		Culmination.			Grade Aufsteigung.			Abweichung.			Parallaxe.	
1842.		Log a	Log b	Log c	Log a'	Log b'	Log c'	Log a''	Log b''	Log c''	Log a'''	Log b'''
Oct.	16	2,487548	9,38990	8,1533	2,474403	9,33690	8,1124	3,322132	0,02608n	9,1765n	9,94330	8,6017
	17	2,497897	9,78346	8,1253	2,484447	9,74483	8,0412	3,310334	0,72763n	9,2306n	0,19080	8,5396
	18	2,515953	9,96858	8,0573	2,501933	9,92740	7,9912	3,280136	1,00627n	9,2825n	0,31674	8,4256
	19	2,539621	0,07086	7,8579	2,524830	0,02619	7,7838	3,224503	1,19373n	9,3323n	0,41981	8,4670
	20	2,565757	0,10634	4,7133n	2,550066	0,05950	6,5213n	3,128812	1,33074n	9,3349n	0,46574	8,3799
	21	2,590324	0,06419	7,9777n	2,573733	0,01390	7,9123n	2,958782	1,43251n	9,3024n	0,50915	8,1246
	22	2,609074	9,89709	8,2688n	2,591773	9,84516	8,2116n	2,580769	1,49668n	9,1079n	0,54120	8,0277
	23	2,618691	9,40113	8,3413n	2,601017	9,35604	8,2929n	2,319233n	1,52639n	8,4945n	0,57603	7,9027
	24	2,618253	9,44294n	8,2397n	2,600583	9,39203n	8,1456n	2,909456n	1,51741n	8,8456	0,59487	7,9027
	25	2,609775	9,78365n	7,8723n	2,592441	9,73236n	7,8001n	3,139396n	1,47216n	9,2142	0,61130	
	26	2,597497	9,81929n	7,5029	2,580643	9,77066n	7,3602	3,270954n	1,38627n	9,3519	0,60924	8,0277n
	27	2,586358	9,66855n	8,0472	2,569916	9,62251n	7,9882	3,351259n	1,24773n	9,4277	0,57457	8,4670n
Nov.	28	2,580526	9,03813n	8,1933	2,564300	8,97426n	8,1288	3,396851n	0,99460n	9,4799	0,48798	8,6561n
	29	2,582511	9,50355	8,2212	2,566208	9,45373	8,1578	3,413801n	0,01091n	9,5392	0,30784	8,7874n
	30	2,592673	9,85719	8,1338	2,575991	9,80671	8,0860	3,402226n	0,94188	9,5771	9,70389	8,9441n
	31	2,608960	9,99148	7,7370	2,591651	9,94152	7,6857	3,357144n	1,27688	9,5647	0,13250n	9,0277n
	1	2,626975	9,98134	7,8929n	2,608951	9,92804	7,8024n	3,266776n	1,45131	9,4940	0,47352n	8,9697n
	3	2,640729	9,74607	8,3558n	2,622146	9,69445	8,2929n	3,104447n	1,54423	9,2703	0,65513n	8,9170n
	4	2,644400	9,20760n	8,4878n	2,625660	9,14405n	8,4157n	2,783987n	1,57654	7,9527	0,73696n	8,6017n
	5	2,634835	9,96896n	8,4240n	2,616490	9,91270n	8,3416n	1,785209	1,55385	9,1803n	0,77253n	8,0277n

Th. Clausen.

Beitrag zur Theorie der dreiseitigen Pyramide.

Von Herrn Thomas Clausen.

1. Die Aufgabe: „aus den drei Winkeln zwischen den Kanten an dem Scheitel A einer dreiseitigen Pyramide $ABCD$; nemlich $BAC = \theta$, $CAD = \theta'$ und $DAB = \theta''$; und den drei Kanten der Grundfläche $BC = a$, $CD = a'$ und $DB = a''$ die übrigen Stücke zu finden;“ scheint noch keine einfache Auflösung gefunden zu haben. *Monge* in seiner Geometrie descriptive sagt, p. 126, daß die analytische Entwicklung auf eine Gleichung vom achten Grade führe. Die Aufgabe läßt

sich aber leicht auf eine Gleichung vom vierten Grade bringen. Es seien nemlich die drei Kanten $AD = r$, $AB = r'$ und $AC = r''$; so hat man zwischen diesen und den gegebenen Größen folgende Relationen:

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= r'^2 + r''^2 - 2r'r'' \cos \theta \\ a'^2 &= r''^2 + r^2 - 2r''r \cos \theta' \\ a''^2 &= r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta'' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (I)$$

Aus ihnen folgt unmittelbar:

$$\left. \begin{aligned} a^2 r^2 - a'^2 r'^2 + (a^2 - a'^2) r''^2 - 2a^2 r'' r \cos \theta' + 2a'^2 r' r'' \cos \theta &= 0 \\ a'^2 r'^2 - a''^2 r''^2 + (a'^2 - a''^2) r^2 - 2a'^2 r r' \cos \theta'' + 2a''^2 r'' r \cos \theta' &= 0 \\ a''^2 r''^2 - a^2 r^2 + (a''^2 - a^2) r'^2 - 2a''^2 r' r'' \cos \theta + 2a^2 r r' \cos \theta'' &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (II)$$

