XI. *Ueber die Zurückführung der hexagonalen
Gestalten auf drei rechtwinklige Axen;*
von C. Naumann.

Wenn sich alle dynamischen Eigenschaften der krystallisirten Substanzen in der That auf drei rechtwinklige Axen beziehen lassen, und wenn in solcher Beziehung ein wirkliches Naturgesetz und nicht bloß eine mathematische Hypothese erhalten seyn soll, so werden gewiß auch die geometrischen Eigenschaften, vermöge des zwischen ihnen und den dynamischen Eigenschaften bestehenden Causal-Nexus, dieselbe naturgemäße und ungezwungene Beziehung auf jene drei rechtwinkligen Axen gestatten. Naturgemäß und ungezwungen kann aber diese Beziehung wohl nur dann genannt werden, wenn sie mit den Symmetriegesetzen der Gestaltung im Einklange steht, d. h. wenn die rechtwinkligen dynamischen Axen eine symmetrische Lage zu den Begränzungs-Elementen der Formen besitzen, weil außerdem ein Widerspruch zwischen Form und Wesen hervortreten würde, zu dessen Anerkennung man sich schwerlich geneigt fühlen möchte, selbst wenn er durch eine künstliche Interpretation der Formen scheinbar zu lösen seyn sollte.

Die krystallisirten Körper, welche in dieser Hinsicht zunächst einer Prüfung unterworfen zu werden verdienen, sind die hexagonalen, in deren morphologischen Verhältnissen nicht nur ein vierzähliges, sondern auch ein schiefwinkliges Axensystem so unabweislich ausgesprochen ist, daß sich alle Krystallographen unbedenklich zur Annahme eines solchen Axensystems entschlossen haben, wie sehr auch manche derselben außerdem die schiefwinkligen Axen zu perhorresciren pflegen. Käme es bei der krystallographischen Auffassung und Bestimmung der

Formen lediglich auf mathematische Einfachheit an, so würden freilich *vier* Axen, von denen sich drei unter 60° schneiden, eine sehr unpassende Grundlage bilden; aber der Krystallograph soll nicht nur Mathematiker, sondern auch Naturforscher seyn, für ihn haben daher die, in den Krystallformen hervortretenden Symmetrie-Verhältnisse eine gewichtige Bedeutung, und er opfert willig die Einfachheit des Calcüls auf, um die Uebereinstimmung seiner mathematischen Interpretation mit jenen Symmetrie-Verhältnissen zu erhalten. Und wenn er sich auch erlaubt für gewisse Probleme den Mechanismus der Rechnung durch ein subsidiarisch eingeführtes dreizähliges und rechtwinkliges Axensystem zu vereinfachen, so läßt er doch die Endresultate dieser Rechnung immer wieder in derjenigen Form hervortreten, welche dem, von der Natur zunächst gebotenen, vierzähligen und schiefwinkligen Axensysteme angemessen ist.

Ich sage, dem von der Natur *zunächst* gebotenen; denn allerdings giebt es wenigstens zwei rechtwinklige Axensysteme, deren Elemente eine symmetrische Lage zu den hexagonalen Krystallformen besitzen; so wie man ja auch die tesserale Formen auf ein hexagonales Axensystem beziehen kann. Aber freilich würden die morphologischen Verhältnisse der hexagonalen Gestalten bei solchen rechtwinkligen Axen gewissermaßen in denen des Tesseralsystems aufgehen, und alle hexagonale Formen nur als einseitig und partiell ausgebildete tesserale Gestalten zu deuten seyn.

Stellt man sich das Hexaëder als ein Rhomboëder aufrecht, so bilden bekanntlich seine drei horizontal liegenden rhombischen Zwischenaxen die *Nebenaxen*, und seine vertical stehende trigonale Zwischenaxe die *Hauptaxe* eines hexagonalen Axensystems. Seine drei Hauptaxen dagegen werden diejenigen Linien seyn, welche *eine* der vorerwähnten rechtwinkligen Axensysteme, und zwar dasjenige constituiren, dem zunächst eine Berück-

sichtigung werden soll, weil es auch in krystallographischer Hinsicht die einfachste Zurückführung aller hexagonalen Gestalten auf partiell ausgebildete tesserale Gestalten gestattet.

