva C'_0 si trovano immediatamente.

Usiamo le notazioni solite ⁴⁾ apponendo l'indice zero agli elementi di C_0 , l'indice zero e l'apice a quelli di C'_0 . Se gli elementi di C_0 sono espressi in funzione del suo arco s_0 e se u_0 è un parametro, pel punto generico $P \equiv (x, y, z)$ di S può porsi:

$$x = x_0 + u_0 \alpha_0$$

e analoghe, onde per quello $P' \equiv (x', y', z')$ di S' si ha:

$$x' = x_0 + u_0 \alpha_0 + t(X_1 \sin \beta + X_3 \cos \beta) = x_0 + u_0 \alpha_0 + t(\alpha_0 \sin \beta + \lambda_0 \cos \beta)$$

e da questa traesi subito per lo spigolo di regresso C'_0 :

$$x'_0 = x_0 + t\left(\lambda_0 - \frac{\rho_0}{T_0} \alpha_0\right) \cos \beta = x_0 + h\left(\lambda_0 - \frac{\rho_0}{T_0} \alpha_0\right) \quad (h \text{ costante})$$

con le analoghe e tali relazioni segnalano che:

La curva C'_0 è tracciata sulla sviluppabile rettificante di C_0 .

La relazione fra C_0 e C'_0 essendo involutoria vale la cosa inversa: in altre parole C'_0 è pure una geodetica sulla sviluppabile rettificante di C_0 .

Le circostanze geometriche di questo caso in esame restano fissate completamente dal seguente teorema:

Se sopra una sviluppabile $\bar{S}$ si assumono due geodetiche C_0 , C'_0 vincolate da una trasformazione di COMBES-SCURE, le due sviluppabili S , S' aderenti a C_0 , C'_0 possono riferire punto a punto, ed in una semplice infinità di modi, in modo che risultino vincolate per configurazioni invariabili.

Intanto l'ipotesi che le due geodetiche siano vincolate da una trasformazione di COMBES-SCURE porta che la distanza dei loro piani osculatori in punti situati sopra una medesima generatrice di $\bar{S}$ è costante.

Poichè infatti le due geodetiche C_0 , C'_0 sono ugualmente inclinate sulle generatrici di $\bar{S}$, detto σ tale angolo di inclinazione e ritenendo le notazioni solite per lo spigolo di regresso $\bar{C}$ di $\bar{S}$, luogo del punto $\bar{P} \equiv (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$; per le coordinate dei punti

⁴⁾ Cfr. L. BIANCHI, *Lezioni di Geometria differenziale* (2^a edizione) Vol. I, Cap. I (Pisa, Spoerri, 1902).

$P_o \equiv (x_o, y_o, z_o)$, $P'_o \equiv (x'_o, y'_o, z'_o)$ di C_o , C'_o si ha com'è noto:

$$x_o = \bar{x} + t_o \bar{\alpha}, \quad t_o = \frac{1}{\sin \sigma} \left[c_o - \int \sin \sigma d\bar{s} \right]; \quad (c_o \text{ costante})$$

$$x'_o = \bar{x} + t'_o \bar{\alpha}, \quad t'_o = \frac{1}{\sin \sigma} \left[c'_o - \int \sin \sigma d\bar{s} \right], \quad (c'_o \text{ costante})$$

e le analoghe, $\bar{s}$ essendo l'arco di $\bar{C}$.

Allora, per il tratto τ di generatrice di $\bar{S}$ intercetto fra C_o e C'_o , traesi:

$$\tau = \frac{c_o - c'_o}{\sin \sigma} = \frac{b}{\sin \sigma}, \quad (b \text{ costante})$$

e la distanza dei piani osculatori risulta appunto b .

È subito visto che può scriversi:

$$x'_o = x_o + \tau \bar{\alpha} = x_o + b \left(\lambda_o - \frac{p_o}{T_o} \alpha_o \right).$$

Osservando infine che due generatrici corrispondenti di S , S' sono parallele, presi su esse in modo arbitrario i punti $P \equiv (x, y, z)$, $P' \equiv (x', y', z')$, detta t la loro distanza, pongasi:

$$\frac{b}{t} = \cos \beta, \quad (\cos \beta \text{ costante})$$

e si stabilisca fra i punti di S e S' la corrispondenza data dalle formule:

$$x' = x + t(\alpha_o \sin \beta + \lambda_o \cos \beta) = x + t(X_1 \sin \beta + X_3 \cos \beta)$$

e analoghe le quali dimostrano appunto completamente il teorema enunciato.

4. Supponendo ora che la (9) non sia identica poniamo:

$$K = 0, \quad \frac{1}{r_2} = 0$$

talmente che essa scrivesi:

$$-t(b - b'c) \frac{1}{r_1} = 1 - c^2$$

e mostra che la superficie S è un cilindro circolare retto.

Essendo $1 - c^2 \neq 0$, alla superficie S' possiamo sostituire la superficie parallela per la quale risulti:

$$b' = bc$$

ossia:

$$\cos \beta' = \cos \beta \cos \gamma.$$

Allora per la (4) deve essere:

$$\cos k = 0, \quad \sin k = 1$$

e la (10) dà:

$$K' = - \frac{1 - c^2}{(1 - b^2)t^2} = - \frac{\operatorname{sen}^2 \gamma}{t^2 \operatorname{sen}^2 \beta}$$

e si riconosce così la possibilità di vincolare per configurazioni invariabili una superficie a curvatura nulla con una a curvatura totale costante.

Verifichiamo la cosa per mezzo delle formule generali.

Assumiamo per asse delle z l'asse del cilindro, per linee v costante le generatrici, per u costante le sue sezioni rette.

Detto ρ il raggio del cilindro contato positivamente dall'asse verso la superficie, θ una variabile poniamo:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta, \\ y &= \rho \operatorname{sen} \theta, & \left(\theta = \frac{v}{\rho} \right), \\ z &= u. \end{aligned}$$

Si ha:

$$E = G = 1$$

e, se per direzione positiva della tangente alle linee u costante prendesi quella degli archi crescenti positivamente, bisognerà porre:

$$\begin{aligned} X_1 &= 0, & Y_1 &= 0, & Z_1 &= 1, \\ X_2 &= -\operatorname{sen} \theta, & Y_2 &= \cos \theta, & Z_2 &= 0, \\ X_3 &= -\cos \theta, & Y_3 &= -\operatorname{sen} \theta, & Z_3 &= 0. \end{aligned}$$

Allora, conformemente a convenzioni fondamentali, bisognerà ritenere:

$$\rho = -r_1 = t \cos \beta$$

e le (2), eseguita ogni riduzione, danno:

$$(12) \quad \begin{cases} x' = -t \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi, \\ y' = t \operatorname{sen} \beta \cos \theta \operatorname{sen} \varphi, \\ z' = u + t \operatorname{sen} \beta \cos \varphi, \end{cases}$$

la funzione $\varphi(u, v)$ soddisfacendo alle equazioni differenziali:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial u} &= \frac{1}{t \operatorname{sen} \beta} \operatorname{sen} \varphi, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} &= - \frac{1}{t \cos \beta} \cotg \gamma \operatorname{sen} \varphi \end{aligned}$$

alle quali appunto riduconsi le (6).

