**RICERCA FONDAMENTALE PER LO STUDIO DI UNA CERTA CLASSE DI PROPRIETÀ
DELLE SUPERFICIE CURVE.****MEMORIA****DEL SIG. PROF. FELICE CASORATI.**

§. I.

Se si considerano le superficie come flessibili ma inestendibili, a guisa direi quasi di veli, e s'immaginano le forme differenti che ognuna può assumere in siffatte condizioni, si è condotti a distinguere le proprietà in due classi. A distinguere cioè le proprietà che non subiscono alterazione per qualsiasi cambiamento di forma della superficie cui si riferiscono e che si ponno chiamare assolute, da quelle che dipendono invece dalle singole forme sotto le quali la superficie può essere concepita e che si ponno chiamare relative. Nelle ricerche concernenti soltanto le proprietà assolute, tutte le superficie che possono provenire da una medesima (e quindi anche l'una dall'altra indistintamente) mediante soli cambiamenti di forma si presentano come identiche tra loro; laonde si potrà in tali indagini considerarne una particolare qualunque, quindi anche quella tale che per certi caratteri si avesse a risguardare come il tipo della propria famiglia.

Mezzi per lo studio delle superficie indipendentemente dalle forme nelle quali, colle condizioni di flessibilità ed inestendibilità, ponno essere immaginate, sono offerti dall'uso di coordinate curvilinee, per le quali le superficie vengano considerate in se stesse e non riferite ad enti estranei (come per gli ordinari piani coordinati) che non cambiano necessariamente con esse di posizione e di forma.

Scopo di questo breve lavoro è l'esposizione di un modo di trovare le equazioni fondamentali per lo studio delle proprietà assolute; fra le quali equazioni la principale è quella esprime il celebre teorema di Gauss sulla misura della curvatura, ossia sul prodotto reciproco dei raggi di curvatura principali. È facile rilevare che la via tenuta da Gauss nel dimostrare il detto teorema, e quelle seguite da altri insigni Geometri che di tale questione si occuparono di poi, non mettono in tutta l'evidenza desiderabile nè ciò donde viene principalmente la importanza del medesimo, cioè di essere il più semplice possibile di siffatta categoria; ne quali indubbiamente sieno quelli che tengangli dietro per ordine di semplicità, vale a dire (in tale argomento) d'importanza. È specialmente per questo riguardo ch'io credo possa meritare qualche attenzione il metodo che espongo, il quale, consistendo in un processo di eliminazione non soggetto ad eccezioni, conduce per necessità a trovare le equazioni in discorso l'una dopo l'altra precisamente in quell'ordine con cui si succedono nella importanza.

Per trasformazione di una superficie intendo il passaggio di essa da una ad altra forma (osservando le condizioni su indicate) per trasformate di una superficie tutte quelle che dalla medesima possono provenire per mezzo di trasformazioni; per punti corrispondenti in due superficie trasformabili l'una nell'altra, punti che mediante la trasformazione passano ad assumere il posto gli uni degli altri.

Sieno ora :

$$(x) \quad x_1, x_2$$

$$((X)) \quad X_1, X_2$$

due coppie di coordinate curvilinee atte a determinare i punti di due superficie (σ) , (Σ) , delle quali i quadrati degli elementi lineari vengono espressi dalle :

$$ds^2 = a_{11} dx_1^2 + 2a_{12} dx_1 dx_2 + a_{22} dx_2^2 = \sum_r \sum_s a_{rs} dx_r dx_s,$$

$$dS^2 = A_{11} dX_1^2 + 2A_{12} dX_1 dX_2 + A_{22} dX_2^2 = \sum_r \sum_s A_{rs} dX_r dX_s,$$

dove le a_{rs} rappresentano funzioni delle coordinate (x) e le A_{rs} funzioni delle (X) , ed inoltre si supponga $a_{rs} = a_{sr}$, $A_{rs} = A_{sr}$.

Onde le superficie (σ) e (Σ) appartengano ad una medesima famiglia (voglio dire sieno trasformabili l'una nell'altra) è necessario e sufficiente che, ritenute le coordinate (x) ed (X) siccome relative a punti corrispondenti, sia :

$$ds^2 = dS^2,$$

cioè che esistano tali funzioni delle (X) le quali riguardate come valori delle (x) , o viceversa, riesca identicamente soddisfatta la :

$$(1) \quad a_{11} dx_1^2 + 2a_{12} dx_1 dx_2 + a_{22} dx_2^2 = A_{11} dX_1^2 + 2A_{12} dX_1 dX_2 + A_{22} dX_2^2.$$

Ma siffatta identità è pur quella che deve verificarsi affinchè i due sistemi di funzioni:

$$a_{11}, a_{12}, a_{22}; \quad A_{11}, A_{12}, A_{22}$$

possano entrambi servire a costituire l'espressione dell'elemento lineare di una medesima superficie. Per ciò si rende manifesto che lo studio delle trasformazioni di una superficie (σ) qualunque è analiticamente la stessa cosa che lo studio delle trasformazioni delle coordinate nella superficie stessa, e che la ricerca delle equazioni fondamentali per lo studio delle sue proprietà assolute è la stessa cosa che la ricerca di quegli enti geometrici di essa, la cui essenza non tiene al sistema di coordinate (x) che si possa aver adottato (diversamente da ciò che p. e. ha luogo per l'angolo delle linee $x_1 = \text{Costante}$, $x_2 = \text{Costante}$), mentre sono però esprimibili mediante formole contenenti soltanto le funzioni a_{rs} e le loro derivate parziali rispetto alle (x) , e non già le coordinate stesse (x) esplicitamente (ente così fatto è p. e. il prodotto reciproco dei raggi di curvatura principali). Supposto infatti che

$$f\left(a_{11}, a_{12}, a_{22}, \frac{da_{11}}{dx_1}, \frac{da_{11}}{dx_2}, \text{etc.}\right)$$

sia formola esprime uno di tali enti nel sistema (x) di coordinate, l'ente stesso in altro qualunque sistema (X) verrà espresso dalla medesima formola, dove in luogo delle a_{rs} e loro derivate (rispetto alle (x) s'intende) compariranno le A_{rs} e derivate corrispondenti (cioè prese rispetto alle variabili (X)), e darà, quindi occasione ad una equazione:

$$(2) \quad f\left(a_{11}, a_{12}, a_{22}, \frac{da_{11}}{dx_1}, \frac{da_{11}}{dx_2}, \text{etc.}\right) = f\left(A_{11}, A_{12}, A_{22}, \frac{dA_{11}}{dX_1}, \frac{dA_{11}}{dX_2}, \text{etc.}\right),$$

la quale, non potendo essere che una conseguenza della (1), dirà che l'ente geometrico espresso dal primo o dal secondo membro rimane inalterato mentre la superficie cambia di forma.

