Note über die Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung mit einem Doppelpunkt.

VON A. BRILL in DARMSTADT.

In den Zusatzbemerkungen „Observations géométriques“ etc. zu einer Note des Herrn Brioschi „über die Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung mit einem Doppelpunkt“*) leitet Herr Cremona aus den algebraischen Resultaten jener Note einige interessante Eigenschaften der „homolog-harmonischen“ Curve vierter Ordnung ab, deren Gleichung die Gestalt hat:

$$6z^2v - u = 0$$

wo v eine quadratische, u eine biquadratische binäre Form der Variablen x und y ist. Diese Curve gehört zu den von mir in einem Aufsatz „über die Anwendung der hyperelliptischen Functionen in der Geometrie“**) gelegentlich eines allgemeineren Berührungsproblems betrachteten Curven vierter Ordnung mit einem Doppelpunkt, auf welche sie indess umgekehrt durch lineare Transformation nicht zurückgeführt werden kann. Ich will im Nachfolgenden zeigen, dass sich jene Eigenschaften aus dem folgenden, a. a. O. aufgestellten Satze ergeben:

„Von den 31 Systemen von Curven 2. Ordnung, welche in 4 Punkten eine Curve 4. Ordnung mit einem Doppelpunkt je einfach berühren, enthalten 30 (für welche gewisse Periodenzahlen P, Q, P', Q' , durch die sie charakterisirt sind, nicht gleichzeitig Null sind) je 4 Paare von Geraden, also je 8 Doppeltangenten, und diese 30 Systeme gruppiren sich zu Paaren so, dass jedes Paar alle 16 enthält. Somit kann jede Doppeltangente, je nachdem sie mit den anderen gruppirt wird, als 15 Systemen zugehörig betrachtet werden. Und allgemein etc.“

Es sei gestattet, bei dieser Gelegenheit den Beweis des vorstehenden Satzes, den ich a. a. Ort nicht geliefert, kurz anzudeuten.

*) Diese Annalen, Bd. IV, S. 95.

**) Journal Crelle-Borchardt, Bd. 65, S. 269.

1. Legt man durch den Doppelpunkt einer Curve 4. Ordnung, für welche das Geschlecht $p = 2$ ist, ein Bündel von Geraden, so liegen im Allgemeinen auf jedem Strahl zwei weitere Punkte der Curve; in den sechs Berührungsstrahlen, zu welchen die sechs Parameter $\infty, 0, 1, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x}, \frac{1}{\mu^2}$ gehören mögen, je zwei zusammenfallende Punkte. Man kann demnach jeden Punkt der Curve eindeutig bestimmen durch den Parameter x des zu demselben gehörigen Strahls in Verbindung mit dem Vorzeichen des Wurzelausdrucks:

$$(2) \quad \sqrt{X} = \sqrt{x \cdot 1 - x \cdot 1 - x^2 x \cdot 1 - \lambda^2 x \cdot 1 - \mu^2 x},$$

welches wechselt, wenn x durch einen jener Berührungspunkte durchgeht. Seien nun zwei hyperelliptische Integrale erster Gattung gegeben:

$$(3) \quad u = \int_0^x \frac{B + Cx}{\sqrt{X}} dx; \quad u' = \int_0^x \frac{B' + C'x}{\sqrt{X}} dx.$$

Für die zu den Schnittpunkten $x_1, x_2, \dots, x_{mn}$ (je mit dem entsprechenden Wurzelvorzeichen) einer Curve m . Ord. mit der gegebenen Curve gehörigen Integrale:

$$\begin{array}{c} u_1 u_2 \dots u_{mn} \\ u'_1 u'_2 \dots u'_{mn} \end{array}$$

bestehen dann nach den Abel'schen Theorem die folgenden Gleichungen, in welchen a, b die den Tangenten des Doppelpunktes zugehörigen Werthe des Parameters x sind, $\sqrt{A}, \sqrt{B}$ die entsprechenden Wurzelausdrücke bedeuten:

$$(4) \quad \begin{array}{l} \sum_1^{4m} u_i = \text{const.}; \quad \sum_1^{4m} u'_i = \text{const.}; \\ \sum_1^{4m} \int_0^{x_i} \left\{ \frac{\sqrt{X} - \sqrt{A}}{(a-x)\sqrt{X}} - \frac{\sqrt{X} - \sqrt{B}}{(b-x)\sqrt{X}} \right\} dx = \text{const.} \end{array}$$

(Vgl. Clebsch „Ebene Curven, deren Coord. ellipt. Funct. etc.“ §. 8. Journ. Crelle-Borchardt Bd. 64. Die dort gegebene Herleitung gilt fast wörtlich für den vorliegenden Fall.)

