2. *Bemerkungen zur Theorie der konischen Refraktion; von W. Voigt.*

1. Das vollständig unstetige Verhalten der Lichtstrahlen in einem zweiachsigen Kristall, das nach der Fresnelschen Theorie eintritt, wenn eine Wellennormale sich einer optischen Achse nähert, mag schon öfter Bedenken erregt haben; in der Tat dürfte es schwer sein, im ganzen Gebiete der Physik ein Analogon dafür zu finden, und gerade dieser Umstand hat vielleicht bei dem außerordentlichen Aufsehen, welches die Hamilton-Lloydsche Entdeckung der konischen Refraktion seiner Zeit verursachte, mitgewirkt.

Ich habe in einer früheren Arbeit¹⁾ nachgewiesen, daß das beobachtbare Phänomen, das gemeinhin auf das singuläre Verhalten der längs einer optischen Achse fortgepflanzten Welle zurückgeführt wird, in Wahrheit gar nicht auf demselben beruht. Im folgenden möchte ich eine Überlegung mitteilen, die mir wahrscheinlich macht, daß *jenes singuläre Verhalten selbst in Wahrheit auch nicht existiert*. Da dieselbe zur Ableitung der in der vorigen Arbeit darzulegenden Resultate nicht notwendig war, so habe ich sie dort nicht eingefügt, sondern bringe sie lieber hier als Nachtrag.

Ich habe in jener Arbeit darauf hingewiesen, daß die moderne (physikalische) Deutung der Lichtstrahlen durch den Energiefluß nicht notwendig mit der älteren (geometrischen) durch den Radiusvektor der Wellenfläche zusammenfällt. Es läßt sich in der Tat im allgemeinen nur eine *angenäherte* Übereinstimmung der beiderseitigen Aussagen plausibel machen, und selbst diese nur unter Heranziehung hypothetischer Vorstellungen, z. B. der Annahme, daß, wenn mehrere Wellen in demselben Raume fortschreiten, die beiderseitigen Energieflüsse sich in für die Beobachtung merklicher Weise nicht gegenseitig beeinflussen. Eine solche Annahme erweist sich

1) W. Voigt, Ann. d. Phys. 18. p. 645. 1905.

in den Fällen verständlich, wo diejenigen Anteile des Energieflusses, die gleichzeitig auf *beiden* Wellen beruhen und die niemals fehlen, entweder in allen merklichen *Zeiten* oder in allen merklichen *Räumen* verschwindende (zeitliche oder räumliche) *Mittelwerte* ergeben. Aber gerade diese Voraussetzung ist dann nicht erfüllt, wenn es sich um die gleichzeitige Fortpflanzung einer ordinären und einer extraordinären Welle in Richtungen handelt, die einer optischen Achse sehr nahe liegen. Diese Wellen sind der Regel nach *kohärent*, demgemäß ist der *zeitliche* Mittelwert jenes Gliedes der Energieströmung nicht gleich Null; ihre Geschwindigkeitsdifferenz *verschwindet* bei Annäherung an die optische Achse, demgemäß wechselt ihre Phasendifferenz immer langsamer und wird schließlich konstant — sonach ist hier auch die Heranziehung eines *räumlichen* Mittelwertes nicht zulässig. Mir scheint daraus zu folgen, daß man in der unmittelbarsten Umgebung einer optischen Achse den Energiefluß, der den beiden Wellen entspricht, nicht zerlegen kann, sondern *ihn durchaus als Einheit betrachten muß*. Dann gelangt man aber zu Resultaten, die von denen der alten Theorie bemerkenswert abweichen.

2. Ich will hier, wie früher, ein Koordinatensystem benutzen, dessen *Z*-Achse in die Wellennormale, dessen *X*-Achse in die (magnetische) Polarisationsrichtung der ordinären, dessen *Y*-Achse in die Polarisationsrichtung der extraordinären Welle fällt. Sind dann *A*, *B* die Komponenten der schwingenden magnetischen Feldstärke, *U*, *V*, *W* die Komponenten der Energieströmung, so ergibt sich unter Benutzung der auf inaktive Kristalle spezialisierten Formeln (16), (17), (18) der vorigen Arbeit für die unmittelbare Umgebung einer optischen Achse gültig

$$(1) \quad \begin{cases} U = \frac{v}{8\pi} (\Theta_1 - \Theta_3) (B^2 n_e \cos i + A B n_o \sin i) \sin \Phi, \\ V = -\frac{v}{8\pi} (\Theta_1 - \Theta_3) (A^2 n_o \sin i + A B n_e \cos i) \sin \Phi, \\ W = \frac{v}{4\pi} \left(\frac{A^2}{n_o} + \frac{B^2}{n_e} \right). \end{cases}$$

Hierin bezeichnen Θ_1 und Θ_3 die extremen Werte des Quadrates des reziproken Brechungsindex, n_o und n_e die Brechungsindizes für die ordinäre und die extraordinäre zur *XY*-Ebene parallelen

Welle, i den Winkel der ZX -Ebene mit der Ebene der optischen Achsen, die ihrerseits miteinander den Winkel Φ einschließen.

