V. Theorie der Doppelbrechung in inductiver Darstellung; von Franz Koláček.

Bekanntermaassen führen ziemlich weit auseinandergehende Vorstellungen über das Wesen der Lichtfortpflanzung in Krystallen zu den Fresnel'schen Gesetzen der Doppelbrechung. Es sei diesbezüglich an die elastischen und electromagnetischen Lichttheorien erinnert. Im Folgenden ist der Versuch unternommen, diese Gesetze, soweit sich dieselben auf den geometrischen Charakter der Doppelbrechung beziehen, und als solche erfahrungsmässig gesichert sind, auf inductivem Wege abzuleiten. Zum mindesten hat man den Gewinn eines vorurtheilsfreien Einblickes in das Wesen der unentbehrlichsten Hypothesen, auf denen sich die Doppelbrechungstheorie aufbaut.

Den Ausgangspunkt bildet das Huygens'sche Princip.

1. Auf die Trennungsebene zwischen einem zweiaxigen Krystall und Luft falle eine ebene Welle auf. Das Gebiet der optischen Gleichgewichtsstörung sei einerseits begrenzt durch zwei zur Einfallsebene senkrecht stehende, untereinander parallele Ebenen, welche sich durch zwei Wellennormalen in Luft legen lassen, andererseits durch die Einfallsebene und eine ihr unendlich nahe parallele Ebene. A sei das zuerst, B das zuletzt in einem Punkte der Trennungsebene A' aufstossende Ende der ebenen Welle. Ihre Breite AB sei so gewählt, dass letzteres Ende um die Zeiteinheit später die Trennungsebene erreicht, als das Ende A . Die Zahl der Tangentenebenen, welche sich zu der inzwischen von A ausgegangenen Wellenfläche durch eine den Punkt A' enthaltende, zur Einfallsebene senkrecht stehende Gerade legen lassen, bestimmt die Zahl der gebrochenen ebenen Wellen; die von A auf sie gefällten Senkrechten messen ihre Geschwindigkeit in der Richtung der Wellennormalen, die Verbindungslinien von A mit den Berührungspunkten, die sogenannten Strahlen bestimmen im Krystall für jede Welle die Grenzen der optischen Gleichgewichtsstörung nach einer Seite der Einfallsebene. Die Wellenfläche selbst ist die Grenze, bis zu welcher in der

Zeiteinheit die Störung vom Punkte A aus vorgeschritten ist. Lässt man die Trennungsebene alle möglichen Lagen gegenüber den krystallographischen Axen einnehmen, lässt man ferner ebene Wellen in senkrechter Richtung auf dieselben auffallen, so gelangt man mit Hülfe des Huygens'schen Principis unmittelbar zur Erkenntniss, dass vice versa die Wellenfläche die einhüllende der ebenen Wellen ist, die sich von einem Punkte aus nach allen möglichen Richtungen fortgepflanzt haben. Man denke sich nun im Innern des Krystalles die vollständige Wellenfläche construiert, und durch eine beliebige ausser ihr gelegene Gerade G , sowie durch den Ausgangspunkt der Erschütterung, der Centrum der Wellenfläche heissen soll, eine Ebene gelegt, Ersetzt man das eine mal oberhalb, das andere mal unterhalb dieser Ebene die krystallinische Masse durch die Luft, so wird diese Ebene beidemal zur Trennungsebene, eine zu ihr und zu G senkrecht gelegte Ebene wird Einfallsebene, und die Gerade G wird jene Gerade sein können, durch welche man die Tangentenebenen legt. Man deducirt hieraus, sowie aus dem Begriffe der doppelten Brechung die fundamentale Eigenschaft der Wellenfläche, dass sich durch eine beliebige ausserhalb derselben gelegene Gerade vier reelle Tangentenebenen zu ihr legen lassen.