Man kann nun mit Hilfe der von mir a. a. O. gegebenen Ausdehnung des Hermite'schen Satzes bezüglich der Quotienten von elliptischen Θ producten auf hyperelliptische Functionen der letzten der obigen Gleichungen eine bequemere Gestalt geben, wie ich a. a. O. S. 276 gezeigt habe. Bestimmt man noch die Werthe der Constanten rechts (ib. S. 282), so erhält man anstatt der Gleichungen des Abel'schen Theorems die folgenden:

$$(5) \left\{ \begin{aligned} \sum_1^{4m} u_i &= m(\alpha + \beta) + k \\ \sum_1^{4m} u'_i &= m(\alpha' + \beta') + k' \\ \frac{\varphi_{31}(\alpha - u_1) \varphi_{31}(\alpha - u_2) \cdots \varphi_{31}(\alpha - u_{4m})}{\varphi_{31}(\beta - u_1) \varphi_{31}(\beta - u_2) \cdots \varphi_{31}(\beta - u_{4m})} &= \\ &= \left[\frac{\varphi_{00}^2(\beta) \varphi_{10}^2(\alpha) \varphi_{21}^2(\alpha)}{\varphi_{00}^2(\alpha) \varphi_{10}^2(\beta) \varphi_{21}^2(\beta)} \right]^m \cdot e^{2i\pi \cdot h + q(\alpha - \beta) + q'(\alpha' - \beta')^*}, \end{aligned} \right.$$

$$\text{wo} \quad k = p \cdot i\pi + p' \cdot 0 + q \cdot \varepsilon_1 + q' \cdot \varepsilon_2$$

$$k' = p \cdot 0 + p' \cdot i\pi + q \cdot \varepsilon'_1 + q' \cdot \varepsilon'_2$$

und die Factoren p, p', q, q', h ganze Zahlen sind.

$\varphi_{31}, \varphi_{00}, \varphi_{10}, \varphi_{21}$ sind hyperelliptische Θ -Functionen (nach den Bezeichnungen von Rosenhain**) und der Kürze halber je mit nur einem Argument geschrieben; also z. B. $\varphi_{10}(\alpha)$ statt $\varphi_{10}(\alpha, \alpha')$; $i\pi, 0; 0, i\pi; \varepsilon_1, \varepsilon'_1; \varepsilon_2, \varepsilon'_2$ sind die 4 Periodenpaare der hyperelliptischen Functionen***); endlich sind α, α' und β, β' die zu den Parametern der zwei Tangenten des Doppelpunkts gehörigen Integrale u, u' .

2. An Stelle der Curve m^{ter} Ordnung möge nun eine Doppeltangente treten, welche die Curve vierter Ordnung in den Punkten x_1 und x_2 berührt. Alsdann gehen die Gleichungen (5) in die folgenden über:

$$(6) \quad u_1 + u_2 = \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{k}{2}; \quad u'_1 + u'_2 = \frac{\alpha' + \beta'}{2} + \frac{k'}{2};$$

$$\frac{\varphi_{31}(\alpha - u_1) \varphi_{31}(\alpha - u_2)}{\varphi_{31}(\beta - u_1) \varphi_{31}(\beta - u_2)} = \frac{\varphi_{00}(\beta) \varphi_{10}(\alpha) \varphi_{21}(\alpha)}{\varphi_{00}(\alpha) \varphi_{10}(\beta) \varphi_{21}(\beta)} \cdot e^{i\pi h + \frac{q}{2}(\alpha - \beta) + \frac{q'}{2}(\alpha' - \beta')}$$

Diese 3 Gleichungen mit den beiden Unbekannten x_1, x_2 können, wie ich a. a. O. bewiesen habe (S. 280), nur neben einander bestehen, wenn von den ganzen Zahlen $p q p' q' h$ die Gleichung erfüllt wird:

$$(7) \quad (p' + 1)(q' + 1) + p q + h \equiv 0 \pmod{2},$$

was auf 16 verschiedene Arten erreichbar ist. Es giebt also 16 Doppeltangenten. Man kann dieselben in folgende Tabellen gruppiren:

*) In der entsprechenden Formel auf S. 281 der citirten Abhandlung ist $\frac{m}{n-3}$ statt als Factor, als Exponent von γ_x anzuschreiben, und h_x mit dem Factor $2i\pi$ zu versehen.

