Über das Gleichgewicht von elliptischen Platten.

Von

Hans Happel in Breslau.

§ 1.

In dieser Arbeit behandeln wir das folgende Problem. Gegeben ist eine elliptische Platte, die eine Einzellast im Mittelpunkt trägt, gesucht wird die Verrückung der Mittelebene. Was die Randbedingungen betrifft, so wird zunächst angenommen, daß der Rand eingeklemmt ist, danach wird noch der Fall betrachtet, wo der Rand gestützt ist. Wir nehmen an, daß die Deformationen klein sind im Vergleich zur Plattendicke, so daß nur Verrückungen vorkommen, die senkrecht zur Ruhelage der Mittelebene sind; von den zwei Termen, aus denen die potentielle Energie besteht, kommt dann nur derjenige in Betracht, der proportional ist mit der dritten Potenz der Plattendicke¹⁾.

Wir betrachten zunächst den Fall, wo die Platte am Rande eingeklemmt ist. Die Ruhelage der Mittelebene der Platte wählen wir als xy -Ebene und zwar soll die x - und y -Achse mit der großen bzw. kleinen Achse der Ellipse zusammenfallen; die die Mittelfläche begrenzt; die positive z -Achse verlaufe nach unten. Die Verschiebung eines beliebigen Punktes der Mittelebene parallel zur z -Achse sei w . Da die Einzellast im Anfangspunkt auflagert, so ist unser Problem mit der folgenden mathematischen Aufgabe identisch. Gesucht wird diejenige Funktion w , die innerhalb der Platte aber mit Ausnahme des Anfangspunktes der Gleichung

$$(1) \quad \Delta \Delta w = 0$$

genügt und die zwei Randbedingungen:

$$(2) \quad w = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0$$

¹⁾ Siehe G. Kirchhoff, Vorlesungen über Mechanik, Leipzig 1897, 4. Aufl, S. 449–458, oder É. Mathieu, Théorie de l'Élasticité des corps solides, I partie, Paris 1890, S. 171–181.

erfüllt, wobei n die innere Normale sei. Ist die Einzellast gleich dem Gewicht P , so hat w im Anfangspunkt und seiner nächsten Umgebung, die wir mit p bezeichnen, der Gleichung zu genügen²⁾:

$$(3) \quad P = \frac{4}{3} K h^3 \left(\frac{1+2\theta}{1+\theta} \right) \iint_p \Delta \Delta w dp = q \iint_p \Delta \Delta w dp.$$

Hier bedeutet $2h$ die Plattendicke, während K und θ die Elastizitätskonstanten in Kirchhoffscher Bezeichnungsweise sind³⁾. Die Bedeutung der zur Abkürzung eingeführten Konstanten q ist ohne weiteres ersichtlich.

Sind xy die Koordinaten eines beliebigen Punktes der Mittelebene und setzt man

$$r^2 = x^2 + y^2,$$

so machen wir innerhalb der Platte, aber außerhalb p für w den Absatz

$$(4) \quad w = \frac{P}{8\pi q} \left\{ r^2 \left(\log r - \frac{1}{2} \right) + F(x, y) \right\}.$$

Hier ist die Funktion $F(x, y)$, von der wir voraussetzen, daß sie nebst ihren partiellen Derivierten bis zur vierten Ordnung inkl. stetig ist, so zu bestimmen, daß innerhalb der ganzen Platte

$$(5) \quad \Delta \Delta F = 0$$

wird, womit zugleich erreicht ist, daß innerhalb der Platte mit Ausnahme des Anfangspunktes Bedingung (1) erfüllt ist; da, abgesehen von der genannten Stelle

$$\Delta \Delta \left\{ r^2 \left(\log r - \frac{1}{2} \right) \right\} = 0$$

ist. Ferner hat noch F wegen (2) den zwei Randbedingungen

$$(6) \quad r^2 \left(\log r - \frac{1}{2} \right) + F = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial n} \left\{ r^2 \left(\log r - \frac{1}{2} \right) \right\} + \frac{\partial F}{\partial n} = 0$$

zu genügen. Die Bedingung (3) ist infolge unseres Ansatzes für w von selbst erfüllt⁴⁾, denn nach dem Gaußschen Satz ist, falls s die Randkurve und n die innere Normale von p bedeutet:

$$\iint_p \Delta \Delta w dp = - \int_s \frac{\partial \Delta w}{\partial n} ds.$$

Da nun für den Rand von p der Ansatz (4) gilt und die Glieder mit r^2 und F wegen der Kleinheit von p keinen Beitrag zum Randintegral liefern,

²⁾ Siehe z. B. A. Föppl, Technische Mechanik, 5, Leipzig 1907, S. 111.

³⁾ Siehe G. Kirchhoff, Vorlesungen über Mechanik, Leipzig 1897, 4. Aufl., S. 448—458.

⁴⁾ Siehe A. Föppl, Technische Mechanik, 5, Leipzig 1907, S. 111.

so ist, falls man noch p als kreisförmig ansieht und $\partial n = -\partial r$ und $ds = r d\varphi$ (φ = Polarwinkel von r) setzt

$$\int_p \int_s \Delta A w dp = \frac{P}{8\pi q} \int_s \frac{\partial \Delta r^2 \log r}{\partial r} r d\varphi = \frac{P}{q}.$$

Wir haben jetzt nur noch die Funktion F in der angegebenen Weise zu ermitteln. Mit dieser Aufgabe bzw. mit der noch allgemeineren Aufgabe die Funktion F so zu bestimmen, daß sie innerhalb einer Ellipse der Gleichung (5) genügt und die Randbedingungen

$$F = \varphi \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial n} = \psi,$$

erfüllt, wobei φ und ψ gegebene Funktionen der Randpunkte sind, beschäftigt sich É. Mathieu⁵⁾ in einer sehr beachtenswerten Abhandlung. Natürlich könnte man versuchen, unser Problem mit Benutzung der Gedankengänge von Mathieu zu behandeln. Wir haben aber im folgenden einen anderen Weg eingeschlagen, der rascher und einfacher zum Ziele führt und außerdem eine zur numerischen Berechnung geeignete Lösung darstellt. Übrigens würde auch, wie wir zum Schluß kurz zeigen, das Mathieusche Problem sich nach unserer Methode ebenfalls in einfacher Weise erledigen⁶⁾.

§ 2.

Zur Bestimmung der Funktion F empfiehlt es sich, wie dies auch Mathieu tut⁷⁾, statt der rechtwinkligen Koordinaten xy elliptische Koordinaten α und β einzuführen. Diese sind, falls c die Exzentrizität derjenigen Ellipse ist, die die Mittelfläche begrenzt, definiert durch die Gleichungen:

$$(7) \quad x = c \cos i \beta \cos \alpha, \quad y = -c i \sin i \beta \sin \alpha.$$

Jede Kurve $\beta = \text{konst.}$ stellt bekanntlich wieder eine Ellipse dar, während jede Kurve $\alpha = \text{konst.}$ einer Hyperbel entspricht. Alle diese Ellipsen und Hyperbeln sind konfokal zu der Randellipse, außerdem ist jede Ellipse orthogonal zur Schar aller Hyperbeln.

⁵⁾ É. Mathieu, Journal de Mathématiques pures et appliquées, (2) 14 (1869), S. 378—411 insbes. S. 411.

⁶⁾ A. Haar hat gezeigt (Göttinger Nachrichten. Mathem. phys. Kl. 1907, S. 280—287), daß eine Funktion F existiert, die innerhalb eines im wesentlichen beliebigen Bereichs der Gleichung $\Delta A F = 0$ genügt, falls am Rande des Bereichs die Werte von F und $\frac{\partial F}{\partial n}$ beliebig vorgeschrieben sind. Die Eindeutigkeit dieser Lösung wurde schon vorher von Mathieu (l. c.) bewiesen.

⁷⁾ É. Mathieu, l. c. Journal de Mathématiques etc.

Im folgenden wollen wir wie bisher unter ΔF und $\Delta \Delta F$ die Ausdrücke

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4}$$

verstehen, in denen also die rechtwinkligen Koordinaten als unabhängige Variablen auftreten. Führt man die neuen Koordinaten ein, so erhält man

$$(8) \quad \Delta F = \frac{1}{c^2 (\sin^2 \alpha - \sin^2 i \beta)} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2} \right).$$

Hieraus folgt: Eine Lösung von $\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2} = 0$, wie z. B. die Reihe

$$(9) \quad F_1 = \sum_{n=0}^{\infty} k_n \cos n i \beta \cos n \alpha,$$

in der die k_n vorläufig beliebige Konstanten sind, stellt zugleich eine Lösung von $\Delta F = 0$ und also auch von $\Delta \Delta F = 0$ dar. Die Reihe (9) ist also eine Lösung von (5). Die Konstanten k_n sind später so zu bestimmen, daß die Randbedingungen (6) erfüllt sind, da aber zwei Randbedingungen vorhanden sind, so haben wir, um beiden zu genügen, noch eine zweite Lösung von $\Delta \Delta F = 0$ zu ermitteln.

Dazu beachten wir, daß die Gleichung $\Delta \Delta F = 0$ transformiert auf die neuen Koordinaten die Gestalt hat:

$$(10) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} = 0,$$

wobei

$$(11) \quad f = \frac{1}{c^2 (\sin^2 \alpha - \sin^2 i \beta)} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2} \right).$$

Wir setzen nun:

$$(12) \quad f = \cos n i \beta \cos n \alpha,$$

wodurch der Gleichung (10) genügt wird. Diesen Wert von f führen wir in (11) ein und bestimmen dann F aus der so erhaltenen Gleichung oder aus

$$(13) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2} = c^2 (\sin^2 \alpha - \sin^2 i \beta) \cos n i \beta \cos n \alpha.$$

Jede Lösung dieser Gleichung ist dann ebenfalls eine Lösung von $\Delta \Delta F = 0$. Setzt man in (13)

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2 \alpha}{2}, \quad \sin^2 i \beta = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2 i \beta}{2},$$

so geht (13) durch Anwendung der bekannten Formeln

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} \{ \cos (x - y) + \cos (x + y) \}$$

über in

$$(14) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2} \\ = \frac{c^2}{4} [-\cos i n \beta \cos (n-2) \alpha + \{\cos i (n-2) \beta + \cos i (n+2) \beta\} \cos n \alpha \\ - \cos i n \beta \cos (n+2) \alpha].$$

Um eine Lösung von (14) zu erhalten, machen wir den folgenden Ansatz, in dem die $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ Konstanten bedeuten und n eine beliebige positive ganze Zahl sein soll:

$$\mathfrak{A} \cos i n \beta \cos (n-2) \alpha + \mathfrak{B} \cos i (n-2) \beta \cos n \alpha + \mathfrak{C} \cos i (n+2) \beta \cos n \alpha \\ + \mathfrak{D} \cos i n \beta \cos (n+2) \alpha.$$

Führt man diesen Ausdruck anstatt F in (14) ein, so wird (14) hierdurch befriedigt, falls

$$\mathfrak{A} = -\frac{c^2}{4^2(n-1)}, \quad \mathfrak{B} = -\frac{c^2}{4^2(n-1)}, \quad \mathfrak{C} = \frac{c^2}{4^2(n+1)}, \quad \mathfrak{D} = \frac{c^2}{4^2(n+1)}$$

ist. Hat man nun eine Lösung von (14) oder was auf dasselbe hinauskommt von $\Delta \Delta F = 0$, so stellt diese Lösung multipliziert mit einer beliebigen Konstanten ebenfalls noch eine Lösung von $\Delta \Delta F = 0$ dar, daher ist der folgende Ausdruck eine Lösung von (5):

$$(15) \quad u_n = A_n \left\{ -\frac{\cos i n \beta \cos (n-2) \alpha}{n-1} - \frac{\cos i (n-2) \beta \cos n \alpha}{n-1} + \frac{\cos i (n+2) \beta \cos n \alpha}{n+1} \right. \\ \left. + \frac{\cos i n \beta \cos (n+2) \alpha}{n+1} \right\}.$$