2. Eine Ebene bestimmt auf den drei rechtwinkligen Coordinatenaxen x, y, z die Abschnitte $1/f, 1/g, 1/h$; die Grössen f, g, h sollen als Bestimmungsstücke der Ebene Coordinaten der Ebene genannt werden. Die Cartesischen Coordinaten eines Punktes dieser Ebene seien x_1, y_1, z_1 . Dann gilt $x_1 f + y_1 g + z_1 h = 1$. Hält man den Punkt fest, so gestattet diese Gleichung die Coordinaten f, g, h jener Ebenen zu bestimmen, die durch diesen Punkt hindurchgehen, kurz, es ist dies die Gleichung des Punktes x_1, y_1, z_1 in Ebenencoordinaten. Die Gleichung eines zweiten Punktes $x_2 f + y_2 g + z_2 h = 1$ gestattet im Verein mit der ersten die Berechnung der Coordinaten f, g, h jener Ebenen, welche durch die Verbindungslinie beider Punkte hindurchgehen.

Eine Gleichung der Form $F(f, g, h) = 0$ repräsentirt eine Fläche als Enveloppe derjenigen Ebenen, deren Coordinaten dieser Gleichung genügen.

Die Coordinaten f, g, h der Ebenen, welche durch eine Gerade $x_1 y_1 z_1, x_2 y_2 z_2$ hindurchgehen und die Fläche berühren, genügen den drei Relationen:

$$F(f, g, h) = 0, \quad x_1 f + y_1 g + z_1 h = 1, \quad x_2 f + y_2 g + z_2 h = 1.$$

Daraus folgt unmittelbar, dass die Wellenfläche bezüglich der f, g, h vom vierten Grade sein muss.

Wir machen nun die Annahme, dass die Wellenfläche bezüglich drei zu einander senkrechter Ebenen ($x = 0, y = 0, z = 0$) symmetrisch sei. Daraus folgt, dass, wenn eine Berührungsebene die Abschnitte $1/f, 1/g, 1/h$ auf den dritten Axen bestimmt, vermöge der Symmetrie um die $z = 0$ -Ebene eine Berührungsebene mit den Abschnitten $1/f, 1/g, -1/h$ existiren muss. Genügt, mit anderen Worten gesagt, ein $+f, +g, +h$, so genügt auch $+f, +g, -h$. In der Gleichung vierten Grades können daher nur gerade Potenzen von h vorkommen. Ist auch die $x = 0$ - und $y = 0$ -Ebene eine Symmetrieebene, so reducirt sich die Gleichung der Wellenfläche auf

$$A f^4 + B g^4 + C h^4 + A' f^2 + B' g^2 + C h^2 + A'' f^2 g^2 + B'' f^2 h^2 + C'' h^2 g^2 + 1 = 0.$$

3. Die Doppelbrechung erzeuge linear polarisirtes Licht. In der verschiedenen linearen Polarisation beider Lichtstrahlen wird man die nächstliegende Ursache ihrer verschiedenen Fortpflanzungsgeschwindigkeit erblicken. Für eine linear polarisirte ebene Welle werden offenbar die Wellennormale und die laut Annahme zu ihr senkrechte Schwingungsrichtung bevorzugte Richtungen sein; ähnliches gilt von einer dritten Richtung, die auf beiden senkrecht steht, und Richtung der conjugirten Schwingungen heissen soll. Mit dem Ausdrucke Schwingungsrichtung soll keineswegs die Vorstellung einer materiellen Bewegung, sondern bloss eine Vectorrichtung gemeint sein. Die Grundhypothese, welche nun sowohl zur Feststellung der Wellenfläche, als auch zur Darstellung der Polarisationsverhältnisse vollkommen ausreicht, lautet:

a) Alle ebenen Wellen, deren Schwingungsrichtungen parallel sind, haben gleiche Fortpflanzungsgeschwindigkeit, oder

b) alle ebenen Wellen mit parallelen conjugirten Schwingungsrichtungen, besitzen gleiche Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

Es sind dies also eigentlich zwei sich ausschliessende Hypothesen. Man mag sich an die eine oder die andere anschliessen, beide ergeben dieselben Gesetze der Doppelbrechung. Der Unterschied in den Consequenzen derselben beruht lediglich in der verschiedenen Lage der Schwingungsrichtung gegen die Polarisationssebene. Dieser Umstand zeigt recht deutlich, dass man auf Grund der Doppelbrechungserscheinungen über die Lage der Polarisationssebene gegen die Schwingungsrichtung kein Urtheil fällen kann.