Die Coordinaten u, x, y eines schiefwinkligen Axensystemes, und die Coordinaten X, Y, Z eines rechtwinkligen Axensystemes sind bekanntlich durch folgende allgemeine Gleichungen mit einander verbunden:

$$X = u \cos(Xu) + x \cos(Xx) + y \cos(Xy)$$

$$Y = u \cos(Yu) + x \cos(Yx) + y \cos(Yy)$$

$$Z = u \cos(Zu) + x \cos(Zx) + y \cos(Zy)$$

wo (Xu) , (Xx) u. s. w. die Neigungswinkel der Axe der X zu den Axen der u, x u. s. w. bedeuten.

Um diese Gleichung auf das Hexagonalsystem behufs seiner Reduction auf das Tesseralsystem, anzuwenden verfährt man wie folgt:

Es seyen die vier Axen des hexagonalen Systems dergestalt bezeichnet, daß die Hauptaxe als Axe der u auftritt und ihre positive Hälfte nach *oben* gerichtet hat, während die drei Nebenaxen der x, y und z ihre positiven und negativen Hälften abwechselnd liegen haben. In den drei diagonalen Hauptschnitten nehme man nun drei Linien, welche gegen die Hauptaxe unter dem Winkel, dessen Cosinus $= \sqrt{\frac{1}{3}}$, geneigt sind, und folglich mit einander die Axen des Tesseralsystemes darstellen. Man bezeichne sie so, daß über den Sextanten der xy die Axe der Z , über den Sextanten der yz die Axe der X , und über den Sextanten der zx die Axe der Y zu liegen kommt, und betrachte ihre nach *oben* gerichteten Hälften als die *positiven* Halbaxen.

Beide Axensysteme haben offenbar eine vollkommen symmetrische Lage zu einander, welche bei der angegebenen Bezeichnung der Axen sehr bestimmt hervortritt, und keine andere als diejenige ist, welche vorhin am Hexaëder betrachtet wurde. Da man nun gleichzeitig nur mit drei Axen rechnen kann, so berücksichtigt man zu-

vörderst die Axen der u , x und y , und bestimme demnach die Cosinus der Neigungswinkel (Xu) , (Xx) u. s. w., indem man dabei zunächst auf die *positiven* Halbaxen reflectirt ¹⁾. Man findet:

$$\cos(Xu) = \sqrt{\frac{1}{3}}, \cos(Xx) = 0, \cos(Xy) = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\cos(Yu) = \sqrt{\frac{1}{3}}, \cos(Yx) = -\sqrt{\frac{1}{2}}, \cos(Yy) = 0$$

$$\cos(Zu) = \sqrt{\frac{1}{3}}, \cos(Zx) = \sqrt{\frac{1}{2}}, \cos(Zy) = -\sqrt{\frac{1}{2}}$$

und erhält daher für die Coordinaten X , Y und Z folgende Werthe als Functionen der Coordinaten u , x und y :

$$X = u\sqrt{\frac{1}{3}} + y\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$Y = u\sqrt{\frac{1}{3}} - x\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$Z = u\sqrt{\frac{1}{3}} + x\sqrt{\frac{1}{2}} - y\sqrt{\frac{1}{2}}$$

Aus diesen Gleichungen folgen rückwärts die Werthe von u , x und y als Functionen von X , Y und Z ; nämlich:

$$u = \frac{X + Y + Z}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{(X - 2Y + Z)\sqrt{2}}{3}$$

$$y = \frac{(2X - Y - Z)\sqrt{2}}{3}$$

Diese Werthe sind also die Substituenden der Coordinaten u , x und y in irgend einer für das Hexagonalsystem gegebenen Gleichung, um solche auf das tesserale Axensystem zu reduciren, und, weil man jede Gleichung, in welcher statt einer der Coordinaten x oder y die Coordinate z erscheint, sehr leicht in eine von z , unabhängige Gleichung verwandeln kann, so wäre die Grundlage aller Transformationen in vorstehenden drei Werthen gefunden.