Hier ist A_n eine zunächst ganz beliebige Konstante. Für $n=0$ und $n=1$ hat man statt (15) zu setzen:

$$(16) \quad u_0 = A_0 \{\cos i 2 \beta + \cos 2 \alpha\}, \\ u_1 = A_1 \left\{ \frac{\cos i 3 \beta \cos \alpha}{2} + \frac{\cos i \beta \cos 3 \alpha}{2} \right\}.$$

Ausführlicher geschrieben hat $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$, das natürlich ebenfalls eine Lösung von (5) ist, folgenden Wert:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = (A_0 - A_2) \frac{\cos i 2 \beta}{1} + (A_1 - A_3) \frac{\cos i 3 \beta}{2} \cos \alpha \\ + \left\{ (A_0 - A_2) + (A_2 - A_4) \frac{\cos i 4 \beta}{3} \right\} \cos 2 \alpha \\ + \left\{ (A_1 - A_3) \frac{\cos i \beta}{2} + (A_3 - A_5) \frac{\cos i 5 \beta}{4} \right\} \cos 3 \alpha \\ + \dots$$

Zur Abkürzung setzen wir

$$(17) \quad A_n - A_{n+2} = B_n \quad \text{und} \quad \sum u_n = F_2.$$

Der Ausdruck

$$(18) \quad \begin{aligned} F_2 = & B_0 \frac{\cos i 2 \beta}{1} + B_1 \frac{\cos i 3 \beta}{2} \cos \alpha + \left\{ B_0 + B_2 \frac{\cos i 4 \beta}{3} \right\} \cos 2 \alpha \\ & + \left\{ B_1 \frac{\cos i \beta}{2} + B_3 \frac{\cos i 5 \beta}{4} \right\} \cos 3 \alpha \\ & + \dots \dots \dots \\ & + \left\{ B_{n-2} \frac{\cos i (n-2) \beta}{n-1} + B_n \frac{\cos i (n+2) \beta}{n+1} \right\} \cos n \alpha \\ & + \dots \dots \dots \end{aligned}$$

in dem die B_n ebenso wie die A_n zunächst willkürliche Konstanten sind, stellt dann die zweite Lösung von (5) dar.

Für die Funktion F , die in dem Ausdruck (4) für die gesuchte Verückung w vorkommt, setzen wir nun (siehe Gl. (9) und (18))

$$(19) \quad F = F_1 + F_2 = k_0 + B_0 \frac{\cos i 2 \beta}{1} + \left\{ k_1 \cos i \beta + B_1 \frac{\cos i 3 \beta}{2} \right\} \cos \alpha \\ + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ k_n \cos i n \beta + B_{n-2} \frac{\cos i (n-2) \beta}{n-1} + B_n \frac{\cos i (n+2) \beta}{n+1} \right\} \cos n \alpha.$$

Mit Rücksicht auf (19) ergibt sich dann, daß

$$(20) \quad w = \frac{P}{8 \pi q} \left[r^2 \left\{ \log r - \frac{1}{2} \right\} + k_0 + B_0 \frac{\cos i 2 \beta}{1} + \left\{ k_1 \cos i \beta + B_1 \frac{\cos i 3 \beta}{2} \right\} \cos \alpha \right. \\ \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ k_n \cos i n \beta + B_{n-2} \frac{\cos i (n-2) \beta}{n-1} + B_n \frac{\cos i (n+2) \beta}{n+1} \right\} \cos n \alpha \right]$$

die Relationen (1) und (3) stets befriedigt, welche Werte man auch den Konstanten k_n und B_n beilegt. Wir haben also jetzt nur noch diese Konstanten so zu bestimmen, daß die zwei Randbedingungen (2) erfüllt sind. Außerdem ist noch die Konvergenz unserer Reihen zu beweisen.

§ 3.

Zur Bestimmung der Konstanten k_n und B_n führen wir in dem in (20) vorkommenden Ausdruck $r^2 \left\{ \log r - \frac{1}{2} \right\}$ ebenfalls die elliptischen Koordinaten ein und zwar wollen wir ihn, als Funktion von α aufgefaßt, ebenso wie es mit F geschah, in eine Fouriersche Reihe entwickeln; diese enthält, da die Einzellast im Mittelpunkt auflagert und also $x^2 = x^2 + y^2$ ist, nur Kosinustglieder, deren Koeffizienten natürlich noch Funktionen von β sind. Setzt man in $r^2 = x^2 + y^2$ die Werte (7) ein, so folgt:

$$\begin{aligned} r^2 &= c^2 (\cos^2 i \beta \cos^2 \alpha - \sin^2 i \beta \sin^2 \alpha) \\ &= \frac{c^2}{4} [(1 + \cos i 2 \beta)(1 + \cos 2 \alpha) - (1 - \cos i 2 \beta)(1 - \cos 2 \alpha)] \end{aligned}$$

oder

$$(21) \quad r^2 = \frac{c^2}{2} (\cos i 2\beta + \cos 2\alpha) = \frac{c^2 e^{2\beta}}{4} (1 + e^{-4\beta} + 2e^{-2\beta} \cos 2\alpha).$$

Hierdurch ist bereits r^2 durch eine Fouriersche Reihe dargestellt.

Um die Fouriersche Reihe für $\log r$ bzw. $r^2 \log r$ zu erhalten, haben wir zunächst (21) noch etwas umzuformen. Es ist nach (21)

$$r^2 = \frac{c^2}{4} (e^{2\beta} + e^{-2\beta} + e^{i2\alpha} + e^{-i2\alpha})$$

oder

$$r^2 = \frac{c^2 e^{2\beta}}{4} (1 + i e^{i\alpha} e^{-\beta}) (1 - i e^{i\alpha} e^{-\beta}) (1 + i e^{-i\alpha} e^{-\beta}) (1 - i e^{-i\alpha} e^{-\beta}).$$

Also hat man

$$\begin{aligned} \log r = \log \left(\frac{c e^{\beta}}{2} \right) &+ \frac{1}{2} \log (1 + i e^{i\alpha} e^{-\beta}) + \frac{1}{2} \log (1 - i e^{i\alpha} e^{-\beta}) \\ &+ \frac{1}{2} \log (1 + i e^{-i\alpha} e^{-\beta}) + \frac{1}{2} \log (1 - i e^{-i\alpha} e^{-\beta}). \end{aligned}$$

Für die Logarithmen der in Klammern stehenden Größen dürfen wir ihre Reihen einführen; denn diese Reihen konvergieren absolut, falls

$$|i e^{i\alpha} e^{-\beta}| < 1 \quad \text{und} \quad |i e^{-i\alpha} e^{-\beta}| < 1.$$

Der kleinste in Betracht kommende Wert von β , nämlich $\beta = 0$, entspricht derjenigen der konfokalen Ellipsen, die auf das Stück der x -Achse, das zwischen den zwei Brennpunkten liegt, zusammengeschrumpft ist. Mithin sind für $\beta > 0$ die zwei letzten Ungleichungen stets erfüllt. Führt man nun die Reihen ein, so ergibt sich nach leichter Rechnung

$$\begin{aligned} (22) \quad \log r = \log \left(\frac{c e^{\beta}}{2} \right) &+ 2 \frac{e^{-2\beta} \cos 2\alpha}{2} - 2 \frac{e^{-4\beta} \cos 4\alpha}{4} \\ &+ 2 \frac{e^{-6\beta} \cos 6\alpha}{6} - \dots - (-1)^n 2 \frac{e^{-2n\beta} \cos 2n\alpha}{2n} \dots \end{aligned}$$

und diese Reihe konvergiert absolut für alle α und β , falls nur $\beta > 0$ ist, d. h. die Konvergenz findet statt für alle Punkte der Mittelfläche, die außerhalb des geradlinigen Stücks zwischen den zwei Brennpunkten liegen.

Die Fouriersche Reihe für $r^2 \{\log r - \frac{1}{2}\}$ ergibt sich nun am einfachsten, wenn wir in diesem Ausdruck für r^2 und $\log r$ die Reihen (21) und (22) einsetzen und dann noch die Produkte der Kosinustglieder mittels der Formel $\cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos (x - y) + \cos (x + y))$ durch eine Summe solcher Glieder ersetzen. Man findet so:

$$\begin{aligned}
 r^2 \left\{ \log r - \frac{1}{2} \right\} = & \frac{c^2 e^{2\beta}}{4} \left\{ (1 + e^{-4\beta}) \log \left(\frac{ce^\beta}{2} \right) - \frac{1}{2} + \frac{e^{-4\beta}}{2} \right. \\
 & + \cos 2\alpha \left[2e^{-2\beta} \log \left(\frac{ce^\beta}{2} \right) + \frac{1}{2} e^{-6\beta} \right] \\
 & + \cos 4\alpha \left[\frac{e^{-4\beta}}{2 \cdot 1} - \frac{e^{-8\beta}}{2 \cdot 3} \right] \\
 & + \cos 6\alpha \left[-\frac{e^{-6\beta}}{3 \cdot 2} + \frac{e^{-10\beta}}{3 \cdot 4} \right] \\
 & + \dots \dots \dots \\
 & + \cos 2n\alpha \left[(-1)^n \frac{e^{-2n\beta}}{n(n-1)} + (-1)^{n+1} \frac{e^{-(2n+4)\beta}}{n(n+1)} \right] \\
 & + \dots \dots \dots \left. \right\}
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

Bei der Befriedigung der Grenzbedingungen brauchen wir noch den Wert vom Differentialquotienten von $r^2 \left\{ \log r - \frac{1}{2} \right\}$ nach der Normalen oder, was auf dasselbe herauskommt, den Wert von

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ r^2 \left(\log r - \frac{1}{2} \right) \right\} = 2r \log r \frac{\partial r}{\partial \beta}.
 \tag{24}$$

Nach (21) ist

$$2r \frac{\partial r}{\partial \beta} = \frac{c^2}{2} (e^{2\beta} - e^{-2\beta}).$$

Setzt man diesen Wert und den in (22) für $\log r$ erhaltenen Ausdruck in (24) ein, so folgt:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ r^2 \left(\log r - \frac{1}{2} \right) \right\} = & c^2 \left\{ \left(\frac{e^{2\beta} - e^{-2\beta}}{2} \right) \log \left(\frac{ce^\beta}{2} \right) + \left(\frac{1 - e^{-4\beta}}{2} \right) \cos 2\alpha \right. \\
 & - \left(\frac{e^{-2\beta} - e^{-6\beta}}{4} \right) \cos 4\alpha + \left(\frac{e^{-4\beta} - e^{-8\beta}}{6} \right) \cos 6\alpha \\
 & - \dots \dots \dots \\
 & \left. - (-1)^n \left(\frac{e^{-(2n-2)\beta} - e^{-(2n+2)\beta}}{2n} \right) \cos 2n\alpha \dots \right\}.
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

Auch die Reihen (23) und (25) konvergieren absolut für alle α und β , falls nur $\beta > 0$ ist.

§ 4.