Tenute presenti le precedenti formule, per l'elemento lineare ds' di S' trovasi

l'espressione:

$$ds'^2 = \cos^2 \varphi du^2 + \frac{\operatorname{tg}^2 \beta}{\operatorname{sen}^2 \gamma} \operatorname{sen}^2 \varphi dv^2$$

e pei coefficienti D_1 , D'_1 , D''_1 della sua seconda forma fondamentale trovasi:

$$D_1 = -\frac{\operatorname{sen} \gamma}{t \operatorname{sen} \beta} \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi,$$

$$D'_1 = 0,$$

$$D''_1 = \frac{\operatorname{sen} \beta}{t \cos^2 \beta \operatorname{sen} \gamma} \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi$$

onde, per la curvatura totale K' di S' , ottienesi ancora:

$$K' = -\frac{\operatorname{sen}^2 \gamma}{t^2 \operatorname{sen}^2 \beta}.$$

Introducendo la variabile θ , poichè $v = \rho \theta$ e $\rho = -t \cos \beta$ si ha:

$$ds'^2 = \cos^2 \varphi du^2 + t^2 \frac{\operatorname{sen}^2 \beta}{\operatorname{sen}^2 \gamma} \operatorname{sen}^2 \varphi d\theta^2$$

e le equazioni alle quali soddisfa la funzione $\varphi(u, v)$ si scrivono:

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{1}{t \operatorname{sen} \beta} \operatorname{sen} \varphi, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{\cos \gamma}{\operatorname{sen} \gamma} \operatorname{sen} \varphi. \end{cases}$$

Ora si può, senza restrizione, ritenere:

$$|K'| = 1$$

cioè

$$(14) \quad \left| \frac{\operatorname{sen}^2 \gamma}{t^2 \operatorname{sen}^2 \beta} \right| = 1.$$

Allora è:

$$ds'^2 = \cos^2 \varphi du^2 + \operatorname{sen}^2 \varphi d\theta^2$$

$$\rho^2 = t^2 \cos^2 \beta = \frac{\cos^2 \beta \operatorname{sen}^2 \gamma}{\cos^2 \beta}.$$

Si vede subito che:

Le linee u , θ sono, sulla superficie S' , le linee di curvatura.

Tanto risulta direttamente dal fatto che si ha:

$$F' = 0, \quad D'_1 = 0$$

ed anche dalla osservazione immediata che la funzione φ soddisfa, in forza di (13), (14),

alla equazione:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - \varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} = \sin \varphi \cos \varphi \left\{ \frac{1}{t^2 \sin^2 \beta} - \varepsilon \frac{\cos^2 \gamma}{\sin^2 \gamma} \right\}. \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

Se $\varepsilon = +1$ questa scrivesi:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = \sin \varphi \cos \varphi$$

e si ha:

$$ds'^2 = \cos^2 \varphi du^2 + \sin^2 \varphi d\theta^2$$

mentre che, se $\varepsilon = -1$, ponendo (per maggior chiarezza) $\varphi = i\lambda$ si ha:

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \theta^2} = -\operatorname{sh} \lambda \operatorname{ch} \lambda$$

e:

$$ds'^2 = \operatorname{ch}^2 \lambda du^2 + \operatorname{sh}^2 \lambda d\theta^2$$

delle quali espressioni è ben noto il significato dalla teoria delle superficie a curvatura costante ⁵⁾.

Riassumendo adunque: assunto un cilindro circolare retto di raggio ρ avente l'asse coincidente con l'asse delle χ pongasi:

$$\rho^2 = bt^2 = t^2 \cos^2 \beta$$

e, preso arbitrariamente t , si determini b e quindi $\sin^2 \beta$, indi $\sin^2 \gamma$ da (14): per ogni soluzione φ delle equazioni (13) le formule (12) definiscono una superficie S' a curvatura costante $K = \pm 1$ sulla quale le linee u, v sono le linee di curvatura e vincolata per configurazioni invariabili al cilindro S di partenza.

Si scriverà:

$$S' \equiv S.C_i$$

indicando simbolicamente con C_i la trasformazione.

Siccome φ contiene una costante arbitraria risulta:

Ogni cilindro circolare retto ammette una semplice infinità di superficie S' a curvatura totale costante contigue per trasformazione C_i .

5. Fermiamoci al caso in cui sia $\varepsilon = +1$, cioè $K' = -1$ e consideriamo insieme la prima e la terza forma quadratica fondamentale della superficie trasformata S' :

$$ds'^2 = E' du^2 + G' d\theta^2 = \cos^2 \varphi du^2 + \sin^2 \varphi d\theta^2,$$

$$ds''^2 = e' du^2 + g' d\theta^2 = \sin^2 \varphi du^2 + \cos^2 \varphi d\theta^2.$$

⁵⁾ Cfr. L. BIANCHI, loc. cit. ⁴⁾, Vol. II, Cap. XXI,

Tenuto conto delle equazioni alle quali soddisfa la funzione $\varphi(u, \theta)$ si ha

$$(15) \quad \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{e'g'}} \frac{\partial \sqrt{g'}}{\partial u} = -\frac{1}{t \operatorname{sen} \beta} \operatorname{tg} \varphi, \\ \frac{1}{\sqrt{e'g'}} \frac{\partial \sqrt{e'}}{\partial \theta} = \operatorname{cotg} \gamma \end{cases}$$

e l'ultima di queste relazioni mostra che:

Sulla superficie S' le linee di curvatura lungo le quali θ è costante sono linee piane.

In ordine a teoremi noti si deduce allora:

Ogni superficie S' è una superficie di ENNEPER e conseguentemente anche una superficie della classe di JOACHIMSTHAL.