Setzt man $r = \nu r''$; $r' = \nu' r''$, so erhält man:

$$\left. \begin{aligned} a^2 \nu^2 - a' \nu'^2 + a^2 - a'^2 - 2a^2 \nu \cos \theta' + 2a'^2 \nu' \cos \theta &= 0 \\ a'^2 \nu'^2 - a''^2 + (a'^2 - a''^2) \nu^2 - 2a'^2 \nu \nu' \cos \theta'' + 2a''^2 \nu \cos \theta' &= 0 \\ a''^2 - a^2 \nu^2 + (a''^2 - a^2) \nu'^2 - 2a''^2 \nu' \cos \theta + 2a^2 \nu \nu' \cos \theta'' &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (III)$$

Diese drei Gleichungen enthalten nur zwei verschiedene, da jede derselben sich aus den beiden übrigen ableiten läßt. Betrachtet man ν und ν' als die Coordinaten einer krummen Linie; so können diese Gleichungen in Kegelschnitte entworfen werden, die nicht mehr als vier gemeinschaftliche Punkte haben. Es sind demnach nicht mehr als vier verschiedene Auflösungen möglich, von denen übrigens die, in denen $\nu = \frac{r}{r''}$, und $\nu' = \frac{r'}{r''}$ nicht beide positiv sind, ausgeschlie-

den werden müssen, da alle drei r , r' , r'' immer positiv sind. Aus jedem Paar Werthe von ν und ν' folgt wieder nur ein Werth der drei Größen r , r' , r'' ; nemlich

$$r'' = \frac{a}{\sqrt{(1 - 2\nu' \cos \theta + \nu^2)}} = \frac{a'}{\sqrt{(1 - 2\nu \cos \theta' + \nu'^2)}}; \\ r = \nu r''; \quad r' = \nu' r''.$$

da der negative Werth ausgeschlossen ist. Es sind also in allen Fällen nicht mehr als vier Auflösungen der Aufgabe möglich. Alle vier können aber in vielen Fällen möglich sein,

z. B. wenn $\cos \theta = \cos \theta' = \cos \theta'' = \frac{2}{3}$; $a = a' = a'' = 1$ ist; so wird den Gleichungen I durch folgende vier Systeme Genüge geleistet:

$$\begin{array}{lll} 1. & r = \sqrt{\frac{3}{2}}; & r' = \sqrt{\frac{3}{2}}; & r'' = \sqrt{\frac{3}{2}} \\ 2. & = \sqrt{\frac{3}{2}}; & = \sqrt{\frac{3}{2}}; & = \sqrt{\frac{1}{6}} \\ 3. & = \sqrt{\frac{3}{2}}; & = \sqrt{\frac{1}{6}}; & = \sqrt{\frac{3}{2}} \\ 4. & = \sqrt{\frac{1}{6}}; & = \sqrt{\frac{3}{2}}; & = \sqrt{\frac{3}{2}} \end{array}$$

2. Man kann die Aufgabe noch auf einem ganz andern Wege auflösen, wobei man bloß auf eine cubische Gleichung kömmt, welches im Grunde nicht einfacher ist, als die Auflösung der aus den Gleichungen III folgende biquadratische, die

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \alpha'}{a'} = \frac{\sin \alpha''}{a''} = \frac{\sqrt{\{(a+a'+a'')(a+a'-a'')(a-a'+a'')(a-a+a'+a'')\}}}{2aa'a''}$$

setzt, so werden die sphärischen Winkel $\angle p'p''p''' = 180 - \alpha$, $\angle pp''p''' = 180 - \alpha'$; $\angle pp'''p'' = 180 - \alpha''$. Es sind demnach in dem sphärischen Vierecke $pp''p'''$ zwei Seiten $p'p'' = l$, $p''p''' = l'$ und der eingeschlossene Winkel $180 - \theta''$, ferner die beiden Winkel, die die Diagonale an dem Durchschnittspunct der beiden übrigen Seiten pp'' , $p'p'''$ mit der Diagonale $p''p'''$ an diesem Durchschnitte bilden $\angle pp''p''' = 180 - \alpha'$; $\angle p'p'''p'' = 180 - \alpha$ gegeben; man soll die übrigen Stücke des sphärischen Vierecks bestimmen.

