SULL' HESSIANA DEL PRODOTTO DI DUE FORME TERNARIE

Nota del dott **F. Gerbaldi**, in Roma.Adunanza del 24 febbrajo 1889.

In una Nota pubblicata in questi *Rendiconti* (pag. 22 del presente volume) ho avuto occasione di stabilire una formola che espriime l'Hessiana del prodotto di due forme binarie per mezzo delle forme invariantive di queste. La formola analoga per due forme ternarie fu già data dal Salmon (*), ma senza dimostrazione, i calcoli che ad essa conducono mi sembrano interessanti, e siccome non mi consta che siano stati da alcuno pubblicati, così mi sono proposto di svolgerli nella presente Nota.

Siano due forme ternarie

$$f_1 = a_\chi^m = a_\chi'^m = \dots \quad f_2 = b_\chi^n = b_\chi'^n = \dots$$

di queste ci occorrono le seguenti forme invariantive

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_{11} = u_\alpha^2 A_\chi^{2m-4} = (aa'u)^2 a_\chi'^{m-2} a_\chi'^{m-2}, \quad A_1 = (aa'a'')^2 a_\chi^{m-2} a_\chi'^{m-2} a_\chi'^{m-2}, \\ F_{12} = u_\pi^2 F_\chi^{m+n-4} = (abu)^2 a_\chi'^{m-2} b_\chi'^{n-2}, \quad \Theta_1 = (aa'b)^2 a_\chi^{m-2} a_\chi'^{m-2} b_\chi'^{n-2}, \\ F_{22} = u_\beta^2 B_x^{2n-4} = (bb'u)^2 b_\chi'^{n-2} b_\chi'^{n-2}, \quad \Theta_2 = (abb')^2 a_\chi^{m-2} b_\chi'^{n-2} b_\chi'^{n-2}, \\ \Phi_{12} = (\alpha\beta x)^2 A_x^{2m-4} B_x^{2n-4}, \quad A_2 = (bb'b'')^2 b_\chi^{n-2} b_\chi'^{n-2} b_\chi'^{n-2}. \end{array} \right.$$

(*) *Traité de géométrie analytique — Courbes planes — N° 242.*

e la forma con due serie di variabili cogredienti x, y , che si deduce da F_{12} col porre $u_i = (xy)_i$,

$$h_y^2 H_x^{m+n-2} = (\tau xy)^2 T_x^{m+n-4},$$

e che indicheremo semplicemente con h , quando si considera come funzione soltanto delle y

Denotiamo per brevità con $h_\alpha, h_\tau, h_\beta$ le forme seguenti

$$h_\alpha = h_\alpha^2 A_x^{2m-4} H_x^{p-2} = (\alpha \tau x)^2 A_x^{2m-4} T_x^{p-4}$$

$$h_\tau = h_\tau^2 T_x^{p-4} H_x^{p-2} = (\tau \tau' x)^2 T_x^{p-4} T_x^{p-4} \quad (p = m + n)$$

$$h_\beta = h_\beta^2 B_x^{2n-4} H_x^{p-2} = (\beta \tau x)^2 B_x^{2n-4} T_x^{p-4}$$

e osserviamo che si ha

$$h_\alpha h_y H_x^{p-2} = 0 \text{ identicamente,}$$

$$(h h' u)^2 H_x^{p-2} H_x^{p-2} = (h u, \tau x)^2 H_x^{p-2} T_x^{p-4}$$

$$= (h_\tau u_x - h_x u_\tau)^2 H_x^{p-2} T_x^{p-4} = h_\tau^2 u_x^2.$$

Consideriamo la forma che nasce dal prodotto delle due forme ternarie date

$$U = U_x^p = U_x^p = f_1 f_2 = a_x^m b_x^n$$

e facciamone la seconda polare

$$p(p-1)U_x^{p-2}U_y^2 = m(m-1)a_x^{m-2}a_y^2.f_2 + 2mna_x^{m-1}b_x^{n-1}a_y b_y + n(n-1)b_x^{n-2}b_y^2.f_1;$$

questa, in virtù della identità

$$2 a_x^{m-1} b_x^{n-1} a_y b_y = a_x^{m-2} a_y^2 . f_2 + b_x^{n-2} b_y^2 . f_1 - h_y^2 H_x^{p-2},$$

si può scrivere

$$(2) \quad p(p-1)U_x^{p-2}U_y^2 = m(p-1)a_x^{m-2}a_y^2 \cdot f_2 + n(p-1)b_x^{n-2}b_y^2 \cdot f_1 - mn b_y^2 H_x^{p-2}.$$