Le linee di curvatura lungo le quali la u è costante sono allora sferiche; d'altra parte essendo:

$$\frac{1}{\sqrt{E'G'}} \frac{\partial \sqrt{G'}}{\partial u} = \frac{1}{t \operatorname{sen} \beta}$$

è costante il raggio della sfera sulla quale è tracciata una qualunque di tali linee ed inoltre, sempre in forza della seconda delle (15), è costante l'angolo ψ di inclinazione del piano di una linea θ sulla superficie poichè appunto si ha:

$$\operatorname{cot} \psi = \frac{1}{\sqrt{e'g'}} \frac{\partial \sqrt{e'}}{\partial \theta} = \operatorname{cot} \gamma.$$

La trasformazione è poi evidentemente reale e ricordando teoremi noti si deduce:

Le superficie S' sono elicoidi pseudosferiche del DINI.

Aggiungiamo che, sempre restando nell'ipotesi $\varepsilon = +1$, φ è reale e se si vuole che anche le linee u di curvatura siano piane basterà scrivere che la funzione φ dipende solo da u cioè:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0, \quad \cos \gamma = 0.$$

In tali condizioni, per la curvatura geodetica di tali linee si ottiene:

$$\frac{1}{\rho'_u} = -\frac{1}{\operatorname{sen} \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial u} = -\frac{1}{t \operatorname{sen} \beta}$$

ciò che conferma ancora che esse sono sferiche e perciò sono circolari.

Si dimostra allora facilmente che la superficie S' è l'ordinaria pseudosfera e la curva trattatrice meridiana ha per asintoto l'asse del cilindro S ; questa considerazione può poi servire a provare, ove non si deducesse già direttamente, che in ogni caso l'asse del cilindro S è l'asse della superficie elicoidale S' .

Come si debba stabilire la corrispondenza biunivoca di punto a punto quando

siano dati un cilindro S ed un elicoide del DINI coassiale è cosa geometricamente quasi evidente; anzi la osservazione diretta di tale circostanza geometrica ci ha indotti ad esporre questo facile studio.

Infine se $\varepsilon = -1$ è $K' = +1$; a causa del legame (14) fra le costanti t , $\sin \beta$, $\sin \gamma$ la trasformazione è necessariamente immaginaria. La superficie S' è una deformata della sfera e la configurazione (S, S') è analoga alla precedente.

Si osservi ancora che, quando si restringa indefinitamente il cilindro, fino a ridurlo al suo asse, le configurazioni esaminate riduconsi in sostanza a quelle studiate dal BIANCHI per le superficie a curvatura totale positiva o negativa, ma mentre nella trattazione del BIANCHI dette configurazioni si ottengono come casi limiti delle trasformazioni B_σ delle superficie di ugual curvatura qui sono presentate come casi limiti della trasformazione di una superficie a curvatura nulla in una a curvatura costante ⁶⁾.

6. Tornando alle relazioni (9), (10), se si ha ad un tempo:

$$K = 0, \quad K' = 0, \quad 1 - c^2 \neq 0,$$

esse riduconsi alle seguenti:

$$\frac{1}{r_2}(b - b'c)t + (1 - c^2) = 0,$$

$$\frac{1}{r'_2}(b' - bc)t + (1 - c^2) = 0$$

ed S, S' sono quindi due cilindri circolari retti.

Facilmente dimostrasi che essi sono paralleli; fissati i raggi r_2, r'_2 si hanno due relazioni fra le quattro costanti b, b', c, t e da qui risulta, come geometricamente è evidente, che fra S, S' la corrispondenza per configurazioni invariabili può stabilirsi in una doppia infinità di modi.

7. Supponiamo ora che essendo

$$K \neq 0, \quad K' \neq 0,$$

sia:

$$1 - c^2 \neq 0$$

e che ancora le normali a S, S' in punti corrispondenti non siano complanari.

Allora alle superficie S, S' possonsi sostituire le superficie parallele, che continuiamo a chiamare S, S' e per le quali le relazioni (9) e (10) sono prive dei secondi termini ciò che equivale a porre:

$$b = b' = 0.$$

⁶⁾ Cfr. L. BIANCHI, loc. cit. 4), Vol. II, §§ 334, 387, 406.

In altre parole le superficie S, S' vengono sostituite dalle superficie rispettivamente parallele per i piedi della minima distanza fra due normali sgembe corrispondenti.

In tali condizioni risulta:

$$K = K' = - \frac{1 - c^2}{t^2}$$

cioè le superficie S, S' hanno la medesima curvatura totale costante.

È il caso classico delle trasformazioni di BÄCKLUND e dalle relazioni del n° 1 potrebbero facilmente dedursi le effettive formule di trasformazione.

8. Facciamo ora l'ipotesi che essendo sempre

$$K \neq 0, \quad K' \neq 0; \quad 1 - c^2 \neq 0$$

le normali alle superficie S, S' in due punti corrispondenti siano complanari; allora fra le costanti b, b', c passa la relazione:

$$1 - b^2 - b'^2 - c^2 = 2bb'c$$

che può anche scriversi:

$$(16) \quad (1 - c^2)(1 - b'^2) = (b - b'c)^2.$$

Detti r_1, r_2 ancora i raggi principali di curvatura delle superficie S la (9) può scriversi:

$$r_2[t(b - b'c) + (1 - c^2)r_1] + [t(b - b'c)r_1 + (1 - b'^2)t^2] = 0$$

e ponendo:

$$\frac{1 - c^2}{t(b - b'c)} = \frac{t(b - b'c)}{t^2(1 - b'^2)} = \frac{1}{\alpha} \quad (\alpha \text{ costante})$$

si ha:

$$r_2 \left(1 + \frac{r_1}{\alpha} \right) + (r_1 + \alpha) = 0$$

ossia:

$$(r_1 + \alpha)(r_2 + \alpha) = 0$$

onde se non è $r_1 = -\alpha$, è $r_2 = -\alpha$. Quindi:

La superficie S è necessariamente canale.

Peraltro la relazione (16) trae seco l'altra:

$$(17) \quad (1 - c^2)(1 - b^2) = (b' - bc)^2$$

onde facilmente concludesi che S' è pure una superficie canale avente con S l'asse in comune.

I raggi principali di curvatura costante ρ e ρ' sono rispettivamente per le due superficie dati dalle espressioni:

$$\rho = \frac{t(b - b'c)}{1 - c^2}, \quad \rho' = \frac{t(b' - bc)}{1 - c^2};$$

le due superficie sono bensì parallele ma la corrispondenza fra i loro punti non è necessariamente quella stabilita dalle loro normali comuni.