Es sei $p''p''' = \gamma$; die Winkel $\angle p'p''p''' = 90 - \frac{1}{2}\theta'' + \xi$, $\angle pp''p''' = 90 - \frac{1}{2}\theta'' - \xi$; so hat man in den Dreiecken $pp''p'''$, $p'p''p'''$

$$0 = hh \cos 2H \sin \xi^2 + 2gh \sin(G+H) \sin \xi \cos \xi - gg \cos 2G \cos \xi^2 + \frac{1}{4}(e-e')^2 \sin \theta''^2 + \frac{1}{2}(e^2 - e'^2) \sin \theta'' \sin 2\xi + \frac{1}{4}(e+e')^2 \sin 2\xi^2$$

und wenn man ferner

$$\begin{aligned} T &= 2hh \cos 2H - 2gg \cos 2G + (e-e')^2 \sin \theta''^2 \\ U &= hh \cos 2H + gg \cos 2G \\ V &= 2gh \sin(G+H) + (e^2 - e'^2) \sin \theta'' \\ S &= (e+e')^2 \end{aligned}$$

setzt,

$$0 = T - 2U \cos 2\xi + 2V \sin 2\xi + S \sin 2\xi^2.$$

Dieser gebe ich folgende identische Form

$$0 = T - x + x \cos 2\xi^2 + (S+x) \sin 2\xi^2 - 2U \cos 2\xi + 2V \sin 2\xi$$

und bestimme x so, daß sie sich in

$$(\Gamma) \dots 0 = x \left(\cos 2\xi - \frac{U}{x} \right)^2 + (S+x) \left(\sin 2\xi + \frac{V}{S+x} \right)^2$$

verwandeln läßt. Durch Vergleichung der beiden Ausdrücke erhält man

$$0 = T - x - \frac{UU}{x} - \frac{VV}{S+x}$$

oder

$$(\Gamma') \dots x^3 + (S-T)x^2 + (UU+VV-ST')x + SUU = 0$$

man durch Hülfe einer cubischen Gleichung in zwei quadratische zerlegen kann.

Die in der Pyramide eingeschriebene Kugel berühre die vier Seitenflächen BAC , CAD , DAB , BCD resp. in den Punkten p , p' , p'' , p''' . Verbindet man diese vier Punkte zu zweien, durch 6 größte Kreise; so wird in dem sphärischen Dreiecke $pp'p''$ der Winkel $\angle p''pp' = 180^\circ - \theta$; $\angle pp'p'' = 180^\circ - \theta'$; $\angle p'p''p = 180^\circ - \theta''$. Es seien die drei sphärischen Seiten $p'p'' = l$, $p''p = l'$; $pp' = l''$. Sei ferner in dem ebenen Dreiecke $\angle CDB = \alpha$; $\angle DBC = \alpha'$; $\angle BCD = \alpha''$, oder wenn man

$$\cot g \alpha \cos(\frac{1}{2}\theta'' - \xi) = \cos \gamma \sin(\frac{1}{2}\theta'' - \xi) - \cot g l \sin \gamma$$

$$\cot g \alpha' \cos(\frac{1}{2}\theta'' + \xi) = \cos \gamma \sin(\frac{1}{2}\theta'' + \xi) - \cot g l' \sin \gamma,$$

woraus sogleich folgt, wenn man $\cot g l = d$, $\cot g l' = d'$, $\cot g \alpha = e$, $\cot g \alpha' = e'$ setzt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(d'-d) \sin \frac{1}{2}\theta'' \cos \xi - (d'+d) \cos \frac{1}{2}\theta'' \sin \xi &= \cos \gamma \\ \frac{1}{2}(d'-d) \sin \frac{1}{2}\theta'' \cos \xi - (d'+d) \cos \frac{1}{2}\theta'' \sin \xi &= \cos \gamma \end{aligned}$$

Addirt man die Quadrate dieser beiden Gleichungen, und setzt zur Abkürzung:

$$\begin{aligned} (d'-d) \sin \frac{1}{2}\theta'' &= g \cos G; & (d'e - de') \cos \frac{1}{2}\theta'' &= g \sin G \\ (d'+d) \cos \frac{1}{2}\theta'' &= h \sin H; & (d'e + de') \sin \frac{1}{2}\theta'' &= h \cos H \end{aligned}$$

so erhält man

Soll die Gleichung (I) mögliche Wurzeln haben, so muß x zwischen 0 und $-S$ fallen, (S ist positiv); sie hat in der That innerhalb dieser Grenzen wenigstens eine Wurzel, da (I') für den Werth von $x = 0$, SUU oder positiv wird, für den Werth $x = -S$, $-SVV$ oder negativ wird. Setzt man in (I) $\sqrt{\left(\frac{x}{-S}\right)} = \cos P$, so verwandelt sie sich in:

$$\cos(2\xi + P) = \frac{U}{S \cos P} + \frac{V}{S \sin P}$$

Da P und $2\xi + P$ jede zwei verschiedene Werthe haben, so kann ξ vier verschiedene Werthe bekommen, wie oben. Es ist jedoch zu bemerken, daß wenn man $S \sin P$ negativ nimmt man auch zugleich P in dem Winkel $2\xi + P$ negativ annehmen muß.

Wenn ξ gefunden ist, findet man leicht die übrigen Stücke des sphärischen Vierecks, und mit diesen die Theile der Pyramide. Schließlicb bemerke ich, daß ich diese Auflösung des sphärischen Vierecks schon früher in *Crelles Journal* 7. Bd. p. 105 auf eine astronomische Aufgabe angewandt habe.

Th. Clausen.