Per brevità chiamerò d'ora innanzi *inalterabile* ogni formola ossia funzione che goda della proprietà (2).

§. II.

Scrivo la (1) sotto la forma:

$$(3) \quad \sum_r \sum_s a_{rs} dx_r dx_s = \sum_h \sum_k A_{hk} dX_h dX_k$$

Considerando le variabili (x) come funzioni delle (X) , si ha:

$$dx_r = \sum_h \frac{dx_r}{dX_h} dX_h,$$

mediante la quale espressione di dx_r , e l'analoga che se ne deduce per dx_s col cambiare gl'indici r ed h nei due s e k , la (3) può presentarsi come segue:

$$\sum_k \sum_h \sum_r \sum_s a_{rs} \frac{dx_r}{dX_h} \frac{dx_s}{dX_k} dX_h dX_k = \sum_h \sum_k A_{hk} dX_h dX_k.$$

Questa equazione per essere identica richiede che lo siano le seguenti:

$$(4) \quad \sum_r \sum_s a_{rs} \frac{dx_r}{dX_h} \frac{dx_s}{dX_k} = A_{hk},$$

dove s'hanno a porre, s'intende, per h, k tutte le coppie di valori di cui questi indici sono suscettibili. Le equazioni (4) equivalgono evidentemente alle:

$$(4)' \quad a_{rs} = \sum_h \sum_k A_{hk} \frac{dX_h}{dx_r} \frac{dX_k}{dx_s},$$

che si deducono dalla (3) col riguardare le (X) come funzioni delle (x) . Si passa d'altronde direttamente dall'uno all'altro di questi due sistemi d'equazioni col mezzo

delle identità

$$(5) \quad \sum_h \frac{dx_r}{dX_h} \frac{dX_h}{dx_s} = \begin{cases} 0 & \text{se } r > s \\ 1 & \text{se } r = s \end{cases} \quad \sum_r \frac{dX_h}{dx_r} \frac{dx_r}{dX_k} = \begin{cases} 0 & \text{se } h > k \\ 1 & \text{se } h = k \end{cases}$$

Chiamo per brevità :

$$a, A, \partial, \Delta$$

i determinanti formati ordinatamente coi quattro sistemi di elementi rispettivamente rappresentati da :

$$a_{rs}, A_{rs}, \frac{dx_r}{dX_s}, \frac{dX_r}{dx_s};$$

per le regole di moltiplicazione dei determinanti le equazioni (4) danno :

$$(6) \quad a. \partial = A$$

e le (5) :

$$\partial. \Delta = 1$$

Le considerazioni fatte in questo paragrafo manifestamente varrebbero quand'anche gl'indici ai quali i segni sommatorj Σ si riferiscono dovessero assumere un numero qualunque di valori, come sarebbero : 1, 2, ..., n . Sebbene tale generalità potrebbe essere conservata, per la brevità è nondimeno preferibile di non considerare d'ora innanzi che il caso di $n = 2$. Facendo l'attenzione esclusivamente sulle equazioni (4), esse nel presente caso riduconsi alle tre seguenti :

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{11} \left(\frac{dx_1}{dX_1} \right)^2 + 2a_{12} \frac{dx_1}{dX_1} \frac{dx_2}{dX_1} + a_{22} \left(\frac{dx_2}{dX_1} \right)^2 = A_{11} \\ a_{11} \frac{dx_1}{dX_1} \frac{dx_1}{dX_2} + a_{12} \left(\frac{dx_1}{dX_1} \frac{dx_2}{dX_2} + \frac{dx_1}{dX_2} \frac{dx_2}{dX_1} \right) + a_{22} \frac{dx_2}{dX_1} \frac{dx_2}{dX_2} = A_{12} \\ a_{11} \left(\frac{dx_1}{dX_2} \right)^2 + 2a_{12} \frac{dx_1}{dX_2} \frac{dx_2}{dX_2} + a_{22} \left(\frac{dx_2}{dX_2} \right)^2 = A_{22} . \end{array} \right.$$

Si tratta di cavare, per mezzo dell'eliminazione, da queste equazioni e dalle loro successive derivate prese rispetto alle (X) altre equazioni, nelle quali non entrino punto derivate delle (x) rispetto alle (X), sì bene soltanto le funzioni a_{rs} , A_{rs} e loro rispettive derivate; equazioni che essendo sempre riducibili alla forma (2) metteranno in evidenza altrettante funzioni inalterabili.

Una funzione inalterabile sarà detta del 1° ordine ovvero del 2°, del 3°, ec. secondo che le derivate delle funzioni a_{rs} (od A_{rs} se espressa in lettere maiuscole) dell'ordine più elevato siano del 1° ordine ovvero del 2°, del 3°, ec.

Inoltre d'ora innanzi per brevità converrà scrivere :

$$(7\frac{1}{2}) \quad a_{rs}^{(\alpha\beta\ldots\mu)}, \quad A_{rs}^{(\alpha\beta\ldots\mu)}, \quad \frac{r}{\alpha\beta\ldots\mu}$$

in luogo ordinatamente di :

$$\frac{d^m a_{rs}}{dx_\alpha dx_\beta \ldots dx_\mu}; \quad \frac{d^m A_{rs}}{dX_\alpha dX_\beta \ldots dX_\mu}, \quad \frac{d^m x_r}{dX_\alpha dX_\beta \ldots dX_\mu},$$

dove m esprime il numero degl'indici $\alpha, \beta, \ldots \mu$. Questi indici non sono suscettibili che dei valori 1, 2. Per tal notazione le (7) ovvero (4) potranno scriversi più brevemente, come segue :

$$(8) \quad \sum_r \sum_s a_{rs} \frac{r}{h} \frac{s}{k} = A_{hk}$$

S'immaginino ora formate tutte le derivate (parziali) di queste equazioni degli ordini $1^\circ, 2^\circ, \ldots m^{mo}$; osservando che nel ritenere le (X) come variabili indipendenti debbonsi riguardare le a_{rs} come funzioni composte colle funzioni (x) delle variabili stesse. Si otterrà un numero di equazioni, comprese le (8), espresso da :