9. Infine se

$$K \neq 0, \quad K' = 0, \quad 1 - c^2 \neq 0,$$

le (9), (10) possono scrivere:

$$(1 - b'^2)t^2 + t(b - b'c)(r_1 + r_2) = 0$$

$$(1 - b^2)t^2 + t(b' - bc)(r'_1 + r'_2) = 0$$

e mostrano che le due superficie S , S' hanno costante la somma dei raggi principali di curvatura. Sostituendo ad esse le superficie d'area minima loro rispettivamente parallele, poichè le precedenti relazioni non devono avere nulli i coefficienti, dovrà aversi:

$$c = \pm 1, \quad b'^2 = 1, \quad b^2 = 1, \quad |b| = |b'c|$$

onde:

$$b = -b'c.$$

Lo studio accurato di questo interessante caso sarà fatto nel Cap. II, prima però di occuparcene vogliamo ancora fare qualche osservazione sulle trasformazioni in esame.

10. Poichè fra due sviluppabili (cfr. n° 3) la trasformazione per configurazioni invariabili può porsi in una semplice infinità di modi e fra due cilindri circolari retti coassiali in una doppia infinità di modi, ci si può proporre di decidere, in generale, quando fra due superficie S , S' il vincolo per configurazioni invariabili possa stabilirsi in più di un modo senza cambiare però la posizione relativa delle due superficie.

Una ricerca in tal senso porta al seguente risultato: le due superficie S , S' possono essere o due sfere concentriche, o due superficie sviluppabili quali quelle esaminate al n° 3, o due superficie canali coassiali; nel primo caso il vincolo per configurazioni invariabili può porsi in due modi soltanto; nel secondo e terzo in una semplice infinità di modi.

Nel caso particolare che le due superficie canali siano anche sviluppabili la corrispondenza può stabilirsi, come è stato già detto, in una doppia infinità di modi.

11. Infine se ci proponessimo di ricercare le superficie che possano restare in loro medesime per configurazioni invariabili, pensando una tale superficie come costituita da due superficie uguali sovrapposte e sostituendo ad una di esse una superficie parallela, facilmente perverremmo al risultato seguente: una superficie S che possa rimanere in sè medesima per configurazioni invariabili è necessariamente o una sfera o una sviluppabile o una superficie canale.

Se la superficie è sferica la corrispondenza che la lascia in sè medesima può porsi solo in un modo facendo corrispondere ad ogni punto quello diametralmente opposto; se è sviluppabile la corrispondenza può porsi in una semplice infinità di modi potendo ad un punto qualunque della superficie farne corrispondere un altro purchè della me-

desima generatrice; infine se la superficie è canale la corrispondenza può ancora stabilirsi in una semplice infinità di modi potendo far corrispondere due punti qualunque della superficie purchè appartenenti ad una medesima sezione piana normale all'asse.

Soltanto nel caso di un cilindro circolare retto (superficie canale e sviluppabile) la corrispondenza può porsi in una doppia infinità di modi.

CAPITOLO II.

Le trasformazioni di DARBOUX delle superficie d'area minima.

12. Esaminiamo ora il caso accennato al n° 9 del Capitolo precedente.

In questo caso è:

$$c = \pm 1, \quad b'^2 = b^2 = 1, \quad b' = -b'c,$$

onde i possibili valori simultanei per le costanti c , b , b' sono dati dai seguenti quattro casi:

$$\alpha) \quad c = 1, \quad b = -1, \quad b' = 1,$$

$$\beta) \quad c = 1, \quad b = 1, \quad b' = -1,$$

$$\gamma) \quad c = -1, \quad b = 1, \quad b' = 1,$$

$$\delta) \quad c = -1, \quad b = -1, \quad b' = -1.$$

Se però si ha riguardo alle condizioni (1) di invariabilità della configurazione si vede che tali quattro casi riconduconsi uno all'altro cambiando eventualmente la direzione positiva della normale di S' o di quella di S o di ambedue le superficie. Ci limiteremo pertanto a considerare il caso α).

Per avere le effettive formule di trasformazione in questo caso non ci serviremo delle relazioni stabilite al n° 1 ma useremo un procedimento diretto assai semplice, perchè le relazioni (6), (7) dovendo essere necessariamente:

$$\text{sen } \gamma = 0, \quad \text{sen } \beta = 0,$$

anche supponendo che le costanti γ , β , k , t siano complesse, diventano identiche e per la funzione incognita φ non potremmo trarre da esse le equazioni differenziali che ci necessitano.

Abbiamo già osservato che la superficie S è una superficie d'area minima, riferendola alle sue linee di curvatura u , v il suo elemento lineare ha l'espressione:

$$ds^2 = e^{2\theta}(du^2 + dv^2),$$

$\theta = \theta(u, v)$ essendo un integrale della equazione di LIOUVILLE:

$$(18) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = e^{-2\theta},$$

Si hanno allora le formule:

$$(19) \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u} = e^{\theta} X_1, & \frac{\partial x}{\partial v} = e^{\theta} X_2, \\ \frac{\partial X_1}{\partial u} = -\frac{\partial \theta}{\partial v} X_2 - e^{-\theta} X_3, & \frac{\partial X_1}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial u} X_2, \\ \frac{\partial X_2}{\partial u} = \frac{\partial \theta}{\partial v} X_1, & \frac{\partial X_2}{\partial v} = -\frac{\partial \theta}{\partial u} X_1 + e^{-\theta} X_3, \\ \frac{\partial X_3}{\partial u} = e^{-\theta} X_1, & \frac{\partial X_3}{\partial v} = -e^{-\theta} X_2. \end{cases}$$

Per le coordinate x', y', z' del punto generico P' di S' e per i coseni direttori X'_3, Y'_3, Z'_3 della sua normale in P' pongasi:

$$(20) \quad \begin{cases} x' = x + (LX_1 + MX_2 + NX_3)t^2, & (t \text{ costante}) \\ X'_3 = PX_1 + QX_2 + RX_3 \end{cases}$$

con le analoghe circolando, $L, M, N; P, Q, R$ essendo sei funzioni incognite di u, v .