Nach diesen Vorbereitungen gehen wir über zur Befriedigung der Grenzbedingungen (6) oder, was auf dasselbe hinauskommt, zur Bestimmung der Konstanten k_n und B_n . Bildet man die zwei Gleichungen (6), wobei für $r^2 (\log r - \frac{1}{2})$ und für den Differentialquotienten dieses Ausdrucks nach der Normalen n bzw. nach β die in (23) und (25) erhaltenen Werte einzusetzen sind und für F der Wert aus (19), so ergibt sich, falls wir noch festsetzen, daß der Randellipse der Wert $\beta = b$ entspricht:

$$\begin{aligned}
& k_0 + B_0 \frac{\cos i 2 b}{1} + \left\{ k_1 \cos i b + B_1 \frac{\cos i 3 b}{2} \right\} \cos \alpha \\
& + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ k_n \cos i n b + B_{n-2} \frac{\cos i (n-2) b}{n-1} + B_n \frac{\cos i (n+2) b}{n+1} \right\} \cos n \alpha \\
& = -\frac{c^2 e^{2b}}{4} \left\{ (1 + e^{-4b}) \log \left(\frac{c e^b}{2} \right) - \frac{1}{2} + \frac{e^{-4b}}{2} + \left[2 e^{-2b} \log \left(\frac{c e^b}{2} \right) + \frac{e^{-6b}}{2} \right] \cos 2 \alpha \right. \\
& \left. + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{e^{-2nb}}{n(n-1)} - \frac{e^{-(2n+4)b}}{n(n+1)} \right] \cos 2 n \alpha \right\}, \\
(26) \quad & - B_0 \frac{2i \sin i 2 b}{1} - \left\{ k_1 i \sin i b + B_1 3 i \frac{\sin i 3 b}{2} \right\} \cos \alpha \\
& - \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ k_n n i \sin i n b + B_{n-2} \frac{(n-2) i \sin i (n-2) b}{n-1} + B_n \frac{(n+2) i \sin i (n+2) b}{n+1} \right\} \cos n \alpha \\
& = -c^2 \left\{ \left(\frac{e^{2b} - e^{-2b}}{2} \right) \log \left(\frac{c e^b}{2} \right) + \left(\frac{1 - e^{-4b}}{2} \right) \cos 2 \alpha \right. \\
& \left. + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(e^{-(2n-2)b} - e^{-(2n+2)b})}{2n} \cos 2 n \alpha \right\}.
\end{aligned}$$

In beiden Gleichungen müssen alle Glieder mit $\cos 0 \alpha$ für sich verschwinden, ebenso alle Glieder mit $\cos \alpha$ usw.; hierdurch erhalten wir zweimal unendlich viele Gleichungen zur Bestimmung der Konstanten k_n und B_n .

Setzt man alle Glieder mit $\cos \alpha$ gleich null, so ergibt sich, da rechts beidemale keine solchen Glieder vorkommen,

$$k_1 = 0, \quad B_1 = 0.$$

Hieraus und aus dem Umstand, daß rechts auch keine Terme mit $\cos 3 \alpha$, $\cos 5 \alpha$, ... auftreten, folgt allgemein:

$$(27) \quad k_{2n-1} = 0 \quad \text{und} \quad B_{2n-1} = 0 \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \dots$$

Setzt man die Glieder mit $\cos 0 \alpha$ gleich null, so findet man, da

$$\begin{aligned}
i \sin i 2 b &= - \left(\frac{e^{2b} - e^{-2b}}{2} \right) \quad \text{und} \quad \cos i 2 b = \frac{e^{2b} + e^{-2b}}{2}, \\
(28) \quad k_0 &= \frac{c^2}{8} (e^{2b} - e^{-2b}), \quad B_0 = -\frac{c^2}{2} \log \left(\frac{c e^b}{2} \right).
\end{aligned}$$

Weiter ergibt sich für k_2 und B_2 :

$$\begin{aligned}
(29) \quad k_2 \{ 3 i \sin i 2 b + i \sin i 6 b \} &= -\frac{c^2}{4} \{ e^{4b} + e^{-4b} - 2 \}, \\
\frac{1}{3} B_2 \{ 3 i \sin i 2 b + i \sin i 6 b \} &= \frac{c^2}{4} \left\{ e^{2b} - \frac{1}{2} e^{-2b} - \frac{1}{2} e^{-6b} \right\}.
\end{aligned}$$

Alle weiteren k_{2n} und B_{2n} berechnen sich aus den folgenden zwei Gleichungen:

$$(30) \quad \begin{aligned} k_{2n} \cos i 2n b + B_{2n} \frac{\cos i (2n+2) b}{2n+1} &= -B_{2n-2} \frac{\cos i (2n-2) b}{2n-1} \\ &\quad + (-1)^{n+1} \frac{c^2}{4n} \left[\frac{e^{-(2n-2)b}}{n-1} - \frac{e^{-(2n+2)b}}{n+1} \right], \\ -k_{2n} i 2n \sin i 2n b - B_{2n} \frac{i (2n+2) \sin i (2n+2) b}{2n+1} &= B_{2n-2} \frac{i (2n-2) \sin i (2n-2) b}{2n-1} \\ &\quad + (-1)^n \frac{c^2}{2n} [e^{-(2n-2)b} - e^{-(2n+2)b}]. \end{aligned}$$

Hieraus folgt, falls man in den mit c^2 multiplizierten Gliedern

$$\cos i (2n+2) b = \frac{e^{(2n+2)b} + e^{-(2n+2)b}}{2}, \quad i \sin i (2n+2) b = - \left(\frac{e^{(2n+2)b} - e^{-(2n+2)b}}{2} \right) \text{ usw.}$$

setzt:

$$(31) \quad \begin{aligned} k_{2n} \{ - (2n+1) i \sin i 2b - i \sin i (4n+2) b \} \\ = \frac{B_{2n-2}}{2n-1} \{ 2n i \sin i 4b + 2 i \sin i 4n b \} + (-1)^{n+1} \frac{c^2}{2n} \left\{ \frac{e^{4b} n - n + 1 - e^{-4nb}}{n-1} \right\}, \end{aligned}$$

$$(32) \quad \begin{aligned} \frac{B_{2n}}{2n+1} \{ (2n+1) i \sin i 2b + i \sin i (4n+2) b \} \\ = \frac{B_{2n-2}}{2n-1} \{ (2n-1) i \sin i 2b + i \sin i (4n-2) b \} \\ + (-1)^{n+1} \frac{c^2}{2} \left\{ \frac{e^{2b}}{n-1} \left(1 - \frac{1 + e^{-4nb}}{2n} \right) - \frac{e^{-2b}}{n+1} \left(1 + \frac{1 + e^{-4nb}}{2n} \right) \right\} \\ (n = 2, 3, 4, \dots). \end{aligned}$$

Nachdem $k_0, B_0; k_2, B_2$ ermittelt sind, ergeben sich aus diesen zwei Gleichungen zunächst k_4, B_4 , darauf k_6, B_6 usw.

§ 5.

Wir haben nun noch die Konvergenz unserer Entwicklungen nachzuweisen. Von den Reihen für $r^2 \left(\log r - \frac{1}{2} \right)$ und $\frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ r^2 \left(\log r - \frac{1}{2} \right) \right\}$ ist dies bereits geschehen. Wir haben die Gültigkeit beider Entwicklungen erkannt unter der einzigen Voraussetzung, daß $\beta > 0$ ist. Wir haben daher jetzt nur noch von der Reihe (19) die Konvergenz sowie die viermalige gliedweise Differentiation zu beweisen. Dazu ist es nötig, die durch (31) und (32) gelieferten Werte für k_{2n} und B_{2n} abzuschätzen.

Dies soll zunächst für B_{2n} geschehen. Hierzu müssen wir den Ausdruck für B_{2n} umformen, und zwar wollen wir die rechts vorkommende Größe B_{2n-2} eliminieren. Zu diesem Zweck beachten wir, daß in (32) der Faktor von B_{2n-2} aus dem Faktor von B_{2n} dadurch hervorgeht, daß man n durch $n-1$ ersetzt. Den Faktor von B_{2n} bezeichnen wir mit f_{2n} ,

also

$$(33) \quad f_{2n} = \frac{(2n+1) i \sin i 2b + i \sin i (4n+2)b}{2n+1}.$$

Der Faktor von B_{2n-2} ist alsdann mit f_{2n-2} zu bezeichnen. Wir bilden nun die Gleichung (32) mit Benutzung dieser Abkürzung nacheinander für den Fall, wo n die folgenden Werte hat: $n, n-1, \dots, 3, 2$. Wir erhalten so:

$$\begin{aligned} B_{2n} f_{2n} &= B_{2n-2} f_{2n-2} + (-1)^{n+1} \frac{c^2}{2} \left\{ \frac{e^{2b}}{n-1} \left(1 - \frac{1+e^{-4nb}}{2n} \right) - \frac{e^{-2b}}{n+1} \left(1 + \frac{1+e^{-4nb}}{2n} \right) \right\}, \\ B_{2n-2} f_{2n-2} &= B_{2n-4} f_{2n-4} + (-1)^n \frac{c^2}{2} \left\{ \frac{e^{2b}}{n-2} \left(1 - \frac{1+e^{-4(n-1)b}}{2(n-1)} \right) - \frac{e^{-2b}}{n} \left(1 + \frac{1+e^{-4(n-1)b}}{2(n-1)} \right) \right\}, \\ &\dots \dots \dots \\ B_4 f_4 &= B_2 f_2 + (-1)^3 \frac{c^2}{2} \left\{ \frac{e^{2b}}{1} \left(1 - \frac{1+e^{-8b}}{4} \right) - \frac{e^{-2b}}{3} \left(1 + \frac{1+e^{-8b}}{4} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Durch Addition folgt:

$$(34) \quad B_{2n} f_{2n} = B_2 f_2 + \frac{c^2}{2} e^{2b} \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k-1} \left(1 - \frac{1+e^{-4kb}}{2k} \right) - \frac{c^2}{2} e^{-2b} \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \left(1 + \frac{1+e^{-4kb}}{2k} \right),$$

womit die gewünschte Elimination von B_{2n-2} bereits bewerkstelligt ist.

Die Formel (34) dient zur Abschätzung der B_{2n} . Zunächst wollen wir Grenzen für die in (34) rechts auftretende Reihe

$$(35) \quad \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k-1} \left(1 - \frac{1}{2k} \right) = -\frac{1}{1} \left(1 - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{6} \right) + \dots + \frac{(-1)^{k+1}}{k-1} \left(1 - \frac{1}{2k} \right) + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n-1} \left(1 - \frac{1}{2n} \right)$$

ermitteln. Dies ist eine alternierende Reihe, bei der die aufeinanderfolgenden Glieder dem Betrag nach beständig kleiner werden; denn der Quotient aus dem allgemeinen Gliede $\frac{(-1)^{k+1}}{k-1} \left(1 - \frac{1}{2k} \right)$ und dem ihm vorangehenden ist dem Betrag nach gleich:

$$\frac{(2k-1)(k-2)(2k-2)}{(k-1)2k(2k-3)} = \frac{(2k-1)(k-2)}{k(2k-3)} = 1 - \frac{2k-2}{k(2k-3)}.$$

Betrachtet man von der Reihe das zweite Glied und das ihm vorangehende, so ist in dem eben gebildeten Quotienten $k=3$ zu setzen, während sonst $k>3$ zu nehmen ist, mithin ist der Quotient stets <1 . In derselben Weise, wie man die Konvergenz einer alternierenden Reihe, deren Glieder dem Betrage nach beständig kleiner werden, nachweist, er-

gibt sich, daß die Summe der Reihe zwischen Null und dem Wert des ersten Gliedes liegt. Also:

$$0 > \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k-1} \left(1 - \frac{1}{2k}\right) > -\frac{1}{1} \left(1 - \frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{4},$$

oder falls Θ_1 eine geeignet gewählte Zahl zwischen 0 und 1 bedeutet

$$(36) \quad \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k-1} \left(1 - \frac{1}{2k}\right) = -\frac{3}{4} \Theta_1.$$

Auch die in (34) enthaltene Reihe $-\sum_{k=2}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \left(1 + \frac{1}{2k}\right)$ ist alternierend und ihre Glieder werden dem Betrag nach beständig kleiner. Daher ist, falls wieder Θ_2 eine geeignet gewählte Zahl zwischen 0 und 1 ist:

$$(37) \quad -\sum_{k=2}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \left(1 + \frac{1}{2k}\right) = \frac{5}{12} \Theta_2.$$

Endlich sind auch die in (34) ebenfalls vorkommenden Reihen $-\sum_{k=2}^n \frac{(-1)^{k+1} e^{-4kb}}{(k-1)2k}$ und $-\sum_{k=2}^n \frac{(-1)^{k+1} e^{-4kb}}{(k+1)2k}$ alternierende mit dem Betrag nach beständig kleiner werdenden Gliedern. Daher ist, wenn wieder Θ_3 und Θ_4 geeignet gewählte Zahlen zwischen 0 und 1 bedeuten:

$$(38) \quad -\sum_{k=2}^n \frac{(-1)^{k+1} e^{-4kb}}{(k-1)2k} = \Theta_3 \frac{e^{-8b}}{4},$$

$$(39) \quad -\sum_{k=2}^n \frac{(-1)^{k+1} e^{-4kb}}{(k+1)2k} = \Theta_4 \frac{e^{-8b}}{12}.$$