$$3[1 + 2 + 3 + \ldots + (m + 1)] = 3 \frac{(m + 1)(m + 2)}{2}$$

le quali conterranno le derivate parziali delle (x) degli ordini $1^\circ, 2^\circ, \ldots (m + 1)^{esimo}$, che sono in numero :

$$2[2 + 3 + 4 + \ldots + (m + 2)] = (m + 1)(m + 4).$$

Se le equazioni (8) e le loro derivate non avessero una forma particolare, si avrebbe certezza che l'eliminazione di tutte quante le derivate delle (x) fra le medesime, e quindi la comparsa di equazioni risultanti della forma (2), non potrebbe aver luogo che a cominciare dal valore di m pel quale riuscisse :

$$3 \frac{(m + 1)(m + 2)}{2} > (m + 1)(m + 4) \quad \text{ovvero} \quad \frac{1}{2} (m + 1)(m - 2) > 0,$$

vale a dire del valore $m = 3$. Ma le anzidette equazioni essendo di forma particolare, debbonsi pur sottoporre ad un particolare esame. Donde infatti risulterà che l'eliminazione è già possibile per $m = 2$, in virtù della relazione (6), la quale ora può scriversi così :

$$(9) \quad \partial^2 = \left| \begin{array}{cc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{1} & \frac{2}{2} \end{array} \right|^2 = \left(\frac{1}{2} \frac{2}{2} - \frac{1}{2} \frac{2}{1} \right)^2 = \frac{A}{a} = \frac{A_{11} A_{22} - A_{12}^2}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}.$$

Portiamo dunque l'attenzione sulla forma particolare delle equazioni fra le quali l'eliminazione va eseguita, e consideriamo a dirittura la forma delle derivate più elevate, cioè dell' m^{mo} ordine. Per averne una di quest'ordine che possa rappresentarle

tutte, formiamo la derivata m^{ma} della (8) rispetto alle $X_\alpha, X_\beta, \dots, X_\mu$. Non mettendo in evidenza che i termini contenenti le derivate delle (x) dell'ordine più elevato, cioè dell' $(m+1)^{mo}$ (i quali provengono dal derivare nell'espressione $a_{rs} \frac{r}{h} \frac{s}{k}$ prima $\frac{s}{k} m$ volte, ritenendo costanti a_{rs} ed $\frac{r}{h}$, poscia $\frac{r}{h} m$ volte), ed indicando con:

$$U_{hk}^{\alpha\beta\dots\mu}$$

il complesso dei termini rimanenti, supposti trasportati tutti quanti nel secondo membro, l'equazione derivata suddetta si può scrivere nel seguente modo:

$$\sum_r \sum_s a_{rs} \left(\frac{r}{h} \frac{s}{k} \frac{\alpha}{\beta} \dots \frac{\mu}{\mu} + \frac{s}{k} \frac{r}{h} \frac{\alpha}{\beta} \dots \frac{\mu}{\mu} \right) = U_{hk}^{\alpha\beta\dots\mu}.$$

Il secondo membro contiene il termine:

$$A_{hk}^{(\alpha\beta\dots\mu)}$$

proveniente dalla derivazione di A_{hk} ; in oltre le funzioni a_{rs} e loro derivate (rispetto alle x_1, x_2) prime, seconde, ... m^{esima} ; infine le derivate prime, seconde, ... m^{esima} delle (x) prese rispetto alle (X) . Questa equazione, ponendo momentaneamente per brevità:

$$(10) \quad \sum_r a_{rs} \frac{r}{h} = s_h$$

equivale alla:

$$\sum_s s_h \frac{s}{k} \frac{\alpha}{\beta} \dots \frac{\mu}{\mu} + \sum_r r_k \frac{r}{h} \frac{\alpha}{\beta} \dots \frac{\mu}{\mu} = U_{hk}^{\alpha\beta\dots\mu},$$

dalle quali si hanno tutte le derivate m^{esima} delle equazioni (7) attribuendo ad $h, k; \alpha, \beta, \dots \mu$ i valori espressi da:

	$\alpha \quad \beta \quad \dots \quad \lambda \quad \mu$
	<u>1 1 1 1</u>
	1 1 1 2
	1 1 2 2
	
	
	2 2 2 2

$\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ h, k \end{array}$

$1, 1; 1, 2; 2, 2.$

Queste equazioni derivate sono scritte qui sotto e distinte in tre classi corrispondenti alle tre coppie di valori degli indici h, k .

$$\frac{t}{211..11}, \frac{t}{122..22},$$

la 1^a delle $(11)_{11}$ e la 1^a delle $(11)_{12}$ danno i valori delle: $\frac{t}{111..11}$

la $(m+1)^{esima}$ delle $(11)_{22}$ e la $(m+1)^{esima}$ delle $(11)_{22}$ danno i valori delle: $\frac{t}{222...}$.

3° che la determinazione di tutte queste coppie di derivate non può andar soggetta ad eccezioni; poichè il determinante dei coefficienti delle derivate stesse (che qui risguardansi come le incognite) è il medesimo per tutte le coppie di equazioni indicate e precisamente il seguente :

$$\begin{vmatrix} 1_1 & 2_1 \\ 1_2 & 2_2 \end{vmatrix}$$

il quale in forza delle (10) e (9) non è altro che :

$$\begin{vmatrix} 1_1 & 2_1 \\ 1_2 & 2_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{2} & \frac{2}{2} \end{vmatrix} = \pm \sqrt{Aa}$$

e non può mai perciò esser nullo; noto essendo che per niuna superficie può essere A (ovvero a) eguale a zero.

4° che fatte le combinazioni accennate, delle equazioni (11) non rimangono che le $m - 1$ seguenti :

$$(13) \quad 2^a, 3^a, \dots, m^{esima} \text{ della classe } (11)_{12},$$

ognuna delle quali fornirà una risultante parziale col sostituire alle derivate $(m+1)^{esima}$ delle (x) i valori determinati come si è detto. Questa sostituzione però non occorre in effetto per giungere alle risultanti; perocchè se si riflette che i primi membri delle equazioni :

$$3^a, 4^a, \dots, (m+1)^{esima} \text{ della classe } (11)_{11}$$

sommati ordinatamente coi primi delle :

$$1^a, 2^a, \dots, (m-1)^{esima} \text{ della classe } (11)_{22}$$

danno ordinatamente i doppi dei primi membri delle (13), e che le stesse relazioni debbono quindi aver luogo fra i secondi membri; si conchiude subito che le risultanti parziali sono le seguenti :