**) Mém. prés. à l'Institut. T. XI.

***) Nach der Bezeichnung von Rosenhain ist:

$$\varepsilon_1 = \log p; \quad \varepsilon_2 = 2A; \quad \varepsilon'_1 = 2A; \quad \varepsilon'_2 = \log q.$$

	$h = 0$					$h = 1$			
	p	q	p'	q'		p	q	p'	q'
(8) 1.	0	0	1	1	11.	0	0	0	0
2.	1	1	0	1	12.	1	1	1	1
3.	1	1	1	0	13.	0	0	1	0
4.	1	1	0	0	14.	0	0	0	1
5.	1	0	0	1	15.	1	0	1	1
6.	0	1	1	0	16.	0	1	1	1
7.	1	0	0	0					
8.	1	0	1	0					
9.	0	1	0	1					
10.	0	1	0	0					

Stellt man nun für irgend ein Paar von Doppeltangenten mit den Berührungspunkten x_1, x_2 und x_3, x_4 die Gleichungen des Abel'schen Theorems auf, so erhält man:

$$(9) \quad \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = \alpha + \beta + \frac{K}{2} \\ u'_1 + u'_2 + u'_3 + u'_4 = \alpha' + \beta' + \frac{K'}{2} \end{cases}$$

$$(9^a) \quad \frac{\varphi_{31}(\alpha - u_1) \cdots \varphi_{41}(\alpha - u_4)}{\varphi_{31}(\beta - u_1) \cdots \varphi_{41}(\beta - u_4)} = \left[\frac{\varphi_{00}(\beta) \varphi_{10}(\alpha) \varphi_{21}(\alpha)}{\varphi_{00}(\alpha) \varphi_{10}(\beta) \varphi_{21}(\beta)} \right]^2 e^{i\pi H + \frac{Q}{2}(\alpha + \beta) + \frac{Q'}{2}(\alpha' + \beta')}$$

wo:

$$\begin{aligned} K &= P \cdot i\pi + P' \cdot 0 + Q \cdot \varepsilon_1 + Q' \cdot \varepsilon_2 \\ K' &= P \cdot 0 + P' \cdot i\pi + Q \cdot \varepsilon'_1 + Q' \cdot \varepsilon'_2 \end{aligned}$$

und wo ferner:

$$(10) \quad \begin{cases} P = p + p_1; & P' = p' + p'_1; & H = h + h_1 \\ Q = q + q_1; & Q' = q' + q'_1; \\ (p + 1)(q + 1) + p'q' + h \equiv 0 \pmod{2} \\ (p_1 + 1)(q_1 + 1) + p'_1q'_1 + h_1 \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases}$$

Die Gleichungen (9), (9^a) entsprechen dem Schnittpunktsysteme einer allgemeinen Curve zweiter Ordnung, welche die gegebene Curve vierter Ordnung in 4 Punkten berührt, und welche, wenn insbesondere noch die Gleichungen (10) erfüllt werden, in ein Paar von Doppeltangenten degenerirt. Die $PQP'Q'H$ können die Werthe 0, 1 annehmen. Dies giebt 2⁵ Lösungssysteme, deren jedes einer einfach unendlichen Schaar von Kegelschnitten, welche in 4 Punkten berühren, entspricht. Jede derselben, mit Ausnahme der beiden durch 00000 und 00001 charakterisirten, enthält, wie man leicht erkennt, 4 Doppeltangentenpaare, welche wieder nach dem Werth von H so einander zugeordnet sind, dass immer zwei alle 16 Doppeltangenten enthalten. Hiermit ist der eingangs erwähnte Satz bewiesen.

Die 15 Systeme, deren jedes alle Doppeltangenten enthält, sind in der folgenden Tabelle, welche mit Hilfe der in Tabelle (8) eingeführten Bezeichnungen vereinfacht worden ist, zusammengestellt. In derselben beziehen sich die römischen Ziffern auf die 15 Werthsysteme P, Q, P', Q' ; die arabischen Ziffern auf die Werthsysteme p, q, p', q' , bez. p_1 etc. Die Untereinanderstehenden bilden je ein Paar.

	I	II	III	IV	V
$H = 1$	1 4 7 10 11 12 15 16	2 4 6 8 11 14 15 16	3 9 5 4 11 15 16 13	4 1 2 3 11 12 14 13	5 6 7 3 11 12 14 16
$H = 0$	2 5 6 13 3 8 9 14	3 5 7 12 1 10 9 13	1 6 8 12 2 7 10 14	5 6 7 15 9 8 10 16	1 2 4 13 8 10 9 15

VI	VII	VIII	IX	X
6 5 2 10 11 12 15 13	7 5 1 8 11 14 15 13	8 9 2 7 11 12 16 13	9 8 10 3 11 12 14 15	10 9 1 6 11 14 16 13
1 3 4 14 9 7 8 16	2 3 4 12 9 6 10 16	1 3 4 14 5 10 6 15	1 2 4 13 6 7 5 16	2 3 4 12 5 8 7 15

XII	XIII	XIV	XV	XVI
2 10 7 3 13 15 16 14	2 5 9 1 12 15 16 14	3 1 8 6 12 13 15 16	10 8 4 5 12 14 16 13	7 6 4 9 12 14 15 13
1 5 8 11 4 6 9 12	3 6 7 11 4 10 8 13	2 5 9 11 4 7 10 14	1 2 3 11 7 6 9 15	1 2 3 11 10 8 5 16