Setzt man jetzt für die in (34) rechts auftretenden Reihen (36) bis (38) ihre eben ermittelten Werte ein, so ergibt sich:

$$B_{2n} f_{2n} = B_2 f_2 + \frac{c^2}{2} e^{2b} \left\{ -\frac{3}{4} \Theta_1 + \frac{\Theta_3}{4} e^{-8b} \right\} + \frac{c^2}{2} e^{-2b} \left\{ \frac{5}{12} \Theta_2 + \frac{\Theta_4}{12} e^{-8b} \right\}.$$

Da $e^{-8b} < 1$ und alle Θ_i der Bedingung $\Theta < \Theta_i < 1$ genügen, so ist:

$$\left| -\frac{3}{4} \Theta_1 + \frac{\Theta_3}{4} e^{-8b} \right| < \frac{3}{4}, \quad \left| \frac{5}{12} \Theta_2 + \frac{\Theta_4}{12} e^{-8b} \right| < \frac{1}{2}.$$

Also hat man:

$$(40) \quad |B_{2n} f_{2n}| < |B_2 f_2| + \frac{3}{8} c^2 e^{2b} + \frac{c^2 e^{-2b}}{4}.$$

Nach (33) ist ferner:

$$(41) \quad |f_{2n}| > \frac{-i \sin i(4n+2)b}{2n+1}.$$

Zur Abkürzung bezeichnen wir den in (40) rechts stehenden von n unabhängigen Ausdruck mit K , also

$$(42) \quad K = |B_2 f_2| + \frac{3}{8} c^2 e^{2b} + \frac{c^2}{4} e^{-2b}.$$

Wegen (41) ist dann:

$$|B_{2n}| < \frac{K(2n+1)}{-i \sin i(4n+2)b}.$$

Für hinreichend große n ist $-i \sin i(4n+2)b = \frac{e^{(4n+2)b}}{2}$ und demgemäß

$$(43) \quad |B_{2n}| < \frac{K2(2n+1)}{e^{(4n+2)b}},$$

wobei, wie erwähnt, K eine endliche und von n unabhängige positive Zahl ist.

Wir haben jetzt noch k_{2n} abzuschätzen. Man hat nach (31)

$$(44) \quad |k_{2n}| \leq \frac{|B_{2n-2}|}{2n-1} \left| \frac{2n i \sin i 4b + 2i \sin i 4nb}{-(2n+1)i \sin i 2b - i \sin i(4n+2)b} \right| \\ + \frac{c^2}{2n(n-1)} \left| \frac{e^{4b}n - n + 1 - e^{-4nb}}{-(2n+1)i \sin i 2b - i \sin i(4n+2)b} \right|.$$

Nach (43) ist für hinreichend große n :

$$(45) \quad |B_{2n-2}| < \frac{K2(2n-1)}{e^{(4n-2)b}}.$$

Für den Nenner $-(2n+1)i \sin i 2b - i \sin i(4n+2)b$ ergibt sich:

$$|-(2n+1)i \sin i 2b - i \sin i(4n+2)b| > -i \sin i(4n+2)b$$

und folglich, wenigstens für hinreichend große n :

$$(46) \quad |-(2n+1)i \sin i 2b - i \sin i(4n+2)b| > \frac{1}{2} e^{(4n+2)b}$$

Unter der gleichen Voraussetzung kann man ferner setzen:

$$(47) \quad |2n i \sin i 4b + 2i \sin i 4nb| = |2i \sin i 4nb| = e^{4nb}$$

und

$$(48) \quad e^{4b}n - n + 1 - e^{-4nb} = (e^{4b} - 1)n.$$

Mithin ist, falls n genügend groß ist, zufolge von (44) bis (48)

$$|k_{2n}| < \frac{K4}{e^{4nb}} + \frac{c^2(e^{4b}-1)}{(n-1)e^{(4n+2)b}}.$$

Für hinreichend große n läßt sich daher eine konstante und von n unabhängige positive Zahl M angeben, so daß

$$(49) \quad |k_{2n}| < \frac{M}{e^{4nb}}.$$

Durch die Ungleichungen (43) und (49) sind B_{2n} und k_{2n} abgeschätzt.

§ 6.

Wir gehen jetzt über zum Nachweis der Konvergenz der durch (19) dargestellten Reihe für F ; außerdem ist noch die Berechtigung der 4 maligen gliedweisen Differentiation dieser Entwicklung zu zeigen. Mit Rücksicht auf die in (43) und (49) erhaltenen Grenzen für B_{2n} und k_{2n} ergibt sich, daß die Glieder der Reihe (19) für F dem Betrag nach schließlich kleiner werden als diejenigen der Reihe:

$$(50) \quad \sum_n \left[\frac{M}{e^{4nb}} \cos i 2n\beta + 2K \left\{ \frac{\cos i(2n-2)\beta}{e^{(4n-2)b}} + \frac{\cos i(2n+2)\beta}{e^{(4n+2)b}} \right\} \right] |\cos 2n\alpha|.$$

Die Konvergenz dieser Reihe, deren sämtliche Glieder positiv sind, ist ohne weiteres ersichtlich, falls $0 \leq \beta \leq b$ und daher konvergiert auch die Reihe F absolut für alle α und β innerhalb der Platte und auf dem Rande. Um die Randbedingungen in Erfüllung zu bringen, hatten wir die Reihe F gliedweise nach β differenziert und dann $\beta = b$ gesetzt; auch dies ist gestattet, da das gleiche bei der Reihe (50) erlaubt ist.

Wir haben nun noch zu zeigen, daß auch die bei der Bildung von $\Delta\Delta F$ in Betracht kommenden gliedweisen Differentiationen gestattet sind. Für den einen Teil von F , nämlich von der im vorangehenden mit F_1 bezeichneten Reihe (9) ist dies sofort ersichtlich. Denn man hat, falls man wieder wie früher unter ΔF_1 und $\Delta\Delta F_1$ die von den rechtwinkligen Koordinaten abhängigen bekannten Ausdrücke versteht:

$$(51) \quad \Delta F_1 = \frac{2}{c^2 (\cos 2i\beta - \cos 2\alpha)} \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial \beta^2} \right).$$

Da nun wegen (49) die Glieder von F_1 schließlich dem Betrag nach kleiner werden als die entsprechenden Glieder der Reihe

$$\sum_n \frac{M}{e^{4nb}} \cos 2n i \beta |\cos 2n\alpha|,$$

so erkennt man ohne weiteres, daß bei F_1 die in (51) vorkommenden Differentiationen gliedweise vollzogen werden dürfen, und zwar für alle Punkte im Inneren der Platte und auf dem Rande, nur die zwei Brennpunkte $\beta = 0, \alpha = 0$ und $\beta = 0, \alpha = \pi$ sind auszunehmen, da für beide der Nenner von (51) verschwindet. Da nun bereits $\frac{\partial^2 F_1}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial \beta^2} = 0$ ist, so sind selbstverständlich auch die gliedweisen Differentiationen von $\Delta\Delta F_1$ gestattet und außerdem ist $\Delta\Delta F_1 = 0$.

Wir haben nun noch analoge Betrachtungen für F_2 anzustellen. Man hat nach (18)

$$\begin{aligned}
 (52) \quad \frac{\partial^2 F_2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial \beta^2} &= B_0 2^2 (\cos i 2 \beta - \cos 2 \alpha) \\
 &+ \frac{B_2}{3} (\{4^2 - 2^2\} \cos i 4 \beta \cos 2 \alpha - \{4^2 - 2^2\} \cos i 2 \beta \cos 4 \alpha) \\
 &+ \frac{B_4}{5} (\{6^2 - 4^2\} \cos i 6 \beta \cos 4 \alpha - \{6^2 - 4^2\} \cos i 4 \beta \cos 6 \alpha) \\
 &+ \dots
 \end{aligned}$$

Wegen (43) ist die 2 malige gliedweise Differentiation von F_2 nach α und auch nach β gestattet und beide so erhaltenen Reihen konvergieren absolut innerhalb der ganzen Platte und auf dem Rande. Setzt man zur Abkürzung:

$$(53) \quad N = \cos i 2 \beta - \cos 2 \alpha,$$

so geht wegen $\cos i 4 \beta = 2 \cos^2 i 2 \beta - 1$ und $\cos 4 \alpha = 2 \cos^2 2 \alpha - 1$ der Faktor von $\frac{B_2}{3}$ über in:

$$3 \cdot 4 (2 \cos 2 \alpha \cos i 2 \beta + 1) N.$$

Für den Faktor von $\frac{B_4}{5}$ findet man analog wegen $\cos i 6 \beta = 2 \cos i 4 \beta \cos i 2 \beta - \cos i 2 \beta$ und $\cos 6 \alpha = 2 \cos 4 \alpha \cos 2 \alpha - \cos 2 \alpha$

$$5 \cdot 4 (2 \cos 4 \alpha \cos i 4 \beta N + \cos i 4 \beta \cos 2 \alpha - \cos i 2 \beta \cos 4 \alpha).$$

Der hier innerhalb der Klammer vorkommende Ausdruck $\cos i 4 \beta \cos 2 \alpha - \cos i 2 \beta \cos 4 \alpha$ ist, abgesehen von einem Zahlenfaktor, identisch mit dem Faktor von $\frac{B_2}{3}$ in (52) und wird ebenso wie dieser umgeformt. Verfährt man in derselben Weise mit den übrigen Termen von (52), so ergibt sich schließlich:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 F_2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial \beta^2} &= B_0 4 N \\
 &+ B_2 4 (2 \cos 2 \alpha \cos i 2 \beta + 1) N \\
 &+ B_4 4 (2 \cos 4 \alpha \cos i 4 \beta + 2 \cos 2 \alpha \cos i 2 \beta + 1) N \\
 &+ \dots
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 (54) \quad \Delta F_2 &= \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2} = \frac{2}{c^2 N} \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial \beta^2} \right) \\
 &= \frac{8}{e^2} [B_0 + B_2 (2 \cos 2 \alpha \cos i 2 \beta + 1) + \dots \\
 &\quad + B_{2n} (2 \cos 2n \alpha \cos i 2n \beta + 2 \cos (2n-2) \alpha \cos i (2n-2) \beta + \dots \\
 &\quad + 2 \cos 2 \alpha \cos i 2 \beta + 1) \\
 &\quad + \dots].
 \end{aligned}$$

Auch diese Reihe konvergiert, abgesehen von den zwei Brennpunkten, innerhalb der ganzen Platte und auf dem Rande, und zwar gilt dies auch dann noch, wenn man jedes der Produkte $\cos 2\alpha \cos i2\beta$, $\cos 4\alpha \cos i4\beta$, ... überall durch seinen Betrag ersetzt. Endlich sieht man auch sofort ein, daß man $\Delta \Delta F_2$ aus (54) mittels gliedweiser Differentiationen gewinnt, die wieder innerhalb des genannten Bereichs gestattet sind. Aus (54) ergibt sich wieder das bereits früher erhaltene Resultat, daß $\Delta \Delta F_2 = 0$ ist, da jedes Glied von der Form $\cos k\alpha \cos ik\beta$ ($k = 2, 4, 6, \dots$) der Gleichung $\Delta w = 0$ genügt. Damit ist der Konvergenzbeweis erledigt. Die numerische Ermittlung von w geschieht selbstverständlich direkt nach der Formel (20), wobei man $r^2 (\log r - \frac{1}{2})$ ohne Benützung der zugehörigen Reihe berechnet.

§ 7.

Wir haben nun noch zu zeigen, daß in dem Fall, wo die Exzentrizität unserer elliptischen Platte in Null übergeht, alsdann die erhaltene Lösung identisch ist mit der Deformation einer kreisförmigen am Rande eingeklemmten Platte, die mit einer Einzellast im Mittelpunkt beschwert ist.