$$(14) \quad \begin{array}{ll} U_{11}^{11...22} - 2U_{12}^{11...12} + U_{22}^{11...11} = 0 & \sum_p \sum_q (-1)^{p+q} U_{pq}^{11...\bar{p}\bar{q}} = 0 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ U_{11}^{22...22} - 2U_{12}^{12...22} + U_{22}^{11...22} = 0 & \sum_p \sum_q (-1)^{p+q} U_{pq}^{22...\bar{p}\bar{q}} = 0, \end{array} \quad \text{ossia}$$

dove con $\bar{p}$ (lo stesso dicasi per l'altre lettere) s'intende quello dei due indici 1, 2 che è diverso da p . Nelle combinazioni delle equazioni (14) colle derivate $(m-1)^{esima}$, $(m-2)^{esima}$, etc. delle (7), le derivate

$$A_{hk}^{(\alpha\beta\ldots\mu)}$$

debbono evidentemente comparire aggruppate come lo sono i simboli

$$U_{hk}^{\alpha\beta\ldots\mu}$$

in quelle equazioni.

§. III.

Premesse queste considerazioni generali, esaminiamo successivamente le equazioni (7), le loro derivate prime, le seconde, ec.

Quanto alle (7) si vede immediatamente la impossibilità di eliminare le quattro derivate $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{2}{2}$; laonde non havvi funzione inalterabile dell'ordine zero.

Quanto alle derivate prime delle (7) si ha $m = 1$ ossia $m - 1 = 0$; quindi (12) non esistono funzioni inalterabili del primo ordine.

Quanto alle nove derivate seconde delle (7) si ha $m = 2$ ossia $m - 1 = 1$ e quindi una risultante parziale (14) che è :

$$(15) \quad \Sigma_p \Sigma_q (-1)^{p+q} U_{pq}^{\bar{p}\bar{q}} = 0.$$

Con questa equazione colle (7) e le loro sei derivate prime si hanno dieci equazioni contenenti dieci derivate delle (x) , cioè le quattro prime e le sei seconde. Si tratta di decidere se sia possibile o no combinare queste equazioni in modo da averne qualche altra libera da derivate delle (x) . La via più naturale per risolvere tal questione è di liberare la (15) anzitutto dalle derivate seconde delle (x) col mezzo delle derivate prime delle (7), e poscia di osservare se la equazione così ottenuta possa o no essere liberata anche dalle derivate prime delle (x) col soccorso delle (7), delle quali una conseguenza si è veduto essere la (9). Seguiamo questa via.

Formando effettivamente la derivata prima delle (8) rispetto ad X_α , e poi la derivata seconda rispetto ad X_α ed X_β (donde si avranno tutte le derivate prime e seconde coll'attribuire agl'indici $h, k; \alpha, \beta$ tutti i sistemi di valori permessi), si ottengono le equazioni (16) e (17) :

$$(8) \quad \Sigma_r \Sigma_s a_{rs} \frac{r}{h} \frac{s}{k} = A_{hk}$$

$$(16) \quad \Sigma_r \Sigma_s \left\{ a_{rs} \left(\frac{r}{h} \frac{s}{k\alpha} + \frac{s}{k} \frac{r}{h\alpha} \right) + \frac{r}{h} \frac{s}{k} \Sigma_p a_{rs}^{(p)} \frac{p}{\alpha} \right\} = A_{hk}^{(\alpha)}$$

$$(17) \quad \Sigma_r \Sigma_s \left\{ a_{rs} \left(\frac{r}{h} \frac{s}{k\alpha\beta} + \frac{s}{k} \frac{r}{h\alpha\beta} \right) + a_{rs} \left(\frac{r}{h\beta} \frac{s}{k\alpha} + \frac{s}{k\beta} \frac{s}{h\alpha} \right) + \left(\frac{r}{h} \frac{s}{k\alpha} + \frac{s}{k} \frac{r}{h\alpha} \right) \Sigma_p a_{rs}^{(p)} \frac{p}{\beta} \right. \\ \left. + \left(\frac{r}{h} \frac{s}{k\beta} + \frac{s}{k} \frac{r}{h\beta} \right) \Sigma_p a_{rs}^{(p)} \frac{p}{\alpha} + \frac{r}{h} \frac{s}{k} \Sigma_p a_{rs}^{(p)} \frac{p}{\alpha\beta} + \frac{r}{h} \frac{s}{k} \Sigma_p \Sigma_q a_{rs}^{(pq)} \frac{p}{\alpha} \frac{q}{\beta} \right\} = A_{hk}^{(\alpha\beta)}.$$

Prima di proceder oltre è bene introdurre qualche notazione, onde esprimere più brevemente i valori delle derivate seconde delle (x) , da cavarsi dalle (16), non che le operazioni che si avranno ad eseguire dopo sostituiti i valori stessi nella (15). Rappresenti $y(\eta)$ una espressione nella quale entri in qualsivoglia modo l'indice η (come sarebbero p. e. $a_{\eta 1}$, $a_{\eta 2}$, $a_{\eta m}$, $\frac{m}{\eta}$ vale a dire la derivata di x_m rispetto ad X_η), e si ponga:

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{r1}^{(s)} y(2) - a_{r2}^{(s)} y(1) + (a_{1s}^{(2)} - a_{2s}^{(1)}) y(r) = [y(\eta)]_{rs}, \\ A_{r1}^{(s)} y(2) - A_{r2}^{(s)} y(1) + (A_{1s}^{(2)} - A_{2s}^{(1)}) y(r) = [y(\eta)]_{rs}; \end{array} \right.$$

sì che p. e.:

$$a_{r1}^{(s)} a_{2m} - a_{r2}^{(s)} a_{1m} + (a_{1s}^{(2)} - a_{2s}^{(1)}) a_{rm} = [a_{\eta m}]_{rs}, \\ A_{r1}^{(s)} \frac{m}{2} - A_{r2}^{(s)} \frac{m}{1} + (A_{1s}^{(2)} - A_{2s}^{(1)}) \frac{m}{r} = \left[\frac{m}{\eta} \right]_{rs}.$$

Questa notazione dà luogo a proprietà, che in parte convien rimarcare. Si vede in primo luogo che, 1 e 2 essendo i soli valori positivi degli indici, si ha:

$$(19) \quad [y(\eta)]_{rs} = [y(\eta)]_{sr}.$$

Si vede pure immediatamente che, rappresentando C una quantità che non varia con η , e $z(\eta)$ una espressione ove entri in qualsivoglia modo l'indice η , hanno luogo le:

$$(20) \quad C[y(\eta)]_{rs} = [Cy(\eta)]_{rs}, \quad [y(\eta)]_{rs} + [z(\eta)]_{rs} = [y(\eta) + z(\eta)]_{rs}.$$