Le condizioni di invariabilità della configurazione dei piani tangenti e dei punti corrispondenti di contatto, che in questo caso scriviamo sotto la forma:

$$\begin{aligned} S(x' - x)^2 &= t^4, \\ SX_3(x' - x) &= -t^2, \quad SX'_3(x' - x) = t^2, \\ SX_3X'_3 &= 1, \end{aligned}$$

danno per tali funzioni incognite le condizioni:

$$(21) \quad \begin{aligned} N &= -1, & R &= 1, \\ L^2 + M^2 &= 0, & P^2 + Q^2 &= 0, & LP + MQ &= 2. \end{aligned}$$

Posto allora:

$$L = \sigma(u, v)$$

e fissando, a causa della prima delle (21):

$$M = +i\sigma$$

deducesi dalle altre:

$$P = \frac{1}{\sigma}, \quad Q = -\frac{i}{\sigma}$$

e quindi le (20) diventano:

$$\begin{aligned} x' &= x + t^2(\sigma X_1 + i\sigma X_2 - X_3) \\ X'_3 &= \frac{1}{\sigma} X_1 - \frac{i}{\sigma} X_2 + X_3. \end{aligned}$$

Per le formule del quadro (19) le solite condizioni:

$$S X'_3 \frac{\partial x'}{\partial u} = 0, \quad S X'_3 \frac{\partial x'}{\partial v} = 0$$

scrivonsi allora:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma} e^{\theta} + 2t^2 \frac{\partial \log \sigma}{\partial u} + 2it^2 \frac{\partial \theta}{\partial v} - t^2 e^{-\theta} \left(\sigma + \frac{1}{\sigma} \right) &= 0, \\ -\frac{i}{\sigma} e^{\theta} + 2t^2 \frac{\partial \log \sigma}{\partial v} - 2it^2 \frac{\partial \theta}{\partial u} - it^2 e^{-\theta} \left(\sigma + \frac{1}{\sigma} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Per ottenere le effettive formule di trasformazione sotto l'aspetto di BIANCHI pongasi:

$$\sigma = \frac{e^{\theta'}}{t}$$

e le precedenti diventano:

$$(22) \quad \begin{cases} \frac{\partial \theta'}{\partial u} + i \frac{\partial \theta}{\partial v} = \frac{e^{\theta'-\theta} - e^{-(\theta'-\theta)}}{2t} + \frac{t}{2} e^{-(\theta'+\theta)} \\ i \frac{\partial \theta'}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u} = \frac{e^{\theta'-\theta} - e^{-(\theta'-\theta)}}{2t} - \frac{t}{2} e^{-(\theta'+\theta)} \end{cases}$$

mentre le (20) si scrivono:

$$(23) \quad \begin{cases} x' = x + t e^{\theta'} (X_1 + i X_2) - t^2 X_3, \\ X'_3 = e^{-\theta'} (X_1 - i X_2) + X_3. \end{cases}$$

Ora, in forza della equazione (18), il sistema (22) è illimitatamente integrabile per θ' ed il suo integrale generale, contenente oltre t una costante arbitraria, soddisfa alla equazione:

$$\frac{\partial^2 \theta'}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta'}{\partial v^2} = e^{-2\theta'}.$$

L'elemento lineare della superficie S' luogo del punto $P' \equiv (x', y', z')$ ha l'espressione:

$$dS'^2 = e^{2\theta'} (du^2 + dv^2)$$

e poichè inoltre si ha:

$$\frac{\partial x'}{\partial u} = e^{2\theta'} \frac{\partial X'_3}{\partial u}, \quad \frac{\partial x'}{\partial v} = -e^{2\theta'} \frac{\partial X'_3}{\partial v},$$

concluesi che la S' è una superficie d'area minima (immaginaria se S è reale) vincolata alla S per configurazioni invariabili.

Diremo con BIANCHI che la S' è dedotta dalla S mediante una trasformazione D_i

di DARBOUX e scriveremo simbolicamente:

$$S.D_t \equiv S'.$$

Contenendo la funzione θ' una costante arbitraria si ha:

Ad ogni superficie minima S sono contigue per trasformazione D_t di DARBOUX una semplice infinità di superficie minime S' .

Dalle formule precedenti deducesi inoltre:

Le trasformazioni di DARBOUX delle superficie d'area minima conservano le linee di curvatura e le linee di lunghezza nulla.

13. Tenendo presenti il sistema (22) e le formule (23) si trovano le relazioni:

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial x'}{\partial u} &= X_1 \left[\frac{1}{2} e^{\theta} - \frac{1}{2} t^2 e^{-\theta} + \frac{1}{2} e^{2\theta' - \theta} \right] \\ &\quad + i X_2 \left[-\frac{1}{2} e^{\theta} + \frac{1}{2} t^2 e^{-\theta} + \frac{1}{2} e^{2\theta' - \theta} \right] - X_3 t e^{\theta' - \theta} \\ \frac{\partial x'}{\partial v} &= i X_1 \left[\frac{1}{2} e^{\theta} + \frac{1}{2} t^2 e^{-\theta} - \frac{1}{2} e^{2\theta' - \theta} \right] \\ &\quad + X_2 \left[\frac{1}{2} e^{\theta} + \frac{1}{2} t^2 e^{-\theta} + \frac{1}{2} e^{2\theta' - \theta} \right] + i X_3 t e^{\theta' - \theta} \end{aligned} \right.$$

per mezzo delle quali deducesi l'identità:

$$(25) \quad \frac{e^{\theta}}{t} (X'_1 + i X'_2) + X'_3 = \frac{e^{\theta'}}{t} (X_1 + i X_2) - X_3,$$

la quale poteva scriversi direttamente osservando che per la coppia di superficie S' , S valgono le uguaglianze β) del n° precedente e che invece, così dedotta, conferma appunto tale circostanza.

14. Indicheremo brevemente il sistema (22) con la notazione $\Phi(\theta, \theta'; t)$ mettendo in evidenza prima la soluzione θ della equazione di LIOUVILLE corrispondente alla superficie S di cui si parte, indi quella θ' corrispondente alla superficie S' cui si perviene mediante una trasformazione di DARBOUX a costante t .

Ciò posto sia S una superficie minima (reale o no) corrispondente alla soluzione θ e, corrispondentemente ai due sistemi $\Phi(\theta, \varphi; a)$, $\Phi(\theta, \lambda; b)$, consideriamo le due superficie minime:

$$S'_1 \equiv S.D_a, \quad S'_2 \equiv S.D_b$$

e vediamo in che posizione relativa stanno nello spazio.

