8. *Über*
die Abbildung eines durchlässigen Gitters;
von Mieczysław Wolfke.

In den bisherigen Untersuchungen über die optische Abbildung eines Gitters¹⁾ haben wir immer vorausgesetzt, daß die Gitterstäbe absolut undurchlässig für das Licht sind. In der letzten Arbeit²⁾ aber hat sich experimentell herausgestellt, daß die *durchlässigen Gitter*, d. h. diejenigen Gitter, bei welchen die Gitterstäbe noch merkliches Licht durchlassen können, sich bei der optischen Abbildung wesentlich anders verhalten, als die undurchlässigen. Um zu sehen, ob die Abbesche Abbildungstheorie auch in diesem Falle mit den experimentellen Tatsachen übereinstimmt, wollen wir in dieser Arbeit die optische Abbildung eines durchlässigen Gitters vom Standpunkt der Abbeschen Theorie näher untersuchen.

Wir nehmen an, daß das zu der optischen Hauptachse symmetrisch liegende Gitter, welches wir untersuchen wollen, aus N Spalten und $N - 1$ dazwischen liegenden Gitterstäben besteht. Sei die Spaltbreite $2a$, die Stabbreite 2Δ und die Gitterkonstante $\gamma = 2(a + \Delta)$. Den Durchlässigkeitskoeffizienten der Gitterstäbe nehmen wir gleich φ an, und ψ sei die Phasenverzögerung, die die Lichtwellen beim Durchgang durch die Stäbe erleiden.

Auf Grund dieser Annahmen werden wir jetzt das primäre und sekundäre Bild unseres Gitters näher bestimmen.

§ 1. Das primäre Bild.

Nach der Abbeschen Theorie ist die Lichtbewegung S_1 für das primäre Bild durch folgende Formel angegeben³⁾:

1) M. Wolfke, Ann. d. Phys. **34**, p. 277—310. 1911.

2) M. Wolfke, Ann. d. Phys. **37**, p. 96—102. 1912.

3) E. Abbe, „Die Lehre von der Bildentstehung im Mikroskop“. Bearbeitet und herausgegeben von O. Lummer u. F. Reiche. Verlag Fr. Vieweg & Sohn. Braunschweig 1910. (108 S.) Vgl. p. 89, Formel (72).

$$S_1 = \frac{K}{\lambda} \int_{\text{Objekt}} dX dY \varphi(XY) \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} - \psi(XY) + \frac{\xi'X + \eta'Y}{\lambda} \right],$$

wo K eine Konstante ist, λ die Wellenlänge, XY die Koordinaten der Objektebene, xy die Koordinaten der zu der Objektebene konjugierten Ebene, $\xi'\eta'$ sind die anguläre Breite und anguläre Höhe des primären Beugungsbildes, $\varphi(XY)$ ist der Durchlässigkeitskoeffizient des Objektes, $\psi(XY)$ die Phasenverzögerung der Wellen bei Durchgang durch die Objektschicht, t die Zeit und T die Schwingungsdauer.

Wir integrieren diesen Ausdruck nach der Variabel Y und erhalten:

$$S_1 = C \cdot \int_{-A}^{+A} dX \varphi(X) \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} - \psi(X) + \frac{\xi'X}{\lambda} \right];$$

wo $\pm A$ die Ränder des Gitters bedeuten und C eine Konstante ist.

Die Integration nach der Variabel X können wir in zwei Teile zerlegen; wir können erst über alle Spalten das Integral berechnen, und dann über alle Gitterstäbe, um dann die beiden Resultate zu addieren. Auf diese Weise erhalten wir das volle Integral. Wir bezeichnen das Integral über die Spalten mit S_{1a} und dasjenige über die Gitterstäbe mit S_{1d} , dann ist:

$$S_{1a} = C \int_{\text{Spalten}} dX \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} + \frac{\xi'X}{\lambda} \right];$$

$$S_{1d} = C \varphi \int_{\text{Stäbe}} dX \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} - \psi + \frac{\xi'X}{\lambda} \right],$$

wobei die primäre Lichtbewegung S_1 gleich ist:

$$S_1 = S_{1a} + S_{1d}.$$

Das erste Integral können wir in folgender Weise zerlegen:

$$S_{1a} = A_{1a} \sin 2\pi \frac{t}{T} + B_{1a} \cos 2\pi \frac{t}{T},$$

wo die Koeffizienten A_{1a} und B_{1a} durch folgende Ausdrücke gegeben sind:

$$A_{1a} = C \int_{\text{Spalten}} dX \cos 2\pi \frac{\xi'X}{\lambda};$$

$$B_{1a} = C \int_{\text{Spalten}} dX \sin 2\pi \frac{\xi'X}{\lambda}.$$

Der Ausdruck B_{1a} verschwindet wegen der symmetrischen Lage des Gitters. Der Ausdruck A_{1a} ist gleich:

$$A_{1a} = C \sum_{i=1}^N \int_{p_i}^{q_i} dX \cos \frac{2\pi \xi' X}{\lambda},$$

wo p_i und q_i die Randkoordinaten eines i^{ten} Spaltes sind und C eine Konstante bedeutet. Eine einfache Rechnung ergibt für das obige Integral folgenden bekannten Ausdruck¹⁾:

$$A_{1a} = C \frac{2 \sin \frac{2\pi \xi' a}{\lambda}}{\frac{2\pi \xi'}{\lambda}} \cdot \frac{\sin \frac{N\pi \xi' \gamma}{\lambda}}{\sin \frac{\pi \xi' \gamma}{\lambda}}.$$

Wir führen eine neue Variabel ω ein

$$\omega = \frac{2\pi \xi' a}{\lambda}$$

und erhalten:

$$A_{1a} = C \frac{\sin \omega}{\omega} \cdot \frac{\sin \frac{N\gamma \omega}{2a}}{\sin \frac{\gamma \omega}{2a}}.$$

Auf ähnliche Weise zerlegen wir den Ausdruck S_{1A} und erhalten:

$$S_{1A} = A_{1A} \sin 2\pi \frac{t}{T} + B_{1A} \cos 2\pi \frac{t}{T},$$

wo die Koeffizienten A_{1A} und B_{1A} folgende Werte haben:

$$\begin{aligned} A_{1A} &= C \varphi \int_{\text{Stäbe}} dX \cos 2\pi \left(\frac{\xi' X}{\lambda} - \psi \right) \\ &= C \varphi \cdot \cos 2\pi \psi \cdot \int_{\text{Stäbe}} dX \cos \frac{2\pi \xi' X}{\lambda} \\ &\quad + C \varphi \cdot \sin 2\pi \psi \cdot \int_{\text{Stäbe}} dX \sin \frac{2\pi \xi' X}{\lambda}; \\ B_{1A} &= C \varphi \int_{\text{Stäbe}} dX \sin 2\pi \left(\frac{\xi' X}{\lambda} - \psi \right) \\ &= C \varphi \cdot \cos 2\pi \psi \cdot \int_{\text{Stäbe}} dX \sin \frac{2\pi \xi' X}{\lambda} \\ &\quad - C \varphi \cdot \sin 2\pi \psi \cdot \int_{\text{Stäbe}} dX \cos \frac{2\pi \xi' X}{\lambda}. \end{aligned}$$

1) M. Wolfke, Ann. d. Phys. 34. Vgl. § 2 p. 283.

wobei diejenigen Integrale, die die Funktion $\sin \frac{2\pi \xi' X}{\lambda}$ enthalten, verschwinden wegen symmetrischer Lage des Gitters, und es bleibt:

$$A_{1A} = C q \cdot \cos 2\pi \psi \cdot \int_{\text{Stäbe}} dX \cos \frac{2\pi \xi' X}{\lambda};$$

$$B_{1A} = -C q \cdot \sin 2\pi \psi \cdot \int_{\text{Stäbe}} dX \cos \frac{2\pi \xi' X}{\lambda}.$$