Es seien a, b, c die Geschwindigkeiten der ebenen Wellen, deren wirkliche (bez. conjugirte) Schwingungsrichtung in die xyz -Axe fällt. In der Richtung der x -Axe pflanzen sich zwei ebene Wellen fort, für welche $1/h = \infty$, $1/g = \infty$, $1/f = b$ oder c ist.

Der obigen Gleichung vierten Grades genügt demnach $g = 0$, $h = 0$, $f = 1/b$ oder $1/c$. Damit bestimmt sich A und A' zu $A = b^2 c^2$, $A' = -(b^2 + c^2)$. In ähnlicher Weise hat man $B = c^2 a^2$, $B' = -(a^2 + c^2)$, $C = a^2 b^2$, $C' = -(a^2 + b^2)$.

Um A'' zu bestimmen, denken wir uns in der xy -Ebene eine Wellennormale, welche mit der x -Axe den Winkel φ , mit der y -Axe den Winkel $90 - \varphi$ einschliesst. Die entsprechende wirkliche (resp. conjugirte) Schwingungsrichtung falle in die z -Axe. Diese Ebene bestimmt dann auf den drei Axen x, y, z Abschnitte von der Grösse $1/f = c/\cos \varphi$, $1/g = c/\sin \varphi$, $1/h = \infty$, da ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit, unabhängig von φ , c beträgt. Es hat also der Gleichung zu genügen $f = \cos \varphi/c$, $g = \sin \varphi/c$, $h = 0$. Man findet hieraus $A'' = c^2(a^2 + b^2)$ und in ähnlicher Weise $B'' = b^2(a^2 + c^2)$, $C'' = a^2(b^2 + c^2)$.

Damit gewinnt die Gleichung der Wellenfläche in Ebenen-coordinaten die Gestalt

$$\left(\frac{f^2}{a^2} + \frac{g^2}{b^2} + \frac{h^2}{c^2}\right)(f^2 + g^2 + h^2) - \frac{f^2}{a^2}\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) - \frac{g^2}{b^2}\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right) - \frac{h^2}{c^2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) + \frac{1}{a^2 b^2 c^2} = 0,$$

oder, wenn $f^2 + g^2 + h^2 = R^2$ gesetzt wird:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{f^2}{a^2} + \frac{g^2}{b^2} + \frac{h^2}{c^2} \\ R^2 - \frac{1}{a^2} + R^2 - \frac{1}{b^2} + R^2 - \frac{1}{c^2} \end{array} \right. = 0.$$

Die Wellennormale schliesse mit den drei Coordinatenachsen Winkel mit den Cosinussen l, m, n ein. Die vom Coordinatenursprung auf eine berührende Ebene gefällte Senkrechte ist die Geschwindigkeit v .

Daraus folgt $v = (1/f)l = (1/g)m = (1/h)n \dots$ oder $f = l/v, g = m/v, h = n/v$.

Substituirt man diese Werthe in 1, so folgt die bekannte Relation

$$(2) \quad \frac{l^2}{v^2 - a^2} + \frac{m^2}{v^2 - b^2} + \frac{n^2}{v^2 - c^2} = 0.$$

Es ist dies selbstverständlich wieder eine Gleichung der Wellenfläche in Ebenencoordinaten l, m, n, v , da diese Grössen die Lage der Berührungspunkte feststellen.

Von (2) aus gelangt man in bekannter Weise zur Gleichung der Wellenflächen in Cartesischen Punktcoordinaten.