Qui si ponga successivamente

$$y_i = (U' u)_i, \quad y_i = (a u)_i, \quad y_i = (b u)_i, \quad y_i = (h u)_i$$

e si moltiplichino rispettivamente per

$$U_x^{p-2}, \quad a_x^{m-2}, \quad b_x^{n-2}, \quad H_x^{p-2}.$$

Se per brevità si denota con $[P, Q, R]$ la forma invariantiva

$$(P \ Q \ R)^2 P_x^{p-2} Q_x^{q-2} R_x^{r-2}$$

di tre forme dei gradi p, q, r ; si ha

$$(3) \quad p(p-1)[U, U, u] = m(p-1)[U, f_1, u]f_2 + n(p-1)[U, f_2, u]f_1 - mn[U, h, u]$$

$$(4) \quad p(p-1)[U, f_1, u] = m(p-1)F_{11}f_2 + n(p-1)F_{12}f_1 - mn[f_1, h, u]$$

$$(5) \quad p(p-1)[U, f_2, u] = m(p-1)F_{12}f_2 + n(p-1)F_{22}f_1 - mn[f_2, h, u]$$

$$(6) \quad p(p-1)[U, h, u] = m(p-1)[h, f_1, u] + n(p-1)[h, f_2, u] - mn h_\pi.$$

Si moltiplichino la (3) per $p(p-1)$, la (4) per $(p-1)mf_2$, la (5) per $(p-1)nf_1$ e la (6) per $-mn$, poi si sommi membro a membro; si ha

$$\begin{aligned} (7) \quad p^2(p-1)^2[U, U, u] &= (p-1)^2 \{ m^2 F_{11} f_2^2 + 2mn F_{12} f_1 f_2 + n^2 F_{22} f_1^2 \} \\ &\quad - 2mn(p-1) \{ m[f_1, h, u]f_2 + n[f_2, h, u]f_1 \} \\ &\quad + m^2 n^2 h_\pi \cdot u_\pi^2 \end{aligned}$$

donde, ponendo $u_i = U_i$ e poi moltiplicando per U_x^{p-2} , si ricava

$$\begin{aligned}
 (8) \quad & p^2(p-1)^2[U, U, U] \\
 &= (p-1)^2 \{ m^2[f_1, f_1, U] f_2^2 + 2mn[f_1, f_2, U] f_1 f_2 + n^2[f_2, f_2, U] f_1^2 \} \\
 &\quad - 2mn(p-1) \{ m[f_1, h, U] f_2 + n[f_2, h, U] f_1 \} \\
 &\quad + m^2 n^2 h_\pi f_1 f_2.
 \end{aligned}$$

Si ponga ancora nella (2) successivamente

$$u_i = (a a')_i, \quad u_i = (a b)_i, \quad u_i = (b b')_i, \quad u_i = (a b)_i, \quad u_i = (b h)_i$$

e si moltiplichino rispettivamente per

$$a_x^{m-2} a'_x{}^{m-2}, \quad a_x^{m-2} b_x^{n-2}, \quad b_x^{n-2} b'_x{}^{n-2}, \quad a_x^{m-2} H_x^{p-2}, \quad b_x^{n-2} H_x^{p-2}$$

si avrà

$$(9) \quad p(p-1)[f_1, f_1, U] = m(p-1)A_1 f_2^2 + n(p-1)\Theta_1 f_1 - mn h_a$$

$$(10) \quad p(p-1)[f_1, f_2, U] = m(p-1)\Theta_1 f_2 + n(p-1)\Theta_2 f_1 - mn h_\pi$$

$$(11) \quad p(p-1)[f_2, f_2, U] = m(p-1)\Theta_2 f_2 + n(p-1)A_2 f_1 - mn h_\beta$$

$$(12) \quad p(p-1)[f_1, h, U] = m(p-1)h_a f_2 + n(n-1)h_\pi f_1$$

$$(13) \quad p(p-1)[f_2, h, U] = m(m-1)h_\pi f_2 + n(p-1)h_\beta f_1.$$

Si moltiplichino la (8) per p , la (9) per $m^2(p-1)f_2^2$, la (10) per $2mn(p-1)f_1 f_2$, la (11) per $m^2(p-1)$, la (12) per $-2m^2 n$, e la (13) per $-2mn^2$, e poi si sommi, si avrà

$$\begin{aligned}
 (14) \quad & p^3(p-1)^2[U, U, U] = \\
 & (p-1)^2 [m^3 A_1 f_2^3 + 3m^2 n \Theta_1 f_2^2 f_1 + 3mn^2 \Theta_2 f_1 f_2^2 + n^3 A_2 f_1^3] \\
 & - 3m^3 n(p-1)h_a f_2^2 - 3m^2 n^2(p-2)h_\pi f_1 f_2 - 3mn^3(p-1)h_\beta f_1^2.
 \end{aligned}$$