Das Integral, welches in den obigen Ausdrücken vorkommt, können wir in folgender Form schreiben:

$$\int_{\text{Stäbe}} dX \cos \frac{2\pi \xi' X}{\lambda} = \sum_{i=1}^{N-1} \int_{p_i}^{q_i} dX \cos \frac{2\pi \xi' X}{\lambda};$$

wo p_i und q_i die Randkoordinaten eines i^{ten} Stabes sind. Dieses Integral ist von derselben Form, wie das für die Spalten, und wir erhalten nach der ausgeführten Rechnung:

$$\sum_{i=1}^{N-1} \int_{p_i}^{q_i} dX \cos \frac{2\pi \xi' X}{\lambda} = \frac{2 \sin \frac{2\pi \xi' d}{\lambda}}{\frac{2\pi \xi'}{\lambda}} \cdot \frac{\sin \frac{(N-1)\pi \xi' \gamma}{\lambda}}{\sin \frac{\pi \xi' \gamma}{\lambda}}.$$

Wir führen eine neue Variabel θ ein:

$$\theta = \frac{2\pi \xi' d}{\lambda}$$

und erhalten:

$$\int_{\text{Stäbe}} dX \cos \frac{2\pi \xi' X}{\lambda} = \frac{\sin \theta}{\theta} \cdot \frac{\sin \frac{(N-1)\gamma \theta}{2d}}{\sin \frac{\gamma \theta}{2d}}.$$

Auf diese Weise sind die Koeffizienten A_{1A} und B_{1A} gleich:

$$A_{1A} = C q \cdot \cos 2\pi \psi \cdot \frac{\sin \theta}{\theta} \cdot \frac{\sin \frac{(N-1)\gamma \theta}{2d}}{\sin \frac{\gamma \theta}{2d}};$$

$$B_{1A} = -C q \cdot \sin 2\pi \psi \cdot \frac{\sin \theta}{\theta} \cdot \frac{\sin \frac{(N-1)\gamma \theta}{2d}}{\sin \frac{\gamma \theta}{2d}}.$$

Die primäre Lichtbewegung S_1 wird also gleich:

$$S_1 = S_{1a} + S_{1A} = (A_{1a} + A_{1A}) \sin 2\pi \frac{t}{T} + B_{1A} \cos 2\pi \frac{t}{T}.$$

Daraus folgt die Intensitätsverteilung des Lichtes I_1 in dem primären Bilde:

$$I_1 = (A_{1a} + A_{1A})^2 + B_{1A}^2.$$

In dem Ausdrucke A_{1a} ist die Gitterfunktion

$$\frac{\sin \omega}{\omega} \cdot \frac{\sin \frac{N\gamma\omega}{2a}}{\sin \frac{\gamma\omega}{2a}}$$

enthalten, und in den Ausdrücken A_{1A} und B_{1A} die Gitterfunktion

$$\frac{\sin \theta}{\theta} \cdot \frac{\sin \frac{(N-1)\gamma\theta}{2A}}{\sin \frac{\gamma\theta}{2A}}.$$

Die Hauptextremalstellen der ersten Funktion liegen in den Punkten

$$\omega = \kappa \cdot \frac{2\pi a}{\gamma}; \quad (\kappa = 0, 1, 2 \dots);$$

die der zweiten:

$$\theta = \kappa \cdot \frac{2\pi A}{\gamma}; \quad (\kappa = 0, 1, 2 \dots).$$

Beide diese Gleichungen geben für die Koordinaten ξ' des primären Bildes, welche den Hauptextremalstellen der beiden Funktionen entsprechen, dieselben Werte, und zwar folgende:

$$\xi' = \kappa \cdot \frac{\lambda}{\gamma}; \quad (\kappa = 0, 1, 2 \dots).$$

Die Breite der Hauptextremalstellen der ersten Gitterfunktion ist gleich $\frac{2\lambda}{N\gamma}$, die der zweiten $\frac{2\lambda}{(N-1)\gamma}$. Außerdem liegen zwischen zwei ersten Hauptextremalstellen $N-2$ kleine Nebenextremalstellen, und zwischen den zweiten $N-3$.