Se $P_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 \equiv (x_2, y_2, z_2)$ sono i punti rispettivamente di S'_1 , S'_2 corrispondenti ad un medesimo $P \equiv (x, y, z)$ di S ; se con $X'_{3,1}$, $Y'_{3,1}$, $Z'_{3,1}$; $X'_{3,2}$, $Y'_{3,2}$, $Z'_{3,2}$ indichiamo i coseni direttori della normale a S'_1 , S'_2 in P_1 , P_2 rispettivamente, si

ha, secondo quanto precede:

$$(26) \quad \begin{cases} x_1 = x + a e^{\varphi} (X_1 + i X_2) - a^2 X_3, \\ X'_{3,1} = a e^{-\varphi} (X_1 - i X_2) + X_3; \\ x_2 = x + b e^{\lambda} (X_1 + i X_2) - b^2 X_3, \\ X'_{3,2} = b e^{-\lambda} (X_1 - i X_2) + X_3; \end{cases}$$

con le analoghe. Da queste, ponendo:

$$(27) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{a e^{\varphi} - b e^{\lambda}}{a^2 - b^2} (X_1 + i X_2) - X_3, \\ \beta = \frac{a e^{\varphi} - b e^{\lambda}}{a^2 - b^2} (Y_1 + i Y_2) - Y_3, \\ \gamma = \frac{a e^{\varphi} - b e^{\lambda}}{a^2 - b^2} (Z_1 + i Z_2) - Z_3, \end{cases}$$

deduconsi subito le uguaglianze:

$$(28) \quad \begin{cases} S(x_1 - x_2)^2 = (a^2 - b^2)^2, \\ S \alpha X'_{3,1} = \frac{1}{a^2 - b^2} (a^2 - 2 a b e^{\lambda - \varphi} + b^2), \\ S \alpha X'_{3,2} = - \frac{1}{a^2 - b^2} (a^2 - 2 a b e^{\varphi - \lambda} + b^2), \\ S X'_{3,1} X'_{3,2} = 1. \end{cases}$$

La prima di queste ultime esprime intanto che:

Se due superficie minime S'_1, S'_2 sono contigue per trasformazioni D_a, D_b di DARBOUX ad una medesima superficie minima S , due punti P_1, P_2 di S'_1, S'_2 corrispondenti ad un medesimo punto P di S hanno distanza costante.

In particolare si ha:

Due superficie minime contigue per trasformazione D_i ad una medesima superficie minima S hanno sempre nulla la distanza dei punti corrispondenti ad un medesimo di S .

15. Da quel che precede risulta che S essendo una superficie immaginaria S'_1 può essere reale. Ricerchiamo se pure reale può essere S'_2 .

Nell'ipotesi affermativa poichè

$$S X'_{3,1} X'_{3,2} = 1$$

deducesi:

$$X'_{3,1} = X'_{3,2}$$

e analoghe; e allora dalle (26), (27) per confronto si ottiene:

$$a e^{-\varphi} = b e^{-\lambda}$$

$$\lambda - \varphi = \log \frac{b}{a}, \quad \lambda = \varphi + \log \frac{b}{a}$$

e se λ è soluzione dell'equazione di LIOUVILLE non lo è φ a meno che non sia $b = a$ nel qual caso S'_1 ed S'_2 non sono distinte. Dunque:

Da una superficie minima reale, mediante due successive trasformazioni di DARBOUX, si perviene sempre ad una superficie minima immaginaria.

Questa proposizione può anche esprimersi:

Le superficie minime contigue per trasformazioni di DARBOUX ad una medesima superficie immaginaria sono tutte immaginarie eccezione fatta al più per una di esse che può essere reale.

16. D'ora in avanti indicheremo con S_0 la superficie minima corrispondente alla soluzione θ dell'equazione di LIOUVILLE. Stabiliamo le formule di composizione delle trasformazioni di DARBOUX. Sia

$$S'_\varphi \equiv S_0 \cdot D_a$$

e ancora

$$S''_\psi \equiv S'_\varphi \cdot D_b \equiv (S_0 \cdot D_a) \cdot D_b,$$

e siano

$$P \equiv (x, y, z), \quad P' \equiv (x', y', z'), \quad P'' \equiv (x'', y'', z'')$$

punti corrispondenti ordinatamente su S_0 , S'_φ , S''_ψ .

Si hanno formule del tipo:

$$x' = x + a e^\varphi (X_1 + i X_2) - a^2 X_3,$$

$$x'' = x' + b e^\psi (X'_1 + i X'_2) - b^2 X'_3;$$

inoltre:

$$X'_1 = e^\varphi \frac{\partial X_3}{\partial u}, \quad X'_2 = -e^\varphi \frac{\partial X_3}{\partial v}$$

con

$$X'_3 = a e^{-\varphi} (X_1 - i X_2) + X_3.$$

Tenendo presenti tali formule ed il sistema fondamentale (22) di trasformazione si perviene, mediante sostituzione, alle espressioni seguenti:

$$x'' = x + A X_1 + B X_2 + C X_3,$$

$$y'' = y + A Y_1 + B Y_2 + C Y_3,$$

$$z'' = z + A Z_1 + B Z_2 + C Z_3,$$

con

$$A = a(e^\varphi - b^2 e^{-\varphi}) + b(e^{\psi+\varphi-\theta} - a^2 e^{\psi-\varphi-\theta}),$$

$$B = i a(e^\varphi + b^2 e^{-\varphi}) + i b(e^{\psi+\varphi-\theta} - a^2 e^{\psi-\varphi-\theta}),$$

$$C = -a^2 - 2 a b e^{\psi-\theta} - b^2$$

le quali fanno appunto passare direttamente dalle superficie S_0 alle S''_ψ .

Se nelle formule ora scritte ponesi $\psi = \theta$, $b = -a$, si ha

$$A = B = C = 0$$

e si verifica così che

$$(S_0 \cdot D_a) \cdot D_{-a} \equiv S_0$$

come era evidente a priori.