Aus der Gleichung der Randellipse nämlich

$$\frac{x^2}{c^2 \cos^2 i b} + \frac{y^2}{c^2 i^2 \sin^2 i b} = 1$$

folgt, daß ihre Halbachsen A und B dargestellt sind durch

$$A = c \cos i b = c \left(\frac{e^b + e^{-b}}{2} \right),$$

$$B = -c i \sin i b = c \left(\frac{e^b - e^{-b}}{2} \right).$$

Geht die Ellipse über in einen Kreis, wird also $A = B$, so ist $c e^{-b}$ zu vernachlässigen gegen $c e^b$, und für den Radius A_0 des Kreises erhält man:

$$(55) \quad A_0 = \frac{c e^b}{2}.$$

Eine beliebige der bereits in § 1 erwähnten Ellipsen, die konfokal zur Randellipse sind, wird dargestellt durch:

$$\frac{x^2}{c^2 \cos^2 i \beta} + \frac{y^2}{c^2 i^2 \sin^2 i \beta} = 1.$$

Gleichzeitig mit der Randellipse geht auch diese soeben betrachtete Ellipse über in einen Kreis, dessen Radius wir mit R bezeichnen wollen. Für R ergibt sich

$$(56) \quad R = \frac{c e^\beta}{2}.$$

Im Ausdruck (20) für die Deformation w treten auf die Glieder:

$$k_0, \quad B_0 \cos i 2 \beta, \quad k_2 \cos i 2 \beta, \quad B_0, \quad B_2 \cos i 4 \beta, \quad \dots,$$

während alle k_n und B_n mit ungeradem n verschwinden. Aus den in (28) für k_0 und B_0 erhaltenen Werten findet man, daß im Fall des Kreises

$$(57) \quad k_0 = \frac{e^2 e^{2b}}{8} = \frac{A_0^2}{2},$$

$$B_0 \cos i 2 \beta = -R^2 \log A_0.$$

zu setzen ist. Alle weiteren Glieder aber sind, wie aus ihren in (29), (31) und (32) angegebenen Werten folgt, zu vernachlässigen.

Das in (20) vorkommende r ist identisch mit der soeben mit R bezeichneten Größe. Mithin geht wegen (55), (56) und (57) der Ausdruck (20) für die Deformation w im Fall der kreisförmigen Platte über in:

$$(58) \quad w = \frac{P}{8\pi q} \left[R^2 \log \left(\frac{R}{A_0} \right) + \frac{1}{2} (A_0^2 - R^2) \right].$$

Dies stimmt tatsächlich überein mit der wohlbekannten Lösung für die kreisförmige Platte⁸⁾.

§ 8.

Wir wollen nun noch den Fall betrachten, wo eine elliptische mit dem Gewicht P im Mittelpunkt beschwerte Platte am Rande gestützt ist. Gesucht wird die Deformation der Mittelfläche, die wieder klein im Vergleich zur Plattendicke sein soll. Das Koordinatensystem und die Bezeichnungen wählen wir wieder so wie früher. Das gestellte Problem ist identisch mit der folgenden mathematischen Aufgabe⁹⁾: Gesucht wird diejenige Funktion w , die innerhalb der Platte, aber mit Ausnahme des Mittelpunktes der Gleichung

$$(59) \quad \Delta \Delta w = 0$$

genügt und die folgenden zwei Randbedingungen erfüllt:

$$(60) \quad w = 0,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cos^2 \varphi + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin^2 \varphi + \frac{\Theta}{1+\Theta} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0.$$

Hier ist φ der Winkel zwischen der x -Achse und der Normalen n der Randellipse; dabei ist es offenbar gleichgültig, ob wir unter n die äußere

⁸⁾ Siehe z. B. Love, Lehrbuch der Elastizität, deutsch von A. Timpe, Leipzig und Berlin 1907, S. 561.

⁹⁾ Siehe z. B. G. Kirchhoff, Vorlesungen über Mechanik, 4. Aufl., Leipzig 1897, S. 448 u. f.

oder innere Normale verstehen. Im Mittelpunkt und seiner nächsten Umgebung p hat w wieder die Bedingung (3), nämlich

$$(61) \quad P = \frac{4}{3} K h^3 \frac{1+2\Theta}{1+\Theta} \iint_p \Delta \Delta w dp = q \iint_p \Delta \Delta w dp.$$

zu befriedigen.

Zur Lösung verwenden wir wieder den Ansatz (20), nämlich

$$(62) \quad w = \frac{P}{8\pi q} \left[r^2 \left(\log r - \frac{1}{2} \right) + k_0 + B_0 \frac{\cos i 2\beta}{1} + \left\{ k_1 \cos i \beta + B_1 \frac{\cos i 3\beta}{2} \right\} \cos \alpha \right. \\ \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ k_n \cos n i \beta + B_{n-2} \frac{\cos i (n-2)\beta}{n-1} + B_n \frac{\cos i (n+2)\beta}{n+1} \right\} \cos n \alpha \right].$$

Hierdurch wird der Gleichung (59) und der Bedingung (61) genügt. Man hat also jetzt nur noch die Konstanten $k_0, B_0, k_1, B_1, \dots$ so zu bestimmen, daß auch die zwei Grenzbedingungen (60) erfüllt sind.

§ 9.

Zur Befriedigung der Grenzbedingungen haben wir zunächst in der zweiten Gleichung (60) die elliptischen Koordinaten α, β einzuführen. Hier treten die Differentialquotienten $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ und $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ auf. Man hat nun für den Rand, wo $w = 0$ ist und demgemäß auch $\frac{\partial w}{\partial \alpha}$ und $\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}$ verschwinden:

$$(63) \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{\beta=b} = \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \beta \partial \alpha} \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \beta} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} \right\}_{\beta=b}, \\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{\beta=b} = \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial \beta \partial \alpha} \left(\frac{\partial \beta}{\partial y} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) + \frac{\partial w}{\partial \beta} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x \partial y} \right\}_{\beta=b}, \\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{\beta=b} = \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \left(\frac{\partial \beta}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \beta \partial \alpha} \frac{\partial \beta}{\partial y} \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial \beta} \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} \right\}_{\beta=b}.$$

Sämtliche Differentialquotienten sind hier ebenso wie in (60) für den Rand, also $\beta = b$, zu bilden.

Um die hier vorkommenden Differentialquotienten $\frac{\partial \beta}{\partial x}, \frac{\partial \beta}{\partial y}, \frac{\partial \alpha}{\partial x}, \frac{\partial \alpha}{\partial y}, \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 \beta}{\partial x \partial y}$ auszudrücken durch α und β , gehen wir aus von den aus (7) folgenden Relationen:

$$(64) \quad \frac{x^2}{c^2 \cos^2 i \beta} - \frac{y^2}{c^2 \sin^2 i \beta} = 1, \quad \frac{x^2}{c^2 \cos^2 \alpha} - \frac{y^2}{c^2 \sin^2 \alpha} = 1.$$

Hieraus folgt, wenn wir die Differentialquotienten gleich für den Rand also für $\beta = b$ bilden und zur Abkürzung

$$(65) \quad \cos^2 i b - \cos^2 \alpha = T$$

setzen:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial \beta}{\partial x}\right)_{\beta=b} &= -\frac{i \cos \alpha \sin i b}{c T}, & \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)_{\beta=b} &= -\frac{\sin \alpha \cos i b}{c T}, \\
 \left(\frac{\partial \beta}{\partial y}\right)_{\beta=b} &= \frac{\sin \alpha \cos i b}{c T}, & \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)_{\beta=b} &= -\frac{i \cos \alpha \sin i b}{c T}, \\
 (66) \quad \left(\frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2}\right)_{\beta=b} &= \frac{i \sin i 2 b}{2 c^2 T^2} \left(\cos 2 \alpha - \frac{\sin^2 2 \alpha}{T}\right), \\
 \left(\frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2}\right)_{\beta=b} &= -\frac{i \sin i 2 b}{2 c^2 T^2} \left(\cos 2 \alpha - \frac{\sin^2 2 \alpha}{T}\right), \\
 \left(\frac{\partial^2 \beta}{\partial x \partial y}\right)_{\beta=b} &= \frac{\sin 2 \alpha}{2 c^2 T^2} \left(\cos i 2 b + \frac{\sin^2 i 2 b}{T}\right).
 \end{aligned}$$

Nun sind noch die in der zweiten Gleichung (60) vorkommenden Größen $\cos \varphi$ und $\sin \varphi$ durch α und β auszudrücken. Man hat $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_b}$, wobei $\left(\frac{dy}{dx}\right)_b$ den Differentialquotienten für die Randellipse bedeutet, für die β den konstanten Wert b hat. Also ist

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{1}{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)_b^2}.$$

Die hier vorkommende Größe $\left(\frac{dx}{dy}\right)_b^2$ ergibt sich durch Differentiation der zwei Gleichungen (7) bei konstantem b . Man findet so mit Rücksicht auf (66)

$$\cos^2 \varphi = -\frac{\sin^2 i b \cos^2 \alpha}{T} = c^2 T \left(\frac{\partial \beta}{\partial x}\right)_{\beta=b}^2$$

und analog:

$$\begin{aligned}
 (67) \quad \cos \varphi \sin \varphi &= -\frac{i \cos i b \sin i b \cos \alpha \sin \alpha}{T} = c^2 T \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial x}\right)_{\beta=b}, \\
 \sin^2 \varphi &= \frac{\cos^2 i b \sin^2 \alpha}{T} = c^2 T \left(\frac{\partial \beta}{\partial y}\right)_{\beta=b}^2.
 \end{aligned}$$

Um nun zunächst die drei ersten Terme der zweiten Gleichung (60) zu erhalten, multiplizieren wir die Gleichungen (63) der Reihe nach mit $\cos^2 \varphi$, $2 \cos \varphi \sin \varphi$ und $\sin^2 \varphi$ und addieren dann. Wir finden so:

$$\begin{aligned}
 (68) \quad & \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cos^2 \varphi + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cos \varphi \sin \varphi + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin^2 \varphi \\
 &= \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \left\{ \left(\frac{\partial \beta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial y}\right)^2 \right\} c^2 T + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \beta \partial \alpha} \left\{ \left(\frac{\partial \beta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial y}\right)^2 \right\} \left\{ \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right\} c^2 T \\
 &+ \frac{\partial w}{\partial \beta} \left\{ \frac{\partial \beta}{\partial x} \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} + \frac{\partial \beta}{\partial y} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial \beta}{\partial y} \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial y} \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} \right) \right\} c^2 T, \\
 &\beta = b.
 \end{aligned}$$

Hier sind noch die Koeffizienten von $\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial \beta \partial \alpha}$ und $\frac{\partial w}{\partial \beta}$ zu berechnen. Aus den in (66) angegebenen Werten folgt sofort:

$$(69) \quad \left(\frac{\partial \beta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{c^2 T}, \quad (\beta = b).$$

$$(70) \quad \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0.$$

Ferner ist wegen (69)

$$(71) \quad \frac{\partial \beta}{\partial x} \left\{ \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} + \frac{\partial \beta}{\partial y} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x \partial y} \right\} + \frac{\partial \beta}{\partial y} \left\{ \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial y} \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} \right\} \\ = \frac{c \beta}{\partial x} \frac{\partial \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial y} \right)^2}{2 \partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} \frac{\partial \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial y} \right)^2}{2 \partial y} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \frac{1}{c^2 T^2}.$$

Setzt man hier

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x}, \\ \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial y}$$

und beachtet man, daß die in den vorangehenden Formeln auftretenden Differentialquotienten $\frac{\partial \beta}{\partial x}$ und $\frac{\partial \beta}{\partial y}$ ebenfalls für $\beta = b$ zu bilden sind, so daß also $\frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{\partial b}{\partial x}$ und $\frac{\partial \beta}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial y}$ ist, so ergibt sich für die rechte Seite von (71)

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \frac{1}{c^2 T^2} \\ = -\frac{1}{2} \left\{ \left[\left(\frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial T}{\partial b} + \left[\frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right] \frac{\partial T}{\partial \alpha} \right\} \frac{1}{c^2 T^2},$$

oder mit Rücksicht auf (69), (70) und (65)