3. Die Doppelpunktsintegrale α, β können in besonderen Fällen in halbe Perioden übergehen. Dies geschieht dann, wenn für eine der von dem Doppelpunkt aus an die Curve zu ziehenden Tangenten der Berührungspunkt in den Doppelpunkt selbst hereinrückt*), dieser also zugleich ein Wendepunkt wird. Aus der Gleichung (1) der *homologharmonischen Curve* erkennt man sofort, dass für diese beide Doppelpunktstangenten zugleich Wendetangenten sind. Bringt man dieselbe durch lineare Transformation auf die Gestalt:

$$z^2(1 - \lambda^2 x)(1 - \mu^2 x) - x(1 - x)(1 - \kappa^2 x) = 0,$$

so entsprechen jenen Tangenten die Werthe $x = \frac{1}{\lambda^2}$; $x = \frac{1}{\mu^2}$.

Dies sind für unsern Fall die oberen Grenzen α und β der Integrale α und β , während die unteren Null sind. Daher wird nach Rosenhain (bis auf ganze Perioden):

*) Die oberen Grenzen für die Doppelpunktsintegrale sind die den Tangenten im Doppelpunkt entsprechenden Parameter des Büschels.

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{2} \cdot i\pi + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_2 \\ \alpha' &= \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot i\pi + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_1' + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_2' \\ \beta &= \frac{1}{2} \cdot i\pi + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_1 \\ \beta' &= \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot i\pi + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_1'\end{aligned}$$

Diese Werthe sind in die Gleichungen (5) des Abel'schen Theorems zu substituiren. Insbesondere erhält man für die Berührungspunkte x_1, x_2 einer Doppeltangente (6):

$$(11) \quad u_1 + u_2 = \frac{1}{2} \varepsilon_2 + \frac{k}{2}; \quad u_1' + u_2' = \frac{1}{2} \varepsilon_2' + \frac{k'}{2}.$$

Wenn nun für eine andere Doppeltangente mit den Berührungspunkten x_3, x_1 sich die Summe k_1 um $\frac{1}{2} \varepsilon_2$ von k , die Summe k_1' um $\frac{1}{2} \varepsilon_2'$ von k' unterscheidet, so wird $\frac{1}{2} \varepsilon_2 + \frac{1}{2} k$ bis auf ganze Perioden gleich $-\frac{1}{2} \varepsilon_2 + \frac{1}{2} k$, daher:

$$(12) \quad u_1 + u_2 = -(u_3 + u_4); \quad u_1' + u_2' = -(u_3' + u_4')$$

bis auf ganze Perioden. Hieraus folgt aber einzeln: $x_1 = x_3; x_2 = x_4$, während die entsprechenden Werthe von $\sqrt{X}$ entgegengesetztes Vorzeichen haben, so dass also:

$$(12^a) \quad u_1 = -u_3; \quad u_2 = -u_4.$$

Daher liefert die dritte Gleichung (9^a) des Abel'schen Theorems:

$$(13) \quad \frac{\varphi_{31}(\alpha - u_1) \varphi_{31}(\alpha - u_2) \varphi_{31}(\alpha + u_1) \varphi_{31}(\alpha + u_2)}{\varphi_{21}(\beta - u_1) \varphi_{21}(\beta - u_2) \varphi_{21}(\beta + u_1) \varphi_{21}(\beta + u_2)} = e^{i\pi H} \cdot \text{const.}$$

oder, unter Benutzung des erweiterten Hermite'schen Satzes (S. 274 der cit. Abh. oder ib. S. 276, II.):

$$(13^a) \quad \frac{(1 - \lambda^2 x_1)(1 - \lambda^2 x_2)}{(1 - \mu^2 x_1)(1 - \mu^2 x_2)} = e^{i\pi H} \cdot \text{const.},$$

wo const. bloss von κ, λ, μ abhängt. Die Gleichungen (12), (13) charakterisiren (§ 2.) zwei vierfach berührende Kegelschnittsysteme, für welche (F. 9) jede der Zahlen P, P', Q gleich Null, Q' gleich Eins und H gleich Null oder Eins ist. Es sind dies die Systeme XIV (§ 2., a. Ende), welche die Doppeltangenten in der a. a. O. aufgestellten Gruppierung enthalten. In dem vorliegenden besonderen Fall, wo noch die Gleichungen (12^a) bestehen, liegen die Berührungspunkte paarweise auf Geraden, die durch den Doppelpunkt der Curve 4^{ter} Ordnung gehen, und zwischen deren Parametern die Gleichung (13^a) besteht, welche aussagt, dass das Büschel ein involutorisches ist.

Darmstadt, im Mai 1872.