Medesimamente ottengono le formule:

$$X''_3 = M X_1 + N X_2 + X_3,$$

$$Y''_3 = M Y_1 + N Y_2 + Y_3,$$

$$Z''_3 = M Z_1 + N Z_2 + Z_3,$$

con

$$M = b e^{\theta - \varphi - \psi} + a e^{-\varphi}$$

$$N = i M$$

e pure queste per $\varphi = \theta$, $b = -a$ danno:

$$X''_3 = X_3, \quad Y''_3 = Y_3, \quad Z''_3 = Z_3.$$

17. Allo scopo di stabilire un teorema notevole sulle trasformazioni in esame, premettiamo qui qualche considerazione analitica. Fermo restando le notazioni del n° 14 consideriamo i due sistemi $\Phi(\varphi, \theta; a)$, $\Phi(\lambda, \theta; b)$ aventi in comune la soluzione θ dell'equazione di LIOUVILLE. Inoltre, per brevità, essendo p, q due funzioni di u, v e k una costante poniamo:

$$\frac{e^{p-q} - e^{-p+q}}{2k} + \frac{k}{2} e^{-p-q} = A(p, q, k),$$

$$\frac{e^{p-q} - e^{-p+q}}{2k} - \frac{k}{2} e^{-p-q} = B(p, q, k).$$

Allora la funzione θ è soluzione comune ai due sistemi:

$$(29) \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + i \frac{\partial \theta}{\partial v} = A(\varphi, \theta, a), \\ i \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u} = B(\varphi, \theta, a), \end{cases}$$

$$(30) \quad \begin{cases} \frac{\partial \lambda}{\partial u} + i \frac{\partial \theta}{\partial v} = A(\lambda, \theta, b), \\ i \frac{\partial \lambda}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u} = B(\lambda, \theta, b). \end{cases}$$

Ricerchiamo se possa esistere una soluzione comune ψ ai due sistemi $\Phi(\varphi, \psi; b)$, $\Phi(\lambda, \psi; a)$. Ammessa per un momento vera la cosa devono essere soddisfatte le re-

lazioni:

$$(31) \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + i \frac{\partial \psi}{\partial v} = A(\varphi, \psi, b), \\ i \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \psi}{\partial u} = B(\varphi, \psi, b), \end{cases}$$

$$(32) \quad \begin{cases} \frac{\partial \lambda}{\partial u} + i \frac{\partial \psi}{\partial v} = A(\lambda, \psi, a), \\ i \frac{\partial \lambda}{\partial v} + \frac{\partial \psi}{\partial u} = B(\lambda, \psi, a). \end{cases}$$

Da (29), (30), (31), (32) deducesi:

$$A(\varphi, \theta, a) - \frac{\partial \varphi}{\partial u} = A(\lambda, \theta, b) - \frac{\partial \lambda}{\partial u},$$

$$B(\varphi, \theta, a) - i \frac{\partial \varphi}{\partial v} = B(\lambda, \theta, b) - i \frac{\partial \lambda}{\partial v};$$

$$A(\varphi, \psi, b) - \frac{\partial \varphi}{\partial u} = A(\lambda, \psi, a) - \frac{\partial \lambda}{\partial u},$$

$$B(\varphi, \psi, b) - i \frac{\partial \varphi}{\partial v} = B(\lambda, \psi, a) - i \frac{\partial \lambda}{\partial v},$$

le quali forniscono le altre:

$$A(\varphi, \theta, a) - A(\lambda, \theta, b) = A(\varphi, \psi, b) - A(\lambda, \psi, a),$$

$$B(\varphi, \theta, a) - B(\lambda, \theta, b) = B(\varphi, \psi, b) - B(\lambda, \psi, a).$$

Queste ultime relazioni sviluppate scrivonsi:

$$\begin{aligned} e^{-\theta}(be^{\varphi} - ae^{\lambda} + a^2be^{-\varphi} - ab^2e^{-\lambda}) + e^{\theta}(ae^{-\lambda} - be^{-\varphi}) \\ = e^{-\psi}(ae^{\varphi} - be^{\lambda} + ab^2e^{-\varphi} - a^2be^{-\lambda}) + e^{\psi}(be^{-\lambda} - ae^{-\varphi}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{-\theta}(be^{\varphi} - ae^{\lambda} - a^2be^{-\varphi} + ab^2e^{-\lambda}) + e^{\theta}(ae^{-\lambda} - be^{-\varphi}) \\ = e^{-\psi}(ae^{\varphi} - be^{\lambda} - ab^2e^{-\varphi} + a^2be^{-\lambda}) + e^{\psi}(be^{-\lambda} - ae^{-\varphi}) \end{aligned}$$

e per somma e differenza forniscono le altre due:

$$e^{-\theta}(be^{\varphi} - ae^{\lambda}) + e^{\theta}(ae^{-\lambda} - be^{-\varphi}) = e^{-\psi}(ae^{\varphi} - be^{\lambda}) + e^{\psi}(be^{-\lambda} - ae^{-\varphi})$$

$$e^{-\theta}(a^2be^{-\varphi} - ab^2e^{-\lambda}) = e^{-\psi}(ab^2e^{-\varphi} - a^2be^{-\lambda}).$$

L'ultima di queste dà intanto:

$$e^{\psi-\theta} = \frac{be^{-\varphi} - ae^{-\lambda}}{ae^{-\varphi} - be^{-\lambda}} = \frac{be^{\lambda} - ae^{\varphi}}{ae^{\lambda} - be^{\varphi}}$$

ed in forza di questa, l'altra dà concordemente:

$$e^{\psi-\theta} = \frac{ae^{\varphi} - be^{\lambda}}{be^{\varphi} - ae^{\lambda}}.$$

Concludiamo allora che se effettivamente esiste un integrale ψ comune ai due sistemi $\Phi(\varphi, \psi; b)$, $\Phi(\lambda, \psi; a)$ esso è necessariamente della forma;

$$(33) \quad \psi = \theta + \log \frac{ae^{\varphi} - be^{\lambda}}{be^{\varphi} - ae^{\lambda}}.$$

Noi verificheremo che tale espressione è effettivamente un integrale comune ai sistemi (31), (32). Facciamo la verifica per es. pel sistema $\Phi(\varphi, \psi; b)$.

Intanto si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + i \frac{\partial \psi}{\partial v} &= \frac{\partial \varphi}{\partial u} + i \frac{\partial \theta}{\partial v} + i \frac{ae^{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial v} - be^{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial v}}{ae^{\varphi} - be^{\lambda}} - i \frac{be^{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial v} - ae^{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial v}}{be^{\varphi} - ae^{\lambda}} \\ &= A(\varphi, \theta, a) + \left[B(\varphi, \theta, a) - \frac{\partial \theta}{\partial u} \right] \left(\frac{ae^{\varphi}}{ae^{\varphi} - be^{\lambda}} - \frac{be^{\varphi}}{be^{\varphi} - ae^{\lambda}} \right) - \\ &\quad - \left[B(\lambda, \theta, b) - \frac{\partial \theta}{\partial u} \right] \left(\frac{be^{\lambda}}{ae^{\varphi} - be^{\lambda}} - \frac{ae^{\lambda}}{be^{\varphi} - ae^{\lambda}} \right) \\ &= A(\varphi, \theta, a) + B(\varphi, \theta, a) \left(\frac{ae^{\varphi}}{ae^{\varphi} - be^{\lambda}} - \frac{be^{\varphi}}{be^{\varphi} - ae^{\lambda}} \right) - \\ &\quad - B(\lambda, \theta, b) \left(\frac{be^{\lambda}}{ae^{\varphi} - be^{\lambda}} - \frac{ae^{\lambda}}{be^{\varphi} - ae^{\lambda}} \right) = A(\varphi, \psi, b) \end{aligned}$$

e ciò dimostra intanto che ψ è soluzione della prima equazione del sistema (31).