Ponendo inoltre:

$$(21) \quad b_{rs} = b_{sr} = \Sigma_m \Sigma_n (-1)^{m+n} \left(2a_{rs}^{(m)} a_{\frac{m}{n}}^{(n)} - a_{nr}^{(m)} a_{ns}^{(\bar{m})} \right)$$

vale a dire:

$$b_{11} = 2 \left(a_{11}^{(1)} a_{22}^{(1)} - 2a_{11}^{(1)} a_{21}^{(2)} + a_{11}^{(2)} a_{11}^{(2)} \right) \Big| b_{12} = b_{21} = 2 \left(a_{12}^{(1)} a_{22}^{(1)} - 2a_{12}^{(1)} a_{21}^{(2)} + a_{12}^{(2)} a_{11}^{(2)} \right) \\ - \left(a_{11}^{(1)} a_{22}^{(2)} - a_{11}^{(2)} a_{22}^{(1)} \right) \Big| b_{22} = 2 \left(a_{22}^{(2)} a_{11}^{(2)} - 2a_{22}^{(2)} a_{12}^{(1)} + a_{22}^{(1)} a_{22}^{(1)} \right)$$

si vede eziandio che :

$$\Sigma_h \Sigma_k (-1)^{h+k+1} [y(\eta)]_{hk} [z(\eta)]_{\bar{h} \bar{k}} = \Sigma_p \Sigma_q (-1)^{p+q} b_{\bar{p} \bar{q}} y(p) z(q).$$

È superfluo l'avvertire che le stesse formole valgono anche per le lettere maiuscole. Si notino due casi particolari dell'ultima trovata; cioè quelli che si hanno facendo in primo luogo $y(\eta) = a_{\eta m}$ e $z(\eta) = a_{\eta n}$, ed in secondo luogo $y(\eta) = \frac{m}{\eta}$ e $z(\eta) = \frac{n}{\eta}$ nella formola relativa alle lettere maiuscole. Essi sono indicati dalle :

$$(22) \quad \Sigma_h \Sigma_k (-1)^{h+k+1} [a_{\eta m}]_{hk} [a_{\eta n}]_{\bar{k} \bar{h}} = \Sigma_p \Sigma_q (-1)^{p+q} b_{\bar{p} \bar{q}} a_{pm} a_{qn}.$$

$$(23) \quad \Sigma_h \Sigma_k (-1)^{h+k+1} \left[\frac{m}{\eta} \right]_{hk} \left[\frac{n}{\eta} \right]_{\bar{k} \bar{h}} = \Sigma_p \Sigma_q (-1)^{p+q} B_{\bar{p} \bar{q}} \frac{m}{p} \frac{n}{q}.$$

Notinsi anche le formole seguenti. Dalla :

$$a_{u\nu} a_{\bar{u} \bar{\nu}} - a_{\bar{u} \bar{\nu}} a_{u\nu} = (-1)^{u+\nu} a$$

si deduce :

$$(24) \quad \Sigma_r \Sigma_s (-1)^{r+s} a_{rs} a_{\bar{p} \bar{r}} a_{q \bar{s}} = a. a_{pq}$$

d'onde emerge subito che le derivate: $a_{\omega m}^{(n)}$, $a_{\omega n}^{(m)}$, $a_{mn}^{(\omega)}$ nel primo e nel secondo membro della eguaglianza che segue hanno gli stessi coefficienti, vale a dire che la eguaglianza stessa sussiste.

$$(25) \quad \Sigma_s (-1)^{\bar{s}} a_{\omega s} [a_{\eta \bar{s}}]_{mn} = a \left(a_{\omega m}^{(n)} + a_{\omega n}^{(m)} - a_{mn}^{(\omega)} \right).$$

Moltiplicando questa eguaglianza per $[a_{\eta \bar{\omega}}]_{\bar{m} \bar{n}}$ e facendo su quella che ne risulta l'operazione $\Sigma_{\omega} \Sigma_m \Sigma_n (-1)^{\omega+m+n}$, il primo membro (disponendo opportunamente i segni sommatori, non che le quantità affette dagli indici) darà per risultato :

$$\Sigma_s \Sigma_{\omega} (-1)^{s+\omega} a_{s\omega} \Sigma_m \Sigma_n (-1)^{m+n+1} [a_{\eta \bar{s}}]_{mn} [a_{\eta \bar{\omega}}]_{\bar{m} \bar{n}},$$

la quale espressione, in virtù della (22) (ove in luogo degli indici h, k, m, n debbonsi immaginare quelli convenienti al caso, vale a dire ordinatamente i seguenti : $m, n, \bar{s}, \bar{\omega}$; e quest'osservazione valga anche per il seguito), può trasformarsi nella :

$$\Sigma_p \Sigma_q (-1)^{p+q} b_{\bar{p} \bar{q}} \Sigma_s \Sigma_{\omega} (-1)^{s+\omega} a_{s\omega} a_{\bar{p} \bar{s}} a_{q \bar{\omega}}$$

a cui può applicarsi la semplificazione (24). Dunque riassumendo si avrà :

$$(26) \quad \Sigma_p \Sigma_q (-1)^{p+q} a_{pq} b_{\bar{p}\bar{q}} = \Sigma_\omega \Sigma_m \Sigma_n (-1)^{\omega+m+n} \left(a_{\omega m}^{(n)} + a_{\omega n}^{(m)} - a_{mn}^{(\omega)} \right) [a_{\eta\omega}]_{\bar{m}\bar{n}}.$$

Per esprimere che il determinante $\frac{r}{1} \frac{s}{2} - \frac{r}{2} \frac{s}{1}$ è eguale a : $+\delta$, e , $-\delta$ secondo che sia : $s > , = , < r$ (il che è conseguenza del significato della lettera δ), pongasi:

$$(27) \quad \frac{r}{1} \frac{s}{2} - \frac{r}{2} \frac{s}{1} = (s-r)\delta.$$

Di qui si deduce subito:

$$(28) \quad \Sigma_h \Sigma_k (-1)^{h+k} \frac{r}{h} \frac{s}{k} \frac{p}{h} \frac{q}{k} = (p-r)(q-s)\delta^2.$$