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \frac{1}{c^2 T^2} = \frac{i \sin i 2 b}{2 c^4 T^3}.$$

Mithin geht (71) über in:

$$(72) \quad \frac{\partial \beta}{\partial x} \left\{ \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} + \frac{\partial \beta}{\partial y} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x \partial y} \right\} + \frac{\partial \beta}{\partial y} \left\{ \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial y} \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} \right\} = \frac{i \sin i 2 b}{2 c^4 T^3}$$

Setzt man schließlich noch die in (69) (70) und (72) erhaltenen Ausdrücke in (68) ein, so findet man:

$$(73) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cos^2 \varphi + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cos \varphi \sin \varphi + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin^2 \varphi = \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \frac{1}{c^2 T} + \frac{\partial w}{\partial \beta} \frac{i \sin i 2 b}{2 c^2 T^2},$$

Da nach (65)

$$c^2 (\sin^2 \alpha - \sin^2 i b) = c^2 (\cos^2 i b - \cos^2 \alpha) = c^2 T,$$

so ergibt sich mit Rücksicht auf (8) für die übrigen in der zweiten Randbedingung (60) vorkommenden Größen:

$$(74) \quad \frac{\Theta}{1+\Theta} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{\Theta}{1+\Theta} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \right) \frac{1}{e^2 T} = \frac{\Theta}{1+\Theta} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \frac{1}{e^2 T},$$

da am Rande $\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} = 0$ ist. Endlich sind noch die in (73) und (74) erhaltenen Werte in (60) einzuführen. Unsere zwei Grenzbedingungen gehen dann über in

$$w = 0,$$

$$(75) \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right)_{\beta=b} \left\{ \frac{1+2\Theta}{1+\Theta} \right\} (\cos i 2 b - \cos 2 \alpha) + \left(\frac{\partial w}{\partial \beta} \right)_{\beta=b} i \sin i 2 b = 0.$$

§ 10.

Wir setzen den Ausdruck für w in die zwei Grenzbedingungen (75) ein. Dabei ist unter anderem $\frac{\partial^2 r^2 (\log r - \frac{1}{2})}{\partial \beta^2} (\cos i 2 b - \cos 2 \alpha)$ zu bilden. Man findet mit Rücksicht auf (25)

$$(76) \quad \frac{1}{e^2} \frac{\partial^2 \{ r^2 (\log r - \frac{1}{2}) \}}{\partial \beta^2} (\cos i 2 b - \cos 2 \alpha) = \frac{(e^{2b} + e^{-2b})^2}{2} \log \left(\frac{e e^b}{2} \right) + \frac{e^{4b} - 5 e^{-4b}}{4} - \left[(e^{2b} + e^{-2b}) \log \left(\frac{e e^b}{2} \right) + \frac{2 e^{2b} - 5 e^{-2b} - 7 e^{-6b}}{4} \right] \cos 2 \alpha$$

$$+ (-1)^n \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{(n+1)(2n^2-4n+1)e^{-(2n-4)b} - 2(2n^2-1)e^{-2nb} - (n-1)(2n^2+4n+1)e^{-(2n+4)b}}{2n(n-1)(n+1)} \right] \cos 2n \alpha$$

Ferner ist $\frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2} (\cos i 2 b - \cos 2 \alpha)$ zu bilden, wobei nach (19) und (20) F , abgesehen von einem konstanten Faktor, der zweite Teil der Verrückung w ist. Man hat

$$(77) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2} (\cos i 2 b - \cos 2 \alpha) &= B_0 2^2 \cos^2 i 2 b - k_2 2 \cos i 2 b - B_2 \frac{4 \cdot 2}{3} \cos i 4 b \\ &+ \left\{ k_1 \left(\cos i b \cos i 2 b - \frac{\cos i b}{2} \right) + B_1 \left[\frac{3^2}{2} \cos i 3 b \left(\cos i 2 b - \frac{1}{2} \right) - \frac{\cos i b}{4} \right] \right. \\ &- k_3 \frac{3^2}{2} \cos i 3 b - B_3 \frac{5^2}{2 \cdot 4} \cos i 5 b \Big\} \cos \alpha + \left\{ -B_0 2^2 \cos i 2 b + k_2 2^2 \cos^2 i 2 b \right. \\ &+ B_2 \frac{\cos i 2 b}{3} (4^2 \cos i 4 b - 2) - k_2 \frac{4^2}{2} \cos i 4 b - B_4 \frac{6^2}{5 \cdot 2} \cos i 6 b \Big\} \cos 2 \alpha \\ &+ \left\{ -k_1 \frac{\cos i b}{2} + B_1 \frac{1}{2} \left(\cos i b \cos i 2 b - \frac{3^2}{2} \cos i 3 b \right) + k_3 3^2 \cos i 3 b \cos i 2 b \right. \end{aligned}$$

(Fortsetzung der Gl. (77) auf der nächsten Seite.)

$$\begin{aligned}
& + B_3 \frac{1}{4} \left(5^2 \cos i 5 b \cos i 2 b - \frac{3^2}{2} \cos i 3 b \right) - k_5 \frac{5^2}{2} \cos i 5 b - B_5 \frac{7^2}{2} \cos i 7 b \Big\} \cos 3 \alpha \\
& - \sum_{n=4}^{\infty} \left\{ - B_{n-4} \frac{(n-4)^2 \cos i (n-4) b}{2 (n-3)} - k_{n-2} \frac{(n-2)^2 \cos i (n-2) b}{2} \right. \\
(77) \quad & + B_{n-2} \frac{1}{(n-1)} \left[(n-2)^2 \cos i (n-2) b \cos i 2 b - \frac{n^2}{2} \cos i n b \right] + k_n n^2 \cos i n b \cos i 2 b \\
& - B_n \frac{1}{(n+1)} \left[(n+2)^2 \cos i (n+2) b \cos i 2 b - \frac{n^2}{2} \cos i n b \right] \\
& \left. - k_{n+2} \frac{(n+2)^2 \cos i (n+2) b}{2} - B_{n+2} \frac{(n+4)^2}{2 (n+3)} \cos i (n+4) b \right\} \cos n \alpha.
\end{aligned}$$

Wir haben den aus (76) und (77) sich ergebenden Wert für

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} (\cos i 2 b - \cos 2 \alpha) = \frac{P}{8 \pi q} \left[\frac{\partial^2 r^2 (\log r - \frac{1}{2})}{\partial \beta^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2} \right] (\cos i 2 b - \cos 2 \alpha)$$

und den schon früher in (26) erhaltenen Wert für $\frac{\partial w}{\partial \beta}$ einzusetzen in (75).

Es müssen dann alle Glieder mit $\cos 0 \alpha$ verschwinden, ebenso alle Terme mit $\cos \alpha$, $\cos 2 \alpha$, ... Man erhält so zusammen mit der ersten Gleichung (26) oder $w = 0$ 2 mal unendlich viele Gleichungen zur Bestimmung der Unbekannten $k_0, B_0, k_1, B_1, k_2, B_2, \dots$. Da die Größen $k_0, B_0, k_2, B_2, k_4, B_4, \dots$ nur in den Gliedern mit $\cos 0 \alpha$, $\cos 2 \alpha$, $\cos 4 \alpha, \dots$ auftreten, während $k_1, B_1, k_3, B_3, \dots$ nur in den Termen mit $\cos \alpha$, $\cos 3 \alpha$, $\cos 5 \alpha, \dots$ enthalten sind und da außerdem in (76) und der linken Seite von (26) keine Glieder mit $\cos \alpha$, $\cos 3 \alpha, \dots$ vorkommen, so folgt wieder, daß

$$k_1 = k_3 = k_5 = \dots = 0,$$

$$B_1 = B_3 = B_5 = \dots = 0$$

ist.

Die Gleichungen, die zur Bestimmung der $k_0, B_0, k_2, B_2, \dots$ dienen, sind die folgenden:

$$\begin{aligned}
(78a) \quad & \left\{ B_0 2^2 \cos^2 i 2 b - k_2 2 \cos i 2 b - B_2 \frac{4 \cdot 2}{3} \cos i 4 b \right\} \frac{1+2\Theta}{1+\Theta} + B_0 \frac{2 \sin^2 i 2 b}{1} \\
& = -c^3 \left[\frac{(e^{2b} + e^{-2b})^2}{2} \log \left(\frac{ce^b}{2} \right) + \frac{e^{4b} - 5e^{-4b}}{4} \right] \frac{1+2\Theta}{1+\Theta} + c^3 \left(\frac{e^{2b} - e^{-2b}}{2} \right)^2 \log \left(\frac{ce^b}{2} \right),
\end{aligned}$$

$$(78b) \quad k_0 + B_0 \cos i 2 b = -\frac{c^2 e^{eb}}{4} \left[(1 + e^{-4b}) \log \left(\frac{ce^b}{2} \right) - \frac{1}{2} + \frac{e^{-4b}}{2} \right],$$

$$\begin{aligned}
 (78c) \quad & \left\{ -B_0 2^2 \cos i 2b + k_2 2^2 \cos^2 i 2b + B_2 \frac{\cos i 2b}{3} (4^2 \cos i 4b - 2) \right. \\
 & \left. - k_4 \frac{4^2}{2} \cos i 4b - B_4 \frac{6^2}{5 \cdot 2} \cos i 6b \right\} \frac{1+2\theta}{1+\theta} + k_2 \sin^2 i 2b + B_2 \frac{4 \sin i 4b \sin i 2b}{3} \\
 & = c^2 \left[(e^{2b} + e^{-2b}) \log \left(\frac{ce^b}{2} \right) + \frac{2e^{2b} - 5e^{-2b} - 7e^{-6b}}{4} \right] \frac{1+2\theta}{1+\theta} \\
 & \quad + \frac{c^2}{4} (e^{2b} - 2e^{-2b} + e^{-6b}),
 \end{aligned}$$

$$(78d) \quad k_3 \cos i 2b + B_0 + B_2 \frac{\cos i 4b}{3} = -\frac{c^2 e^{2b}}{4} \left[2e^{-2b} \log \left(\frac{ce^b}{2} \right) + \frac{e^{-6b}}{2} \right],$$

$$\begin{aligned}
 (78e) \quad & \left\{ -B_{2n-4} \frac{(2n-4)^2 \cos i (2n-4)b}{2(2n-3)} - k_{2n-2} \frac{(2n-2)^2 \cos i (2n-2)b}{2} \right. \\
 & \quad + B_{2n-2} \frac{1}{(2n-1)} \left[(2n-2)^2 \cos i (2n-2)b \cos i 2b - 2n^2 \cos i 2nb \right] \\
 & \quad \left. + k_{2n} 4n^2 \cos i 2nb \cos i 2b \right. \\
 & \quad + B_{2n} \frac{1}{(2n+1)} \left[(2n+2)^2 \cos i (2n+2)b \cos i 2b - 2n^2 \cos i 2nb \right] \\
 & \quad \left. - k_{2n+2} \frac{(2n+2)^2 \cos i (2n+2)b}{2} \right. \\
 & \quad \left. - B_{2n+2} \frac{(2n+4)^2 \cos i (2n+4)b}{(2n+3)} \right\} \frac{1+2\theta}{1+\theta} + k_{2n} 2n \sin i 2nb \sin i 2b \\
 & \quad + B_{2n-2} \frac{(2n-2) \sin i (2n-2)b \sin i 2b}{2n-1} + B_{2n} \frac{(2n+2) \sin i (2n+2)b \sin i 2b}{2n+1} \\
 & = (-1)^{n+1} c^2 \left[\frac{(n+1)(2n^2-4n+1)e^{-(2n-4)b} - 2(2n^2-1)e^{-2nb} - (n-1)(2n^2+4n+1)e^{-(2n+4)b}}{2n(n-1)(n+1)} \right] \frac{1+2\theta}{1+\theta} \\
 & \quad + c^2 \frac{(-1)^{n+1} (e^{-(2n-4)b} - 2e^{-2nb} + e^{-(2n+4)b})}{4n},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (78f) \quad & k_{2n} \cos i 2nb + B_{2n} \frac{\cos i (2n+2)b}{2n+1} + B_{2n-2} \frac{\cos i (2n-2)b}{2n-1} \\
 & = (-1)^{n+1} \frac{c^2}{4n} \left[\frac{e^{-(2n-2)b}}{n-1} - \frac{e^{-(2n+2)b}}{n+1} \right].
 \end{aligned}$$

Um aus den Gleichungen (78) die Konstanten $k_0, B_0, k_2, B_2, \dots$ zu berechnen, verfahren wir in ähnlicher Weise, wie dies Mathieu¹⁰⁾ bei dem von ihm behandelten Problem tut, doch können wir im einzelnen unsere Betrachtungen weitergehender gestalten. Wir setzen:

$$(79) \quad \beta = \log \left(e \frac{2}{c} \right).$$

¹⁰⁾ É. Mathieu l. c.