In modo perfettamente analogo si verifica che ψ è soluzione della seconda equazione del medesimo sistema come pure che essa è soluzione del sistema $\Phi(\lambda, \psi; a)$.

Diciamo quindi:

Se $\theta(u, v)$ è soluzione comune ai due sistemi $\Phi(\varphi, \theta; a)$, $\Phi(\lambda, \theta; b)$ la funzione

$$\psi = \theta + \log \frac{ae^{\varphi} - be^{\lambda}}{be^{\varphi} - ae^{\lambda}}$$

è soluzione comune ai due sistemi $\Phi(\varphi, \psi; b)$, $\Phi(\lambda, \psi; a)$.

18. Vediamo quale significato ha il precedente teorema per le trasformazioni di DARBOUX. Unitamente ai sistemi del n° precedente consideriamo le quattro superficie minime $S_0, S_{\varphi}, S_{\lambda}, S_{\psi}$; si hanno le relazioni di trasformazione:

$$\begin{aligned} S_{\varphi} \cdot D_a &\equiv S_0, & S_{\lambda} \cdot D_b &\equiv S_0, \\ S_{\varphi} \cdot D_b &\equiv S_{\psi}, & S_{\lambda} \cdot D_a &\equiv S_{\psi} \end{aligned}$$

onde risulta il seguente teorema di permutabilità:

Se S_0 è una superficie minima contigua per trasformazioni di DARBOUX D_a, D_b a due superficie minime S_φ, S_λ esiste una quarta superficie minima S_ψ , perfettamente determinata, contigua alle S_φ, S_λ per trasformazioni di DARBOUX D_b, D_a a costanti permutate.

Questo notevole teorema è del tutto analogo a quello che si ha per le trasformazioni B_σ delle superficie a curvatura totale costante.

È superfluo avvertire che dalla S_0 si passa alla S_ψ operando una trasformazione D_{-a} e poi una D_b ovvero una D_{-b} e poi una D_a ; di tale circostanza bisogna tener conto quando si vogliono applicare le formule di composizione stabilite al n° 16.

Si verificherà facilmente che le espressioni di $A, B, C; M, N$ allora trovate rimangono in loro stesse operando la sostituzione:

$$\Sigma \equiv \begin{pmatrix} a, b, \varphi \\ b, a, \lambda \end{pmatrix}$$

e ponendo:

$$\psi = \theta + \log \frac{ae^\varphi - be^\lambda}{be^\varphi - ae^\lambda}.$$

Sulle quattro superficie $S_0, S_\varphi, S_\lambda, S_\psi$ si considerino ordinatamente quattro punti corrispondenti P_1, P_2, P_3, P_4 ; ricordando le proprietà stabilite al n° 18, si ha che:

Al variare della quaderna P_1, P_2, P_3, P_4 di punti corrispondenti il quadrilatero che ha per vertici questi punti conserva invariate le lunghezze dei lati e delle diagonali.

19. Dal teorema di permutabilità dimostrato possonsi dedurre conseguenze analoghe a quelle che si hanno per le superficie a curvatura totale costante.

Così per es. supponiamo che della superficie minima S_0 si conoscano tutte le trasformate di DARBOUX, si sappia cioè integrare il sistema $\Phi(\theta, \varphi; t)$ per qualunque valore della costante t (la quale peraltro, data la definizione della trasformazione, è diversa da zero). Si conoscerà allora una soluzione:

$$\varphi = \varphi(u, v, t, c)$$

con due costanti arbitrarie t, c della equazione:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} = e^{-2\varphi}$$

allora si può dimostrare che:

Per ciascuna superficie S_λ contigua per certa trasformazione D_a alla S_0 le trasformate di DARBOUX si determinano con soli calcoli algebrici e di derivazione.

Infatti sia:

$$\lambda = \varphi(u, v, a, c)$$

la soluzione del sistema $\Phi(\theta, \lambda; a)$ corrispondente a S_λ ; se S_φ è la trasformata generica per trasformazione D_t di S_0 , il teorema di permutabilità, per la funzione μ cor-

rispondente alla trasformata generica S_μ di S_λ ci dà:

$$\mu = \theta + \log \frac{ae^{\varphi(u,v,t,c)} - te^\lambda}{te^{\varphi(u,v,t,c)} - ae^\lambda}$$

onde in termini finiti deducesi la trasformata S_μ di S_λ .

Evidentemente però questo procedimento di trasformazione non ha l'interesse che il procedimento analogo ha per le superficie a curvatura totale costante in quanto che l'equazione di LIOUVILLE per le superficie minime si sa integrare e quindi, com'è noto, si conoscono già tutte le superficie d'area minima.

20. Dalle cose esposte appare chiaramente l'analogia che esiste fra le trasformazioni D_i delle superficie minime e le trasformazioni B_o delle superficie a curvatura totale costante. Ma le trasformazioni D_i ora studiate pare debbano avere interesse più grande se si ricollegano alle classi complete di superficie applicabili deducibili in modo noto dalle superficie minime.

Il BIANCHI ha già mostrato ciò nella nota citata e in quegli studi appare probabile che le trasformazioni già note delle superficie minime debbansi risolvere in successive trasformazioni più semplici per le quali notevole importanza devono avere le trasformazioni D_i , similmente a quello che accade per le trasformazioni di BÄCKLUND delle superficie pseudosferiche le quali risolvonsi sempre nel prodotto di una trasformazione di BIANCHI e di una trasformazione di LIE.

22. I casi in cui due superficie S, S' possono essere vincolate per configurazioni invariabili sono stati passati in rassegna in modo, crediamo, abbastanza soddisfacente e completo. Da tutti i casi studiati emerge infine il teorema:

Una trasformazione per configurazioni invariabili conserva le linee di curvatura.

È tale circostanza che ci ha indotto a scegliere a sistema coordinato sulla superficie di partenza appunto quello delle linee di curvatura le formule e gli sviluppi assumendo allora aspetto relativamente semplice.

Palermo, ottobre 1921.

PIETRO TORTORICI.