Es sey nun im Sextanten der $+x$ und $-y$ irgend eine Fläche durch die Gleichung:

$$\frac{u}{m} + \frac{x}{r} - \frac{y}{s} = 1$$

1) In den folgenden Rechnungen ist angenommen, daß die positive Halbaxe Z über den Sextanten der $+x$ und $-y$ fällt etc.

gegeben, und auszumitteln, welche Parameter dieselbe Fläche in dem Axensysteme der X , Y und Z bestimmen, so erhält man durch Substitution obiger Werthe von u , x und y :

$$\begin{array}{lcl} \text{in der Axe } X \text{ den Parameter} & \frac{3mrs}{rs\sqrt{3+m(s-2r)}\sqrt{2}} \\ - & - & - \\ - & Y & - \\ - & - & - \\ - & Z & - \\ - & - & - \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{3mrs}{rs\sqrt{3+m(r-2s)}\sqrt{2}} \\ \frac{3mrs}{rs\sqrt{3+m(s+r)}\sqrt{2}} \end{array}$$

Dieses auf unsere krystallographische Bezeichnung angewendet, giebt für die dihexagonale Pyramide mPn , an welcher in dem tesseralen Axensysteme der Lage nach zweierlei Flächensysteme zu unterscheiden sind, Folgendes. Für eine der, in dem Sextanten der x und $-y$ gelegenen und dem *einen* Flächensysteme angehörigen Flächen F ist die, aus dem krystallographischen Zeichen mPn unmittelbar folgende Gleichung;

$$\frac{u}{ma} + \frac{x}{n} - y = 1.$$

Für ihre, in dem Sextanten der $-y$ und z gelegene und dem *anderen* Flächensysteme angehörige Nebenfläche F' aber wird dieselbe Gleichung:

$$\frac{u}{ma} - y + \frac{z}{n} = 1,$$

statt welcher jedoch die von z unabhängige und dafür auf die Axe der x bezügliche Gleichung:

$$\frac{u}{ma} + \frac{(n-1)x}{n} - y = 1$$

anzuwenden ist.

Man setze also in den vorher gefundenen Parameter-Werthen

erst für F , statt m die Gröfse ma

$$\begin{array}{cccc} - & r & - & n \\ - & s & - & 1 \end{array}$$

dann für F' , statt m die Größe ma

$$\begin{array}{rcccl} & r & - & & \frac{n}{n-1} \\ & s & - & & 1 \end{array}$$

so erhält man, nach Unterdrückung des gemeinschaftlichen Zählers $3mrs$, für F :

$$\begin{array}{rcl} \text{in } X, \text{ den Parameter} & \frac{1}{n\sqrt{\frac{3}{2}} - ma(2n-1)} \\ - Y, & - & \frac{1}{n\sqrt{\frac{3}{2}} - ma(2-n)} \\ - Z, & - & \frac{1}{n\sqrt{\frac{3}{2}} + ma(n+1)} \end{array}$$

und für F' :

$$\begin{array}{rcl} \text{in } X, \text{ den Parameter} & \frac{1}{n\sqrt{\frac{3}{2}} - ma(n+1)} \\ - Y, & - & \frac{1}{n\sqrt{\frac{3}{2}} + ma(2-n)} \\ - Z, & - & \frac{1}{n\sqrt{\frac{3}{2}} + ma(2n-1)} \end{array}$$

Die ersteren drei Werthe gelten für die Skalenoëder $\frac{mPn}{2}$, die letzteren für die complementären Skalenoëder $-\frac{mPn}{2}$, welche beide vereinigt die dihexagonale Pyramide mPn darstellen.

Für die Rhomboëder und hexagonalen Pyramiden der Hauptreihe ist $n=1$, und für die hexagonalen Pyramiden der Nebenreihe $n=2$, also wird das Verhältniß der Parameter in den Axen der X , Y und Z ,

für $\frac{mP}{2}$ oder mR :

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}} - ma} : \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}} - ma} : \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}} + 2ma},$$

für $-\frac{mP}{2}$ oder $-mR$:

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}} - 2ma} : \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}} + ma} : \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}} + ma}$$

und endlich für $mP2$:

$$\frac{1}{1 - ma\sqrt{\frac{3}{2}}} : 1 : \frac{1}{1 + ma\sqrt{\frac{3}{2}}}$$

Man ersieht aus diesen Resultaten, daß die Reduction der Gestalten einer hexagonalen Krystallreihe auf das rechtwinklige Axensystem nur dann möglich ist, wenn der Hauptaxenwerth in der respectiven Grundgestalt ein Multiplum oder Submultiplum von $\sqrt{\frac{3}{2}}$ nach einer rationalen Zahl ist, weil nur unter dieser Bedingung die Ableitungszahlen rational werden können. Hiermit ist aber nichts Anderes ausgesprochen, als daß alle hexagonale Krystallreihen zuletzt aus dem *Hexaëder* als ihrer Grundgestalt derivirt werden sollen, woraus denn zugleich ein Zusammenfallen sämtlicher hexagonaler Gestalten mit gewissen tesserale Gestalten in der Weise folgt, daß die letzteren nur partiell, mit 6, 12 oder 24 Flächen ausgebildet sind, und dadurch als Rhomboëder, Prismen Skalenoëder, hexagonale oder dihexagonale Pyramiden erscheinen.

Um daher irgend eine hexagonale Krystallreihe auf die rechtwinkligen Axen des Tesseralsystemes zurückzuführen, hat man zuvörderst für den Hauptaxenwerth a ihrer Grundgestalt die Gleichung:

$$a = p\sqrt{\frac{3}{2}}$$

geltend zu machen, in welcher p eine *rationale* Zahl seyn muß. Soll nun aber p zugleich auch einen *einfachen* Zahlwerth haben, was allerdings für die Einfachheit der Resultate nöthig ist, so wird man freilich in den meisten Fällen die beobachteten Winkel der hexagonalen Grundgestalt um einige Minuten verändern müssen. So wird zum Beispiel

$$\begin{array}{ll} \text{für Eisenspath} & a = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}, \text{ wenn Polkt.} = 107^{\circ} 6' \\ \text{- Kalkspath} & a = \frac{7}{10}\sqrt{\frac{3}{2}} \quad \quad \quad = 104^{\circ} 55' \end{array}$$

für Quarz $a = \frac{9}{10} \sqrt{\frac{3}{2}}$, wenn Polkt. = $94^\circ 10'$
 - Eisenglanz $a = \frac{10}{9} \sqrt{\frac{3}{2}}$ - - = $86^\circ 6'$

und es entspräche dann das Rhomboëder

des Eisenspathes, 6 Flächen der Gestalt	7 0 7
- Kalkspathes, - - - -	8 0 8
- Quarzes - - - -	28 0 28
- Eisenglanzes, - - - -	29 0 29.

Für die weitere Beurtheilung der Resultate mag folgende Vergleichung einiger Kalkspathformen dienen; es entspricht z. B. unter obiger Voraussetzung

die Form $-\frac{1}{2}R$, 6 Flächen der Gestalt	$\frac{2}{3}O$
- - $-2R$, - - - -	$\frac{4}{3}O$
- - $4R$, - - - -	$\frac{11}{3}O \frac{11}{3}$
- - $-R$, - - - -	$\frac{1}{4}O$
- - R^3 , 12 - - - -	$15O \frac{1}{3}$.

Uebrigens scheint es mir, daß diese Darstellungsart der hexagonalen Gestalten in rein krystallographischer Hinsicht immer nur einen sehr untergeordneten Werth behalten dürfte, weil damit keine einfachere Ansicht der Formen gewonnen wird, und weil man, bei Zugrundlegung der genauesten Winkelmessungen, gewöhnlich auf so unbequeme Ableitungszahlen gelangt, daß man nur selten einiges Interesse an solchen Vergleichungen finden wird.

XII. Chlorbenzin und Chlorbenzid; von E. Mitscherlich.

(Aus einer Abhandlung in den Denkschriften der K. Academie zu Berlin. — Die übrigen Gegenstände dieser Abhandlung wurden bereits früher mitgetheilt in dies. Ann. Bd. XXIX S. 231. Bd. XXXI S. 273. 283. 625. 631, Bd. XXXII S. 225 und 227.)

Am bequemsten erhält man das Chlorbenzin, wenn man in eine große Flasche Benzin gießt, und, während die Sonne darauf scheint, Chlor hineinleitet; das Chlor wird sogleich unter Wärmeentwicklung und Bildung von weißen Dämpfen absorbirt. Nach einiger Zeit sondert sich