In der unmittelbaren Umgebung einer optischen Achse unterscheiden sich n_o und n_e so wenig voneinander, daß man sie in (1) durch einen mittleren Wert n ersetzen kann. Führt man nun statt des ursprünglichen Koordinatenkreuzes XY ein anderes mit der X_o -Achse parallel, der Y_o -Achse normal zur Ebene der optischen Achsen ein, setzt also

$$(2) \quad \begin{cases} U_o = U \cos i - V \sin i, & V_o = U \sin i + V \cos i, \\ A_o = A \cos i - B \sin i, & B_o = A \sin i + B \cos i, \end{cases}$$

so liefert (1) unmittelbar

$$(3) \quad \begin{cases} U_o = \frac{v n}{8 \pi} (\Theta_1 - \Theta_3) B_o^2 \sin \Phi, \\ V_o = -\frac{v n}{8 \pi} (\Theta_1 - \Theta_3) A_o B_o \sin \Phi, \\ W_o = \frac{v}{4 \pi n} (A_o^2 + B_o^2). \end{cases}$$

In diesen Formeln steckt der Einfluß der Fortpflanzungsrichtung nur in den Abkürzungen A_o und B_o , die nach (2) aus zwei Anteilen mit verschiedenen Phasen bestehen, da sich die ordinäre Schwingung A mit einer anderen Geschwindigkeit fortpflanzt, als die extraordinäre B . Es gilt z. B. in einem Abstand z von der Eintrittsstelle in dem Kristall:

$$(4) \quad A = F \cos \alpha \left(t - \frac{z}{\omega_o} - f \right), \quad B = G \cos \alpha \left(t - \frac{z}{\omega_e} - g \right);$$

dabei kann man unter Vernachlässigung der Schwächung durch Reflexion beim Eintritt in die Platte die einfallende Welle durch

$$(5) \quad \bar{A} = F \cos \alpha (t - f), \quad \bar{B} = G \cos \alpha (t - g),$$

oder auch durch

$$(6) \quad \bar{A}_o = F_o \cos \alpha (t - f_o), \quad \bar{B}_o = G_o \cos \alpha (t - g_o)$$

dargestellt denken. Rückt die Wellennormale in die optische Achse A_1 , so ändert sich die Energieströmung ersichtlich *stetig*.

3. Die allgemeine Diskussion dieser Resultate ist offenbar sehr umständlich, doch fällt das Resultat sogleich auf, daß wenn man (3) in

$$(7) \quad U_o = h B_o^2, \quad V_o = -h A_o B_o, \quad W_o = k (A_o^2 + B_o^2)$$

abkürzt, sich die allgemeine Beziehung ergibt

$$(8) \quad U_0 W_0 = \frac{k}{h} (U_0^2 + V_0^2).$$

Wie also auch immer das Gesetz der einfallenden Schwingungen sei, und wie demgemäß die Richtung der Energieströmung oszilliere, stets bleibt die letztere für jede Stelle der fortgepflanzten Welle auf einem schiefen Kreiskegel von der Gleichung (8), der durch die Ebene der optischen Achsen halbiert wird, eine Kante in einer optischen Achse hat, während die zweite, in der Ebene der optischen Achsen liegende Kante mit jener den Winkel χ einschließt, gegeben durch

$$(9) \quad \operatorname{tg} \chi = \frac{h}{k} = \frac{1}{2} n^2 (\Theta_1 - \Theta_3) \sin \Phi.$$

Zeichnen wir hier und im folgenden auf einer Ebene, die normal zur optischen Achse A_1 im Abstand Eins von der betrachteten Stelle liegt, die Spur der durch jene Stelle gehenden Energieströmung, so ergibt sich ein Kreis vom Durchmesser $D = h/k$, der die Y_0 -Achse im Koordinatenanfang berührt (Fig. 1). Wir wollen diesen Kreis weiterhin kurz als den *Grundkreis* bezeichnen. Sein Zentrum C_1 ist sehr nahezu die Spur der zu A_1 gehörigen Strahlenachse.