Ed ora restano h_α , h_τ , h_β da esprimere per mezzo delle (1). A questo scopo si introduca l'operazione

$$\delta = \sum \frac{\partial}{\partial a_{ikl}} b_{ikl}$$

e si osservi che

$$\delta f_1 = f_2, \quad \delta f_2 = 0,$$

$$\delta F_{11} = 2F_{12}, \quad \delta F_{12} = F_{22}, \quad \delta F_{22} = 0,$$

$$\delta A_1 = 3\Theta_1, \quad \delta \Theta_1 = 2\Theta_2, \quad \delta \Theta_2 = A_2, \quad \delta A_2 = 0.$$

Inoltre, considerisi la conica polare del punto y rispetto alla curva $f_1 = 0$; essa ha per equazione, in coordinate di punti. $a_y^{m-2} a_x^2 = 0$, ed in coordinate di rette. $u_y^2 A_v^{2m-4} = 0$, ed ha per discriminante

$$(aa'a')^2 a_y^{m-2} a_x^{m-2} a_{y'}^{m-2};$$

si ricordi l'identità

$$(\alpha\alpha'x)^2 A_y^{2m-4} A_y^{12m-4} = \frac{4}{3} (aa'a')^2 a_y^{m-2} a_y^{m-2} a_{y'}^{m-2} a_{y'}^{m-2} a_x^2$$

donde per $y_i = x_i$ segue quest'altra

$$(\alpha\alpha'x)^2 A_x^{2m-4} A_x^{12m-4} = \frac{4}{3} A_1 f_1$$

Su quest'ultima si operi tre volte di seguito col simbolo δ , e si avrà

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} h_\alpha = \Theta_1 f_1 + \frac{4}{3} A_1 f_2 \\ h_\tau = \Theta_2 f_1 + \Theta_1 f_2 - \frac{1}{2} \Phi_{12} \\ h_\beta = \frac{4}{3} A_2 f_1 + \Theta_2 f_2. \end{array} \right.$$

Sostituendo queste espressioni nella (14) si ha finalmente

$$\begin{aligned}
 (16) p^3(p-1)^2(U, U, U) &= (m-1)(p-1)m^3 A_1 f_2^3 - 3(m-1)m^2 n \Theta_1 f_2^2 f_1 \\
 &\quad - 3(n-1)mn^2 \Theta_2 f_2 f_1^2 + (n-1)(p-1)n^3 A_2 f_1^3 \\
 &\quad + \frac{3}{2} m^2 n^2 (p-2) \Phi_{12} f_1 f_2
 \end{aligned}$$

e questa è la formola che si voleva dimostrare; l'accordo tra questa e quella citata del Salmon è evidente, quando si tenga conto delle relazioni

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{6}{m^3(m-1)^3} H, & A_2 &= \frac{6}{n^3(n-1)^3} H', \\
 \Theta_1 &= \frac{2}{m^2(m-1)^2 n(n-1)} \Theta, & \Theta_2 &= \frac{2}{m(m-1)n^2(n-1)^2} \Theta', \\
 \Phi_{12} &= \frac{4}{m^2(m-1)n^2(n-1)} W.
 \end{aligned}$$

Se una delle forme è di 1° grado $f_2 = u_x$, la (16) si semplifica e diventa

$$\frac{(m+1)^3}{m-1}(U, U, U) = m^2 A_1 u_x^3 - 3(a a' u)^2 a_x^{m-2} a_x'^{m-2} \cdot f_1 u_x,$$

donde segue che: se una curva si spezza in una retta ed in una curva d'ordine m , la sua Hessiana si spezza in quella stessa retta ed in una curva d'ordine $3m-4$, la quale taglia la retta negli m punti che questa ha in comune colla curva d'ordine m , ed in altri $2m-4$ punti, i quali stanno sulla curva

$$(a a' u)^2 a_x^{m-2} a_x'^{m-2} = 0$$

e quindi (per l'*Uebertragungsprincip*) formano il gruppo Hessiano dei primi m punti. E però: se si hanno m rette, e se su ciascuna si prende il gruppo Hessiano degli $m-1$ punti d'incontro colle altre $m-1$ rette, si avranno $2m(m-3)$ punti, che stanno sopra una curva di ordine $2(m-3)$, la quale fa parte dell'Hessiana della curva d'ordine m degenera, costituita

dalle m rette, essendo la rimanente parte dell'Hessiana composta delle stesse m rette. In particolare (per $m = 4$) l'Hessiana di un quadrilatero si compone del quadrilatero e di quella notevole conica, che è stata considerata la prima volta dal Prof. Cremona (*).

Roma, 16 febbrajo 1889

F. GERBALDI.

(*) Vedi Giornale di Matematiche di Battaglini, vol. II.—Quistione 28.^a, pag. 30.—Soluzione pag 52.