Für diejenige Ellipse, die den Rand bildet, ist $\beta = b$ und der zugehörige Wert von ϱ sei $= \varrho_0$. Man hat dann

$$(80) \quad b = \log \left(\varrho_0 \frac{2}{c} \right).$$

Diejenige Ellipse, die durch den Wert β charakterisiert ist, hat eine große Halbachse, die nach (64) gleich $c \cos i \beta = c \left(\frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2} \right)$ ist. Setzt man hier für β seinen Wert aus (79) ein, so folgt, falls man zur Abkürzung

$$(81) \quad \frac{c}{2} = p$$

setzt:

$$(82) \quad c \cos i \beta = c \left(\frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2} \right) = \varrho + \frac{c^2}{4\varrho} = \varrho + \frac{p^2}{\varrho}.$$

Die große Halbachse der Randellipse ist:

$$(83) \quad c \cos i b = c \left(\frac{e^b + e^{-b}}{2} \right) = \varrho_0 + \frac{c^2}{4\varrho_0} = \varrho_0 + \frac{p^2}{\varrho_0}.$$

Verschwindet die Exzentrizität c , so gehen beide eben betrachteten Ellipsen in Kreise über von den Radien ϱ und ϱ_0 .

Zur Berechnung der Konstanten $k_0, k_2, \dots B_0, B_2, \dots$, denken wir uns jede dieser Größen nach Potenzen von $\frac{c^2}{4} = p^2$ entwickelt. Auch bei dem im vorangehenden betrachteten Problem der Plattenbiegung, wo der Rand eingeklemmt war, kann man die Ausdrücke für die $k_0, k_2, \dots B_0, B_2, \dots$ als Reihen auffassen, die nach Potenzen von p^2 fortschreiten. Die Größen k_0, B_0 z. B. können nach (28), (29) und (80) folgendermaßen geschrieben werden:

$$k_0 = \frac{c^2}{8} (e^{2b} - e^{-2b}) = \frac{\varrho_0^2}{2} - \frac{c^4}{32\varrho_0^2} = \frac{\varrho_0^2}{2} - \frac{p^4}{2\varrho_0^2},$$

$$B_0 = -\frac{c^2}{2} \log \left(\frac{ce^b}{2} \right) = -2p^2 \log \varrho_0.$$

In k_0 und B_0 sind also die ersten Glieder proportional bzw. mit p^0 und p^2 . Analog ergibt sich leicht, daß in k_2 und B_2 die ersten Terme proportional sind bzw. mit p^4 und p^6 , ferner enthalten die ersten Glieder von k_4 und B_4 bzw. p^8 und p^{10} usw. Während also $k_0, k_2, k_4, \dots$ bzw. von der Ordnung $p^0, p^4, p^8, \dots$ sind, sind die in (19) vorkommenden Größen $k_0, k_2 \cos i 2\beta, k_4 \cos i 4\beta, \dots$ wegen (79) bzw. von der Ordnung $p^0, p^2, p^4, \dots$; ferner sind $B_0, B_2, B_4, \dots$, wie eben schon angegeben, von der Ordnung $p^2, p^6, p^{10}, \dots$; während die in (19) ebenfalls auftretenden Terme $B_0 \cos i 2\beta, B_2 \cos i 4\beta, B_4 \cos i 6\beta$ wiederum von der Ordnung $p^0, p^2, p^4, \dots$ sind. Zur Befriedigung der Gleichungen (78) machen wir gerade so wie bei unserem früheren Problem die Ansätze:

$$\begin{aligned}
& (k_{00} + k_{02}p^2 + \dots) + (B_{00}p^2 + B_{02}p^4 + \dots) \left(\frac{\varrho_0^2}{p^2} + \frac{p^2}{\varrho_0^2} \right) \frac{1}{2} \\
& = -\varrho_0^2 \left[\left(1 + \frac{p^4}{\varrho_0^4} \right) \log \varrho_0 - \frac{1}{2} + \frac{p^4}{2\varrho_0^4} \right], \\
& - (B_{00}p^2 + B_{02}p^4 + \dots) 2 \left(\frac{\varrho_0^4}{p^2} + \frac{p^2}{\varrho_0^2} \right) + (k_{20}p^4 + \dots) \left(\frac{\varrho_0^4}{p^4} + 2 + \frac{p^4}{\varrho_0^4} \right) \\
& + (B_{20}p^6 + \dots) \frac{1}{3} \left(4 \frac{\varrho_0^6}{p^6} + 3 \frac{\varrho_0^2}{p^2} + 3 \frac{p^2}{\varrho_0^2} + 4 \frac{p^6}{\varrho_0^6} \right) - (k_{40}p^8 + \dots) 4 \left(\frac{\varrho_0^4}{p^4} + \frac{p^4}{\varrho_0^4} \right) \\
& - (B_{40}p^{10} + \dots) \frac{3^2}{5} \left(\frac{\varrho_0^6}{p^6} + \frac{p^6}{\varrho_0^6} \right) \left[\frac{1+2\Theta}{1+\Theta} - (k_{20}p^4 + \dots) \frac{1}{2} \left(\frac{\varrho_0^4}{p^4} - 2 + \frac{p^4}{\varrho_0^4} \right) \right. \\
& - (B_{20}p^6 + \dots) \frac{1}{3} \left(\frac{\varrho_0^6}{p^6} - \frac{\varrho_0^2}{p^2} - \frac{p^2}{\varrho_0^2} + \frac{p^6}{\varrho_0^6} \right) = 4p^2 \left[\left(\frac{\varrho_0^2}{p^2} + \frac{p^2}{\varrho_0^2} \right) \log \varrho_0 \right. \\
& \left. + \frac{1}{4} \left(2 \frac{\varrho_0^2}{p^2} - 5 \frac{p^2}{\varrho_0^2} - 7 \frac{p^6}{\varrho_0^6} \right) \right] \frac{1-1\Theta}{1+\Theta} + p^2 \left(\frac{\varrho_0^2}{p^2} - 2 \frac{p^2}{\varrho_0^2} + \frac{p^6}{\varrho_0^6} \right), \\
& (k_{30}p^4 + \dots) \frac{1}{2} \left(\frac{\varrho_0^2}{p^2} + \frac{p^2}{\varrho_0^2} \right) + (B_{00}p^2 + B_{02}p^4 + \dots) + (B_{20}p^6 + \dots) \frac{1}{6} \left(\frac{\varrho_0^4}{p^4} + \frac{p^4}{\varrho_0^4} \right) \\
& = -\varrho^2 \left[2 \frac{p^2}{\varrho_0^2} \log \varrho_0 + \frac{p^6}{2\varrho_0^6} \right], \\
& \left[- (k_{20}p^4 + \dots) \left(\frac{\varrho_0^2}{p^2} + \frac{p^2}{\varrho_0^2} \right) + (B_{20}p^6 + \dots) \frac{1}{3} \left(-3 \frac{\varrho_0^4}{p^4} + 2 - 3 \frac{p^4}{\varrho_0^4} \right) \right. \\
& - (k_{40}p^8 + \dots) 4 \left(\frac{\varrho_0^6}{p^6} + \frac{\varrho_0^2}{p^2} + \frac{p^2}{\varrho_0^2} + \frac{p^6}{\varrho_0^6} \right) + (B_{40}p^{10} + \dots) \frac{1}{5} \left(9 \frac{\varrho_0^8}{p^8} + 5 \frac{\varrho_0^4}{p^4} + 5 \frac{p^4}{\varrho_0^4} + 9 \frac{p^8}{\varrho_0^8} \right) \\
& - (k_{60}p^{12} + \dots) 9 \left(\frac{\varrho_0^6}{p^6} + \frac{p^6}{\varrho_0^6} \right) - (B_{60}p^{14} + \dots) \frac{16}{7} \left(\frac{\varrho_0^8}{p^8} + \frac{p^8}{\varrho_0^8} \right) \left. \right] \frac{1+2\Theta}{1-\Theta} \\
& - (k_{40}p^8 + \dots) \left(\frac{\varrho_0^6}{p^8} - \frac{\varrho_0^2}{p^2} - \frac{p^2}{\varrho_0^2} + \frac{p^6}{\varrho_0^6} \right) - (B_{20}p^6 + \dots) \frac{1}{6} \left(\frac{\varrho_0^4}{p^4} - 2 + \frac{p^4}{\varrho_0^4} \right) \\
& - (B_{40}p^{10} + \dots) \frac{3}{10} \left(\frac{\varrho_0^8}{p^8} - \frac{\varrho_0^4}{p^4} - \frac{p^4}{\varrho_0^4} + \frac{p^8}{\varrho_0^8} \right) \\
& - 4p^2 \left[\frac{3 - 14 \frac{p^4}{\varrho_0^4} - 17 \frac{p^8}{\varrho_0^8}}{4 \cdot 3} \right] \frac{1+2\Theta}{1+\Theta} - \frac{p^2}{2} \left(1 - 2 \frac{p^4}{\varrho_0^4} + \frac{p^8}{\varrho_0^8} \right), \\
& k_{40}p^8 + \dots \frac{1}{2} \left(\frac{\varrho_0^4}{p^4} + \frac{p^4}{\varrho_0^4} \right) + (B_{40}p^{10} + \dots) \frac{1}{10} \left(\frac{\varrho_0^8}{p^8} + \frac{p^8}{\varrho_0^8} \right) + (B_{20}p^6 + \dots) \frac{1}{6} \left(\frac{\varrho_0^2}{p^2} + \frac{p^2}{\varrho_0^2} \right) \\
& = -\frac{p^2}{2} \left[\frac{p^2}{\varrho_0^2} - \frac{p^6}{3\varrho_0^6} \right].
\end{aligned}$$

§ 11.

Nach diesen Vorbereitungen wenden wir uns der Berechnung der Konstanten $k_{2n, 2m}$ und $B_{2n, 2m}$ aus den Relationen (85). Berücksichtigt man nur die niedrigsten Potenzen von p , so erhält man aus den zwei ersten Gleichungen (85) die folgenden zwei Relationen zur Bestimmung von k_{00} und B_{00} :

$$(86) \quad \begin{aligned} B_{00} \left(\frac{1+2\Theta}{1+\Theta} - \frac{1}{2} \right) \varrho_0^4 &= - [2\varrho_0^4 \log \varrho_0 + \varrho_0^4] \frac{1+2\Theta}{1+\Theta} + \varrho_0^4 \log \varrho_0 \\ k_{00} + B_{00} \frac{\varrho_0^2}{2} &= - \varrho_0^2 \log \varrho_0 + \frac{\varrho_0^2}{2}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$(87) \quad \begin{aligned} B_{00} &= \frac{\frac{1+2\Theta}{1+\Theta}}{\frac{1}{2} - \frac{1+2\Theta}{1+\Theta}} - 2 \log \varrho_0 \\ k_{00} &= \varrho_0^2 \left\{ \frac{1}{2} - \frac{\frac{1+2\Theta}{1+\Theta}}{1 - 2 \frac{1+2\Theta}{1+\Theta}} \right\}. \end{aligned}$$

In dem Fall, wo die Exzentrizität verschwindet und also die elliptische Platte kreisförmig ist, reduziert sich der Ausdruck (19) für F auf

$$\begin{aligned} F &= k_0 + B_0 \cos i 2\beta = k_{00} + B_{00} \frac{\varrho^2}{2} \\ &= \frac{\varrho_0^2}{2} - \frac{\frac{1+2\Theta}{1+\Theta}}{1 - 2 \left(\frac{1+2\Theta}{1+\Theta} \right)} (\varrho_0^2 - \varrho^2) - \varrho^2 \log \varrho_0. \end{aligned}$$

Hier bedeutet ϱ_0 den Radius der kreisförmigen Platte. Für die Verschiebung w erhält man in diesem Fall nach (62), da im Fall verschwindender Exzentrizität ϱ identisch ist mit der Größe r von (62)

$$(88) \quad w = \frac{P}{8\pi q} \left[r^2 \log \left(\frac{r}{\varrho_0} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{3+7\Theta}{1+3\Theta} \right) (\varrho_0^2 - r^2) \right].$$

Dieser Ausdruck ist identisch mit der wohlbekannten Formel für die Deformation einer kreisförmigen am Rande gestützten Platte unter einer Einzellast im Mittelpunkt¹¹⁾.