Siccome dopo aver formata la (15) bisognerà sostituire alle derivate seconde delle (x) i loro valori forniti dalle (16) s'intende dalle sei equazioni provenienti dalla (16) coll'attribuire agl'indici h, k, α i valori 1, 2; perciò determiniamo cotesti valori. Combinando a due a due le sei equazioni (16), come fu indicato in generale nel §. II., e ponendo per un momento:

$$A_{hk}^{(\alpha)} = \Sigma_r \Sigma_s \frac{r}{h} \frac{s}{k} \Sigma_p a_{rs}^{(p)} \frac{p}{\alpha} = j_{rs}^\alpha$$

si trova:

$$\frac{\omega}{mn} = \frac{(-1)^{\bar{\omega}}}{2a\delta} \Sigma_\epsilon a_{\epsilon\bar{\omega}} \left\{ j_{m1}^n \frac{\epsilon}{2} - j_{m2}^n \frac{\epsilon}{1} + \left(j_{1n}^2 - j_{2n}^1 \right) \frac{\epsilon}{m} \right\};$$

ma la espressione fra parentesi $\{...\}$ ha forma simile alle (18); quindi sostituendo ai simboli j_{rs}^α i loro valori, è facile col soccorso della (27) e delle proprietà delle espressioni (18) di ridurre il valore trovato per la derivata seconda di x_ω rispetto ad X_m ed X_n alla forma seguente:

$$(29) \quad \frac{\omega}{mn} = \frac{(-1)^{\bar{\omega}}}{2a\delta} \left\{ \Sigma_\epsilon a_{\epsilon\bar{\omega}} \left[\frac{\epsilon}{\eta} \right]_{mn} - \delta \Sigma_\mu \Sigma_\nu [a_{\eta\omega}]_{\mu\nu} \frac{\mu}{m} \frac{\nu}{n} \right\}.$$

Ciò premesso osserviamo che la combinazione a farsi delle equazioni rappresentate in generale dalla (17), onde avere la risultante parziale (15), equivale al porre nella (17) $\bar{h}$ e $\bar{k}$ in luogo di α e β ed eseguire poi su di essa la operazione

$$\Sigma_h \Sigma_k (-1)^{h+k};$$

il che p. e. fatto sul secondo membro fornisce il risultato:

$$(30) \quad \Sigma_h \Sigma_k (-1)^{h+k} A_{hk}^{(\bar{k}, \bar{k})}.$$

La detta combinazione equivale anche al moltiplicare la (17) per $(h - \alpha)(k - \beta)$ ed eseguire poscia l'operazione $\Sigma_h \Sigma_k \Sigma_\alpha \Sigma_\beta$. Poichè indicando con $f(h, k, \alpha, \beta)$ una espressione nella quale entrino in qualsivoglia maniera gl'indici h, k, α, β , ha luogo manifestamente la :

$$(31) \quad \Sigma_h \Sigma_k \Sigma_\alpha \Sigma_\beta (h - \alpha)(k - \beta) f(h, k, \alpha, \beta) = \Sigma_h \Sigma_k (-1)^{h+k} f(h, k, \bar{h}, \bar{k}).$$

Per ultimo si noti che, rappresentando V_{pq} e W_{pq} espressione nelle quali gl'indici p e q entrino simmetricamente, ha pure luogo la :

$$(32) \quad \Sigma_h \Sigma_k (-1)^{h+k} (V_{h\bar{k}} W_{\bar{h}k} + V_{h\bar{h}} W_{k\bar{k}}) = \Sigma_h \Sigma_k (-1)^{h+k+1} V_{hk} W_{\bar{h}\bar{k}}.$$

Formiamo adunque finalmente la (15) ed a tal'uopo poniamo nella (17) $\bar{h}$ e $\bar{k}$ in luogo di α e β e facciamo l'operazione $\Sigma_h \Sigma_k (-1)^{h+k}$. Per brevità convien chiamare momentaneamente :

1° P il risultato di tale operazione effettuata sulla parte del primo membro contenente soltanto derivate prime delle (x) , cioè sull'ultima parte;

2° Q il risultato analogo per le parti contenenti le derivate seconde, delle (x) , linearmente, cioè per le parti terza, quarta e quinta.

3° R il risultato analogo per la parte contenente le derivate seconde non linearmente, cioè per la seconda. Che il risultato poi dell'operazione stessa eseguita sulla parte contenente le derivate terze delle (x) , cioè sulla prima, sia nullo, può desumersi, tosto anche dall'osservare la forma di questa parte, indipendente dalle precedenti considerazioni.

Avendo già notato che la medesima operazione effettuata sul secondo membro conduce al risultato (30), si vede la (15) non esser altro che :

$$(33) \quad R + Q + P = \Sigma_h \Sigma_k (-1)^{h+k} A_{hk}^{(\bar{h}\bar{k})}.$$

Consideriamo ora separatamente le espressioni di P, Q, R, nelle due ultime delle quali sostituiremo alle derivate seconde delle (x) i valori dati dalla (29).

1° Riguardo a P si vede subito che, in virtù della (28), e poscia della (31) (dove in luogo della f qui s'immagina la espressione $a_{rs}^{(pq)}$), si trasforma come segue:

$$(34) \left\{ \begin{aligned} P &= \Sigma_h \Sigma_k (-1)^{h+k} \Sigma_r \Sigma_s \frac{r}{s} \frac{s}{k} \Sigma_p \Sigma_q a_{rs}^{(pq)} \frac{p}{h} \frac{q}{k} = \Sigma_r \Sigma_s \Sigma_p \Sigma_q a_{rs}^{(pq)} \Sigma_h \Sigma_k (-1)^{h+k} \frac{r}{h} \frac{s}{k} \frac{p}{h} \frac{q}{k} \\ &= \partial^2 \Sigma_r \Sigma_s \Sigma_p \Sigma_q a_{rs}^{(pq)} (r - p)(s - q) = \partial^2 \Sigma_r \Sigma_s (-1)^{r+s} a_{rs}^{(\bar{r}\bar{s})}; \end{aligned} \right.$$

d'onde per la (9) è manifesto che P è libera da ogni derivata delle (x) .