Fig. 1.

Die Amplituden F_0 und G_0 der einfallenden Schwingungen mögen weiterhin der Einfachheit halber in einem solchen Maßstab gezeichnet werden, daß ihre Resultante durch eine Sehne des Grundkreises von der Stelle A_1 aus dargestellt wird (vgl. Fig. 1).

Der durch (8) gegebene Kegel ist identisch mit dem Kegel der theoretischen inneren konischen Refraktion; sein Auftreten drückt aber keineswegs etwa aus, daß die Energieströmung sich in diesem Kegel ausbreitet. Vielmehr verläuft der Energiefluß, da A_0 und B_0 mit t und z periodisch wechseln, in einer *Schraubenlinie*, die selber derartig rotiert, daß das jedem z

entsprechende Linienelement derselben seiner Richtung nach auf einem solchen Kegel verharret.

4. Für die Richtung der optischen Achse selbst, wo $\omega_o = \omega_e = \omega$, können wir schreiben

$$(10) \quad A_0 = F_0 \cos \alpha \left(t - \frac{z}{\omega} - f_0 \right), \quad B_0 = G_0 \cos \alpha \left(t - \frac{z}{\omega} - g_0 \right),$$

also

$$(11) \quad \begin{cases} U_0 = h G_0^2 \cos^2 \alpha \left(t - \frac{z}{\omega} - g_0 \right), \\ V_0 = -h F_0 G_0 \cos \alpha \left(t - \frac{z}{\omega} - f_0 \right) \cos \alpha \left(t - \frac{z}{\omega} - g_0 \right), \\ W_0 = k \left[F_0^2 \cos^2 \alpha \left(t - \frac{z}{\omega} - f_0 \right) + G_0^2 \cos^2 \alpha \left(t - \frac{z}{\omega} - g_0 \right) \right] \end{cases}$$

Der einfachste Fall, auf den diese Formeln angewendet werden können, ist der *einfallenden lineärpolarisierten Lichtes*, gegeben durch $f_0 = g_0$. Hier ist die Richtung der Energieströmung zeitlich und räumlich konstant, denn es gilt

$$(12) \quad U_0 : V_0 : W_0 = h G_0^2 : -h G_0 F_0 : h (F_0^2 + G_0^2).$$

Demgemäß liegt der Strahl, welcher einer mit der optischen Achse zusammenfallenden Wellennormale bei einfallender linearer Polarisation entspricht, auf dem Kegel der theoretischen inneren konischen Refraktion in der Ebene, welche durch die optische Achse normal zur Polarisationsebene des einfallenden Lichtes gelegt werden kann. Dies ist der Ort des (ordinären oder extraordinären) Strahles, der einer der optischen Achse A_1 unendlich nahen Wellennormale mit der betreffenden Polarisationsrichtung entspricht. Seine Spur in Fig. 1 ist der Punkt σ .

Die ältere Theorie ergibt in dem betrachteten Falle einen Strahlenkegel mit einer maximalen Intensität an der Stelle σ , einer minimalen in dem diametral gegenüberliegenden Punkte.

Fällt lineär schwingendes Licht mit regellos wechselnder Polarisationsebene ein, so wird der Punkt σ auch regellos über den Kreis in der Figur hingeleiten, und es muß hierdurch eine Art konischer Refraktion entstehen.

5. Ein zweiter einfacher Fall ist der einfallenden *zirkularpolarisierten Lichtes*, wo man

$$(13) \quad A_0 = F_0 \sin \alpha \left(t - \frac{z}{\omega} \right), \quad B_0 = \pm F_0 \cos \alpha \left(t - \frac{z}{\omega} \right)$$

setzen kann. Hier gilt dann, wenn $\alpha(t - z/\omega)$ in T abgekürzt wird, nach (7)

$$(14) \quad U_0 = h F_0^2 \cos^2 T, \quad V_0 = \mp h F_0^2 \sin T \cos T, \quad W_0 = 2 k F_0^2.$$

Man erkennt leicht, daß hier die Spur der Energieströmung den Kreis um C_1 in gleicher Geschwindigkeit durchläuft und zwar im + oder - Sinne, je nachdem in (13) das + oder - Zeichen gilt. Die Strömung verläuft somit in einer Schraubenlinie um die C_1 -Richtung als Achse; ein Schraubenumgang hat die Höhe einer Wellenlänge. Der betreffende wahrnehmbare Strahl würde demgemäß merklich mit der Richtung der Strahlenachse C_1 zusammenfallen.