4. Es seien λ, μ, ν Cosinuse der directen (resp. conjugirten) Schwingungsrichtung. Für Wellen, bei denen sich l, m, n um dl, dm, dn ändert, kann sich v nicht ändern, sobald λ, μ, ν constant gehalten wird (laut Hypothese in Absatz 3). Man bekommt hieraus drei Relationen:

$$l dl + m dm + n dn = 0$$

$$\lambda dl + \mu dm + \nu dn = 0$$

$$\frac{l}{v^2 - a^2} dl + \frac{m}{v^2 - b^2} dm + \frac{n}{v^2 - c^2} dn = 0.$$

Durch Elimination von dl, dm, dn und nach passender Anordnung folgt

$$(3) \quad \frac{lL}{v^2 - a^2} + \frac{mM}{v^2 - b^2} + \frac{nN}{v^2 - c^2} = 0,$$

wobei

$$(5) \quad \frac{L}{n\mu - \nu m} = \frac{M}{l\nu - \lambda n} = \frac{N}{m\lambda - \mu l}.$$

Offenbar sind L, M, N Richtungscosinuse einer Geraden, die auf der Wellennormale l, m, n und der directen (resp. conjugirten) Schwingungsrichtung senkrecht steht. Aus (2) und (3) folgt wegen

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\lambda}{nM - Nm} = \frac{\mu}{lN - Ln} = \frac{\nu}{mL - Ml} \\ \frac{l}{v^2 - a^2} = \lambda \cdot K \\ \frac{m}{v^2 - b^2} = \mu \cdot K \\ \frac{n}{v^2 - c^2} = \nu \cdot K, \end{array} \right.$$

wobei K eine Proportionalitätsconstante bedeutet.

Aus (5) bekommt man

$$\frac{l}{\lambda} \cdot \frac{1}{K} = v^2 - a^2, \quad \frac{m}{\mu} \cdot \frac{1}{K} = v^2 - b^2, \quad \frac{n}{\nu} \cdot \frac{1}{K} = v^2 - c^2.$$

Hieraus

$$(5') \quad \left\{ \begin{array}{l} b^2 - a^2 = \frac{K'}{\lambda \mu \nu} \cdot \nu N \\ c^2 - b^2 = \frac{K'}{\lambda \mu \nu} \cdot \lambda L \\ a^2 - c^2 = \frac{K'}{\lambda \mu \nu} \cdot \mu M, \end{array} \right.$$

wobei K' eine neue Proportionalitätsconstante vorstellt.

Multiplicirt man die Gleichung (5) folgeweise durch c^2 , a^2 , b^2 und addirt, so folgt

$$(6) \quad a^2 \lambda L + b^2 \mu M + c^2 \nu N = 0.$$

Die Gleichung (6) hat eine einfache Bedeutung.

Das Ellipsoid $a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 = 1$ werde durch eine das Centrum desselben enthaltende Ebene geschnitten, die zur Wellenebene parallel ist. Es sind die Hauptaxen des Schnittes zu bestimmen. Zu einer solchen Hauptaxe sollen die Richtungs-cosinuse λ , μ , ν gehören. Dann muss wegen $x = \varrho \lambda$, $y = \varrho \mu$, $z = \varrho \nu$ ϱ ein Maximum oder Minimum sein. Dies fordert

$$a^2 \lambda \cdot d\lambda + b^2 \mu d\mu + c^2 \nu d\nu = 0$$

$$\lambda \cdot d\lambda + \mu d\mu + \nu d\nu = 0$$

$$l \cdot d\lambda + m \cdot d\mu + n \cdot d\nu = 0.$$

Durch Elimination von $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ und nach Einführung der zu lmn und $\lambda\mu\nu$ senkrechten Richtung LMN erhält man die Gleichung (6).

Die Schwingungsrichtungen des polarisirten Lichtes fallen demnach in die Hauptaxen des Schnittes, welchen eine zur Wellennormale senkrechte durch den Mittelpunkt des Ellipsoides $a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 = 1$ hindurchgehende Ebene mit ihm bestimmt.

Auch dieser Satz steht mit der Erfahrung in Uebereinstimmung.

Prag, Juli 1892.