2° Riguardo a Q, immaginiamo separati sotto il segno d'operazione $\Sigma_r \Sigma_s$ i termini in tre gruppi, il primo dei quali contenga le derivate seconde di x_r , il secondo

le derivate seconde di x_s , ed il terzo perciò sia quello in cui figura la derivata seconda di x_p ; ed in ognuno di questi gruppi sostituiamo ordinatamente agl'indici r, s, p gl'indici m, n, ω , come trovasi indicati nella tabella :

1°	s	p	r
2°	p	r	s
3°	r	s	p
	m	n	ω

riferendo ben'inteso i segni sommatori ai nuovi indici. Se in oltre applichiamo alle espressioni provenienti dal primo e dal secondo gruppo la riduzione (32), ed osserviamo che f avendo il significato (31) ha luogo identicamente la :

$$\Sigma_h \Sigma_k f(h, k, \bar{h}, \bar{k}) = \Sigma_h \Sigma_k f(\bar{h}, \bar{k}, h, k) ;$$

possiamo ridurre Q alla forma :

$$Q = \Sigma_\omega \Sigma_m \Sigma_n \left(-a_{\omega m}^{(n)} - a_{\omega n}^{(m)} + a_{mn}^{(\omega)} \right) \Sigma_h \Sigma_k (-1)^{h+k} \frac{m}{h} \frac{n}{k} \frac{\omega}{hk} .$$

Sostituiamo ora in luogo di $\frac{\omega}{hk}$ il valore desunto dalla (29), e chiamiamo per brevità Q_A il risultato della sostituzione della prima parte, cioè di :

$$\frac{(-1)^{\bar{\omega}}}{2a\delta} \Sigma_\varepsilon a_{\varepsilon\omega} \left[\frac{\varepsilon}{\eta} \right]_{hk}$$

e Q_a il risultato della sostituzione della seconda. Saranno :

$$(35) \quad Q = Q_A + Q_a$$

$$Q_A = \frac{1}{2a\delta} \Sigma_\omega \Sigma_m \Sigma_n (-1)^{\bar{\omega}} \left(-a_{\omega m}^{(n)} - a_{\omega n}^{(m)} + a_{mn}^{(\omega)} \right) \Sigma_h \Sigma_k (-1)^{h+k} \frac{m}{h} \frac{n}{k} \Sigma_\varepsilon a_{\varepsilon\omega} \left[\frac{\varepsilon}{\eta} \right]_{hk}$$

$$Q_a = \frac{1}{2a} \Sigma_\omega \Sigma_m \Sigma_n \Sigma_\mu \Sigma_\nu (-1)^{\bar{\omega}} \left(-a_{\omega m}^{(n)} - a_{\omega n}^{(m)} + a_{mn}^{(\omega)} \right) [a_{\eta\omega}]_{\mu\nu} \Sigma_h \Sigma_k (-1)^{h+k} \frac{m}{h} \frac{n}{k} \frac{\mu}{h} \frac{\nu}{k}$$

Q_A non potrebbe essere liberata mediante la (9) dalle derivate prime delle (x) , perchè è di grado dispari rispetto alle medesime; potrebbe però essere distrutta da qualche altra parte della (33) che fosse pure di grado dispari. Quanto a Q_a , che è di grado pari (s'intende sempre rispetto alle derivate prime delle x_1, x_2), in forza della (28), e poscia della (31), si ottiene :

$$Q_a = \frac{\partial^2}{2a} \Sigma_\omega \Sigma_m \Sigma_n (-1)^{\omega+m+n} \left(-a_{\omega m}^{(n)} - a_{\omega n}^{(m)} + a_{mn}^{(\omega)} \right) [a_{\eta\omega}]_{\bar{m}\bar{n}},$$

espressione libera da derivate delle (x) , e che per mezzo della (26) si riduce alla

forma più semplice :

$$(36) \quad Q_a = -\frac{\partial^2}{a^2} \Sigma_p \Sigma_q (-1)^{p+q} a_{pq} b_{\bar{p}\bar{q}}.$$

3°. Riguardo ad R si ha :

$$R = \Sigma_r \Sigma_s a_{rs} \Sigma_h \Sigma_k (-1)^{h+k} \left(\frac{r}{hk} \frac{s}{kh} + \frac{s}{kh} \frac{r}{hk} \right)$$

ovvero per la (32) :

$$R = \Sigma_r \Sigma_s a_{rs} \Sigma_h \Sigma_k (-1)^{h+k+1} \frac{r}{hk} \frac{s}{\bar{h}\bar{k}}.$$

Sostituiamo in luogo delle derivate seconde $\frac{r}{hk}$ ed $\frac{s}{\bar{h}\bar{k}}$ i valori :

$$\begin{aligned} \frac{r}{hk} &= \frac{(-1)^{\bar{r}}}{2a\delta} \left\{ \Sigma_m a_{m\bar{r}} \left[\frac{m}{\eta} \right]_{hk} - \partial \Sigma_u \Sigma_v [a_{\eta\bar{r}}]_{uv} \frac{uv}{h\bar{k}} \right\} \\ \frac{s}{\bar{h}\bar{k}} &= \frac{(-1)^{\bar{s}}}{2a\delta} \left\{ \Sigma_n a_{n\bar{s}} \left[\frac{n}{\eta} \right]_{\bar{h}\bar{k}} - \partial \Sigma_y \Sigma_z [a_{\eta\bar{s}}]_{yz} \frac{yz}{h\bar{k}} \right\} \end{aligned}$$

ed indichiamo per brevità con: R_{AA} , R_{Aa} , R_{aA} , R_{aa} ordinatamente i risultati della sostituzione : delle sole prime parti di tali valori, della prima parte del primo e della seconda del secondo, della seconda del primo e della prima del secondo, delle sole seconde parti; di modo che :

$$R = R_{AA} + R_{Aa} + R_{aA} + R_{aa}.$$

Ora :

$$R_{AA} = \frac{1}{4a^2\delta^2} \Sigma_r \Sigma_s (-1)^{r+s} a_{rs} \Sigma_m \Sigma_n a_{m\bar{r}} a_{n\bar{s}} \Sigma_h \Sigma_k (-1)^{h+k+1} \left[\frac{m}{\eta} \right]_{hk} \left[\frac{n}{\eta} \right]_{\bar{h}\bar{k}}$$

ossia, per la (23) :

$$R_{AA} = \frac{1}{4a^2\delta^2} \Sigma_p \Sigma_q (-1)^{p+q} B_{\bar{p}\bar{q}} \Sigma_m \Sigma_n \frac{m}{p} \frac{n}{q} \Sigma_r \Sigma_s (-1)^{r+s} a_{rs} a_{m\bar{r}} a_{n\bar{s}}$$

d'onde, mediante la riduzione (24) ed osservando la (8), si ha :

$$(37) \quad R_{AA} = \frac{1}{4a\delta^2} \Sigma_p \Sigma_q (-1)^{p+q} A_{pq} B_{\bar{p}\bar{q}}.$$