Nach der älteren Theorie würde zirkularpolarisiertes Licht den Strahlenkegel mit überall merklich derselben Intensität liefern.

6. Der allgemeinere Fall einfallenden *elliptisch polarisierten* Lichtes bietet den Übergang zwischen den beiden zuvor besprochenen.

Hier setzen wir

$$(15) \quad A_0 = F_0 \cos(T - \delta), \quad B_0 = G_0 \cos(T + \delta)$$

und erhalten

$$(16) \quad \frac{V_0}{U_0} = - \frac{F_0}{G_0} \frac{\cos(T - \delta)}{\cos(T + \delta)},$$

woraus sich für $0 < \delta < \pi/2$ ergibt:

$$\text{für } T = 0, \quad \delta, \quad \frac{\pi}{2} - \delta, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} + \delta, \quad \pi = \delta,$$

$$\frac{V_0}{U_0} = - \frac{F_0}{G_0}, \quad - \frac{F_0}{G_0 \cos 2\delta}, \quad \mp \infty, \quad + \frac{F_0}{G_0}, \quad 0, \quad - \frac{F_0 \cos 2\delta}{G_0};$$

mit $T = \pi$ setzt der Anfang wieder ein.

In der nachstehenden Fig. 2 sind die diesen sechs Argumenten T für $\delta = \frac{1}{6}\pi$ entsprechenden Richtungen der Komponente $J = \sqrt{U_0^2 + V_0^2}$ parallel zur Wellenebene eingetragen. Die den sechs Richtungen zugehörigen Argumentalwerte schreiten um $\frac{1}{6}\pi$ fort, die korrespondierenden Zeitintervalle bei konstantem z sind also *gleich*. Man erkennt, daß bei einfallendem elliptisch polarisierten Licht die Rotation der Spur der Energieströmung auf dem Grundkreis mit *ungleichförmiger* Geschwindigkeit stattfindet; die kleinste Geschwindigkeit liegt nahe bei der Stelle 2, die größte bei 5.

Nun hat der Grundkreis nach (3) den Durchmesser $D = h/k$, ferner ist $D:R = R:F_0$, also wird

$$\bar{U}_0/\bar{W}_0 = G_0^2/F_0,$$

und da (vgl. Fig. 3) noch $E:G_0 = G_0:F_0$, so folgt schließlich

$$\bar{U}_0/\bar{W}_0 = E;$$

man hat somit nur E von A_1 auf der $+X_0$ -Achse abzutragen und im Endpunkt ein Lot auf der X_0 -Achse zu errichten; dessen Schnittpunkt mit der Geraden A_1P gibt die gesuchte Spur σ der mittleren Energieströmung.

Diese Konstruktion läßt die Einwirkung von Amplitudenverhältnis (F_0/G_0) und Verzögerung (2δ) auf die Richtung des Strahles, der einer in die optische Achse A_1 fallenden Wellennormale entspricht, sehr deutlich erkennen.

Fällt natürliches Licht ein, das man als schnell und regellos wechselndes, elliptisch polarisiertes auffassen kann, so ändert der Strahl derart regellos seine Richtung, daß seine Spur innerhalb des Grundkreises alle möglichen Lagen annimmt.

Da sich in einer geometrischen Richtung nur verschwindende Energiemengen fortpflanzen können, so haben die vorstehenden Betrachtungen ebensowenig *praktische* Bedeutung, wie das Hamiltonsche Resultat des Strahlenkegels. Immerhin scheint der Nachweis nicht unwichtig, daß die Resultate der älteren und der neueren Theorie der Strahlen in dem betrachteten speziellen Falle sehr verschieden sind, und daß die neuere Theorie jene anstößige Unstetigkeit nicht liefert, auf welche die ältere führt. Es bleibt freilich auch bei ihr noch ein unklarer Punkt: die Art des Überganges von der einheitlichen Energieströmung zu den zwei wahrnehmbar getrennten Strahlen. Die Untersuchung dieser Frage bleibt vorbehalten.

Für die Theorie der wahrnehmbaren inneren konischen Refraktion, wie ich sie früher entwickelt habe, ist es natürlich irrelevant, ob das Verhalten der Strahlen, welche Wellennormalen in der Umgebung der optischen Achse entsprechen, sich *unendlich* schnell, oder aber mit *außerordentlich großer endlicher* Geschwindigkeit ändert.

(Eingegangen 30. November 1905.)