Zur genaueren Berechnung von w hat man zunächst k_{02} , B_{02} , k_{20} und B_{20} zu ermitteln. Diese Größen treten in w in den Ausdrücken

$$k_{02} p^2, \quad B_{02} p^4 \cos i 2\beta, \quad k_{20} p^4 \cos i 2\beta, \quad B_{20} p^6 \cos i 4\beta$$

¹¹⁾ Vgl. z. B. Love, Lehrbuch der Elastizität, deutsch von A. Timpe. Leipzig u. Berlin 1907, S. 561. Die bei Love vorkommende Größe σ ist identisch mit $\frac{\Theta}{1+2\Theta}$.

auf, welche sämtlich von der Ordnung p^2 sind, da $p^2 \cos i 2 \beta$ und $p^4 \cos i 4 \beta$ wegen (79) von der Ordnung p^6 sind. Die Bestimmungsgleichungen für die eben genannten vier Größen k_{02} , B_{02} , k_{20} und B_{20} ergeben sich aus den vier ersten Relationen (85), sie lauten:

$$\begin{aligned}
 B_{02} \varrho_0^4 \left(\frac{1+2\Theta}{1+\Theta} - \frac{1}{2} \right) &= 0, \\
 k_{02} + B_{02} \frac{\varrho_0^2}{2} &= 0, \\
 (89) \quad k_{20} \varrho_0^4 \left[\frac{1+2\Theta}{1+\Theta} - \frac{1}{2} \right] + B_{20} \varrho_0^6 \left[\frac{4}{3} \left(\frac{1+2\Theta}{1+\Theta} \right) - \frac{1}{3} \right] - B_{00} 2 \varrho_0^2 \\
 &= [4 \varrho_0^2 \log \varrho_0 + 2 \varrho_0^2] \frac{1+2\Theta}{1+\Theta} + \varrho_0^2, \\
 k_{20} \frac{\varrho_0^2}{2} + B_{00} + B_{20} \frac{\varrho_0^4}{6} &= -2 \log \varrho_0.
 \end{aligned}$$

Beachtenswert ist, daß die zwei ersten Unbekannten k_{02} und B_{02} nur in der 1. und 2. Gleichung und die zwei letzten Unbekannten k_{20} und B_{20} nur in der 3. und 4. Gleichung vorkommen. Die Berechnung der vier Unbekannten k_{02} , B_{02} , k_{20} und B_{20} bietet keine Schwierigkeit, insbesondere sind k_{02} und B_{02} gleich Null.

Hiernach handelt es sich darum, die sechs Größen k_{04} , B_{04} , k_{22} , B_{22} , k_{40} , B_{40} zu ermitteln. Sie kommen in den Ausdrücken $k_{04} p^4$, $B_{04} p^6 \cos i 2 \beta$, $k_{22} p^6 \cos i 2 \beta$, $B_{22} p^8 \cos i 4 \beta$, $k_{40} p^8 \cos i 4 \beta$, $B_{40} p^{10} \cos i 6 \beta$ vor, welche sämtlich von der Ordnung p^4 sind. Aus den sechs in (85) hingeschriebenen Gleichungen gewinnt man leicht die Relationen, die zur Bestimmung der sechs eben genannten Größen dienen. Es ergibt sich wieder, daß die zwei ersten dieser Gleichungen nur die zwei ersten Unbekannten k_{04} , B_{04} enthalten, in der 3. und 4. Gleichung kommen nur die Größen k_{22} und B_{22} vor, und in der 5. und 6. Gleichung treten nur k_{40} und B_{40} auf. Infolge dieses Umstandes bietet die Berechnung der Unbekannten keine Schwierigkeit, insbesondere sind k_{22} und B_{22} gleich Null.

Die weiteren Annäherungen ermittelt man in analoger Weise. Es zeigt sich dabei, daß man die bei den einzelnen Approximationen vorkommenden Gleichungen stets mittels der Ansätze (84) befriedigen kann. Den Beweis kann man mittels des Schlusses von $n-1$ auf n führen. Gesetzt man habe die Größen $k_{0,2n-2}$, $B_{0,2n-2}$, $k_{2,2n-4}$, $B_{2,2n-4}$, ..., $k_{2n-2,0}$, $B_{2n-2,0}$ ermittelt und dabei stets gefunden, daß die Ansätze (84) nirgends zu einem Widerspruch führen. Wir wollen nun zeigen, daß auch bei der Berechnung der Größen

$$(90) \quad k_{0,2n}, \quad B_{0,2n}, \quad k_{2,2n-2}, \quad B_{2,2n-2}, \quad \dots, \quad k_{2n,0}, \quad B_{2n,0}.$$

die Ansätze (84) sich bewähren und also richtig sind. Dazu haben wir

nur die Gleichungen aufzustellen, die zur Berechnung dieser Unbekannten dienen. Die Relationen zur Bestimmung der $k_{4,2n-4}$ und $B_{4,2n-4}$ beispielsweise ergeben sich aus den Gleichungen (78e) und (78f) für $n=2$ oder, was auf dasselbe hinauskommt, aus der 5. und 6. Gleichung (85), und zwar hat man in der 5. Gleichung (85) alle Glieder mit p^{2n-2} und in der 6. Gleichung (85) alle Terme mit p^{2n} zu betrachten; denn handelt es sich z. B. darum, aus der 5. und 6. Gleichung (85) die Größen k_{40} und B_{40} zu berechnen, so kommen bzw. die Glieder mit p^2 und p^4 in Betracht, handelt es sich darum, aus den zwei eben genannten Gleichungen k_{42} und B_{42} zu bestimmen, so kommen die Terme mit p^4 und p^6 in Betracht usw.

Die Relationen zur Ermittlung der $k_{4,2n-4}$ und $B_{4,2n-4}$ sind in (91) angegeben, dabei sind die rechten Seiten, auf die es für unsere jetzigen Zwecke nicht weiter ankommt, durch Punkte angedeutet.

$$\begin{aligned}
 & \left[-k_{2,2n-4} \varrho_0^2 - k_{1,2n-8} \frac{1}{\varrho_0^2} - B_{2,2n-4} \varrho_0^4 - 2B_{2,2n-8} - B_{2,2n-12} \frac{1}{\varrho_0^4} \right. \\
 & + k_{4,2n-4} 4 \varrho_0^6 + k_{4,2n-8} 4 \varrho_0^2 + k_{4,2n-12} \frac{4}{\varrho_0^2} + k_{4,2n-16} \frac{4}{\varrho_0^6} + B_{4,2n-4} \frac{9}{5} \varrho_0^8 \\
 & + B_{4,2n-8} \varrho_0^4 + B_{4,2n-16} \frac{1}{\varrho_0^4} + B_{4,2n-20} \frac{9}{5 \varrho_0^8} - k_{6,2n-8} 9 \varrho_0^6 - k_{6,2n-20} \frac{9}{\varrho_0^6} \\
 & \left. - B_{6,2n-8} \frac{16}{7} \varrho_0^8 - B_{6,2n-24} \frac{16}{7 \varrho_0^8} \right] \frac{1+2\Theta}{1+\Theta} - k_{4,2n-4} \varrho_0^6 + k_{4,2n-8} \varrho_0^2 \\
 (91) & + k_{4,2n-12} \frac{1}{\varrho_0^2} - k_{4,2n-16} \frac{1}{\varrho_0^6} - B_{2,2n-4} \frac{\varrho_0^4}{6} + B_{2,2n-8} \frac{1}{3} - B_{2,2n-12} \frac{1}{6 \varrho_0^4} \\
 & - B_{4,2n-4} \frac{3}{10} \varrho_0^8 + B_{4,2n-8} \frac{3}{10} \varrho_0^4 + B_{4,2n-16} \frac{3}{10 \varrho_0^4} - B_{4,2n-20} \frac{3}{10 \varrho_0^8} = \dots, \\
 & k_{4,2n-4} \frac{\varrho_0^4}{2} + k_{4,2n-12} \frac{1}{2 \varrho_0^4} + B_{4,2n-4} \frac{\varrho_0^6}{10} + B_{4,2n-16} \frac{1}{10 \varrho_0^6} + B_{2,2n-4} \frac{\varrho_0^2}{6} \\
 & + B_{2,2n-8} \frac{1}{6 \varrho_0^2} = \dots
 \end{aligned}$$

In diesen zwei Gleichungen treten nur die zwei Unbekannten $k_{4,2n-4}$ und $B_{4,2n-4}$ auf, alle andern in (91) vorkommenden Größen von der Form $k_{2i,2j}$ und $B_{2i,2j}$ sind bereits bei den früheren Approximationen ermittelt, da bei ihnen $2i+2j < 2n$ ist. Aus den Relationen (91), die natürlich ebenso wie die 5. und 6. Gleichung (85), aus denen sie gewonnen sind, mittels der Ansätze (84) gebildet sind, berechnen sich sofort die zwei Unbekannten $k_{4,2n-4}$ und $B_{4,2n-4}$. Stellt man in analoger Weise die Gleichungen auf zur Bestimmung der übrigen der Unbekannten (90), wobei dann wieder die Ansätze (84) benutzt werden, so ergeben sich aus ihnen stets bestimmte Werte für die Unbekannten, womit die Gültigkeit der

Ansätze (84) bewiesen ist. Nachdem so gezeigt ist, wie man die sukzessiven Approximationen ermittelt, ist auch unser zweites Problem erledigt.

§ 12.

Wie schon in § 1 erwähnt wurde, beschäftigt sich Mathieu mit dem Problem, eine Funktion F so zu bestimmen, daß sie innerhalb einer Ellipse der Gleichung $\Delta \Delta F = 0$ genügt und die zwei Randbedingungen $F = \varphi$ und $\frac{\partial F}{\partial n} = \psi$ befriedigt, wo φ und ψ gegebene Funktionen der Randpunkte sind. Auch dies Problem läßt sich, wie wir jetzt noch andeuten wollen, nach unserer Methode behandeln und man kommt dabei in rascherer und einfacherer Weise als Mathieu zum Ziel. Sind nämlich, wie wir zunächst annehmen wollen, die zwei Funktionen φ und ψ symmetrisch in bezug auf die x - und y -Achse, so hat man für F wieder den Ansatz (19) zu machen und alsdann die Konstanten k_n und B_n so zu bestimmen, daß sie den zwei Randbedingungen genügen; hierbei sind φ und ψ , ebenso wie wir es mit F und $\frac{\partial F}{\partial n}$ bzw. $\frac{\partial F}{\partial \beta}$ taten, in Fouriersche Reihen zu entwickeln. Durch Vergleichung der Koeffizienten entsprechender Glieder rechts und links bei beiden Gleichungen erhält man die Relationen zur Bestimmung der Konstanten k_n und B_n . Weisen φ und ψ nicht die eben genannten Symmetrieeigenschaften auf, so hat man für F einen übrigens leicht angebbaren allgemeineren Ansatz zu machen, im übrigen aber wieder in der eben angegebenen Weise zu verfahren.

(Eingegangen am 18. Juli 1920.)