Consideriamo R_{aa} , che essendo, come R_{AA} , di grado pari rispetto alle derivate delle (x) , potrebbe esserne liberata. Questo appunto avviene applicando alla espressione di R_{aa} :

$$R_{aa} = \frac{1}{4a^2} \Sigma_r \Sigma_s (-1)^{r+s} a_{rs} \Sigma_u \Sigma_v \Sigma_y \Sigma_z [a_{\eta\bar{r}}]_{uv} [a_{\eta\bar{s}}]_{yz} \Sigma_h \Sigma_k (-1)^{h+k+1} \frac{uv}{h\bar{k}} \frac{yz}{h\bar{k}}$$

la riduzione (28). Se dopo siffatta riduzione, per semplificare si applicano anche ordinatamente le (31), (22) e (24), R_{aa} assume successivamente le forme :

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} R_{aa} &= \frac{\partial^2}{4a^2} \Sigma_r \Sigma_s (-1)^{r+s} a_{rs} \Sigma_u \Sigma_v (-1)^{u+v+1} [a_{\bar{r}}]_{u\nu} [a_{\bar{s}}]_{\bar{u}\bar{v}} \\ &= \frac{\partial^2}{4a^2} \Sigma_p \Sigma_q (-1)^{p+q} b_{\bar{p}\bar{q}} \Sigma_r \Sigma_s (-1)^{r+s} a_{rs} a_{\bar{p}\bar{r}} a_{\bar{q}\bar{s}} \\ &= \frac{\partial^2}{4a} \Sigma_p \Sigma_q (-1)^{p+q} a_{pq} b_{\bar{p}\bar{q}}. \end{aligned} \right.$$

Finalmente circa R_{Aa} ed R_{aA} , che sono di grado dispari come Q_A , è naturale di farne il paragone con questa. Si noti anzitutto che per la simmetrica loro formazione R_{Aa} ed R_{aA} sono evidentemente tra loro eguali. Volendo, si può dare ad R_{Aa} completamente l'aspetto di R_{Aa} col sostituire agl'indici :

$$s, r, n, u, v, h, k \quad \text{i seguenti:} \quad r, s, m, y, z, \bar{h}, \bar{k}$$

Prendendo quindi $2R_{Aa}$ invece di $R_{Aa} + R_{aA}$ e cambiando nella sua espressione gl'indici :

$$m, r, y, z \quad \text{nei seguenti:} \quad \varepsilon, \omega, m, n$$

onde facilitarne il confronto con Q_A , si ha :

$$R_{Aa} + R_{aA} + Q_A = \frac{1}{2a^2 \partial} \Sigma_\varepsilon \Sigma_h \Sigma_k (-1)^{h+k} \left[\frac{\varepsilon}{\eta} \right]_{hk} \Sigma_\omega \Sigma_m \Sigma_n (-1)^{\omega} a_{\varepsilon\omega} \frac{m}{h} \frac{n}{k} \\ \left\{ \Sigma_s (-1)^{\bar{s}} a_{\omega s} [a_{\bar{\eta}\bar{s}}]_{mn} + a \left(-a_{\omega m}^{(n)} - a_{\omega n}^{(m)} + a_{mn}^{(\omega)} \right) \right\}$$

Basta ormai osservare la (25) per concludere :

$$(39) \quad R_{Aa} + R_{aA} + Q_A = 0$$

per concludere cioè che le parti della (33) o (15), le quali non si ponno liberare dalle derivate prime delle (x) mediante la (9), si distruggono a vicenda. La (15) è dunque una (e la prima) delle equazioni (2); la sua forma, riassumendo i risultati (34), (35), (36), (37), (38) e (39), ponendo in oltre per ∂^2 il valore $\frac{A}{a}$, è la seguente :

$$(40) \quad \frac{1}{a} \Sigma_p \Sigma_q (-1)^{p+q} \left\{ \frac{1}{4a} a_{pq} b_{\bar{p}\bar{q}} - a_{\bar{p}\bar{q}}^{(\bar{p}\bar{q})} \right\} = \frac{1}{A} \Sigma_p \Sigma_q (-1)^{p+q} \left\{ \frac{1}{4A} A_{pq} B_{\bar{p}\bar{q}} - A_{pq}^{(\bar{p}\bar{q})} \right\}$$

La funzione inalterabile primo o secondo membro di questa equazione divisa per 2 è la nota formola esprimente la misura della curvatura; questa equazione cioè è

quella esprimente il celebre teorema di Gauss; del quale è messa per tal guisa in piena evidenza la proprietà di essere il più semplice possibile di simil genere; tutti gli altri o ne sono immediata conseguenza o corrispondono ad equazioni (2) di ordine superiore al secondo. La misura della curvatura verrà nel seguito indicata colla lettera φ ovvero colla maiuscola Φ , secondochè la si intenderà espressa con lettere minuscole, come il primo membro della precedente equazione, ovvero con lettere maiuscole, come il secondo membro.

(Continua).

PUBBLICAZIONI RECENTI

- SALMON G. — On Quaternary Cubics (Transazioni della R. Società di Londra).
- CHELINI D. — Determinazione analitica della rotazione dei corpi liberi secondo i concetti di Poincot (Vol. X. delle Memorie dell'Accademia di Bologna).
- HATON DE LA GOUPILLIÈRE. — *Traité théorique et pratique des Engranges*, in 8° *Paris* 1861.
- BALTZER D^r. R. — *Théorie et applications des determinants avec l'indication des sources originales traduit de l'allemand par J. Houel*. in 8° *Paris* 1861.
- JOURNAL de l'École Imp. polyt. 38^{me} Cahier, in 4° *Paris* 1861.
- MEUREY (C-V) — *La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires*, in 12° *Paris* 1861.
- WINCKLER Dr. ANTON. — *Integrali definiti*. Opuscolo in 8° di 50 pag. in lingua Tedesca estratto dagli Atti dell'Accademia di Vienna.
- STURM — *Cours de mecanique* vol. 1^{er}. in 8° *Paris* 1861.
- Atti dell'Accademia Pontificia de'Nuovi Lincei anno XIV. Sessione V. del 1861. in 4° *Roma* 1861.
- The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics N° 15. February 1861. *London*.
- TODHUNTER J. — *History of the Calculs of Variations*. Vol. in 8° di pag. 532. *Cambridge* 1861.
- AIRY G. — *On the algebrical and numerical Theory of Errors of Observations*, in 8° *Cambridge* 1861.