Aus allem diesen können wir sehen, daß das primäre Bild eines durchlässigen Gitters sich nicht wesentlich unterscheidet von demjenigen eines undurchlässigen. Die Hauptlichtmaxima werden sich bei beiden Gitterarten an denselben Stellen befinden, nur bei den durchlässigen Gittern werden sie nicht so scharf auftreten,

wie bei den undurchlässigen. Außerdem werden bei den durchlässigen Gittern die einzelnen Hauptmaxima gestärkt oder geschwächt, je nach den Werten von a , Δ , φ und ψ .

§ 2. Das sekundäre Bild bei symmetrischer Abblendung.

Die Lichtbewegung S_2 für das sekundäre Bild wird durch folgende Formel gegeben¹⁾:

$$S_2 = \frac{K}{\lambda^2} \int_{\text{Apertur}} \int d\xi' d\eta' \int_{\text{Objekt}} \int dX dY \varphi(XY) \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} - \psi(XY) - \frac{\xi'(x-X)}{\lambda} - \frac{\eta'(y-Y)}{\lambda} \right].$$

Wir integrieren diesen Ausdruck nach der Variabel Y und η' und erhalten:

$$S_2 = \frac{K}{\lambda} \int_{-\alpha'}^{+\alpha'} d\xi' \int_{-A}^{+A} dX \varphi(X) \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} - \psi(X) - \frac{\xi'(x-X)}{\lambda} \right],$$

wo $\pm \alpha'$ die angularen Ränder der Blende sind.

Die Integration dieses Ausdruckes nach der Variabel X können wir in zwei Teilen ausführen, nämlich einmal über die Spalten, und dann wieder über die Stäbe integrieren. Das Integral über alle Spalten bezeichnen wir mit S_{2a} und dasjenige über alle Stäbe mit S_{2A} . Auf diese Weise wird die Lichtbewegung S_2 durch die Summe gegeben:

$$S_2 = S_{2a} + S_{2A}.$$

Die Ausdrücke S_{2a} und S_{2A} werden sein:

$$S_{2a} = \frac{K}{\lambda} \int_{-\alpha'}^{+\alpha'} d\xi' \int_{\text{Spalten}} dX \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{\xi'(x-X)}{\lambda} \right];$$

$$S_{2A} = \frac{K}{\lambda} \cdot \varphi \cdot \int_{-\alpha'}^{+\alpha'} d\xi' \int_{\text{Stäbe}} dX \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} - \psi - \frac{\xi'(x-X)}{\lambda} \right].$$

Wir zerlegen den Ausdruck S_{2a} auf folgende Weise:

$$S_{2a} = A_{2a} \sin 2\pi \frac{t}{T} + B_{2a} \cos 2\pi \frac{t}{T},$$

E. Abbe, l. c. p. 87. Formel (68).

wo die Koeffizienten A_{2a} und B_{2a} sind gleich:

$$A_{2a} = \frac{K}{\lambda} \int_{-\alpha'}^{+\alpha'} d\xi' \int_{\text{Spalten}} dX \cos \frac{2\pi \xi' (x-X)}{\lambda};$$

$$B_{2a} = \frac{K}{\lambda} \int_{-\alpha'}^{+\alpha'} d\xi' \int_{\text{Spalten}} dX \sin \frac{2\pi \xi' (x-X)}{\lambda}.$$

Der Ausdruck B_{2a} verschwindet wegen der Symmetrie der Blende. Der Ausdruck A_{2a} ist gleich:

$$A_{2a} = \frac{K}{\lambda} \int_{-\alpha'}^{+\alpha'} d\xi' \sum_{i=1}^{i=N} \int_{p_i}^{q_i} dX \cos \frac{2\pi \xi' (x-X)}{\lambda};$$

wo p_i und q_i die Randkoordinaten eines i^{ten} Spaltes sind.

Eine ähnliche Rechnung wie für den Ausdruck A_{1a} im vorigen Paragraph führt uns zu folgendem Resultat:

$$A_{2a} = C \cdot \int_{-\frac{2\pi\alpha\alpha'}{\lambda}}^{+\frac{2\pi\alpha\alpha'}{\lambda}} d\omega \cdot \frac{\sin \omega}{\omega} \cdot \frac{\sin \frac{N\gamma\omega}{2a}}{\sin \frac{\gamma\omega}{2a}} \cdot \cos \frac{x\omega}{a},$$

wo C eine Konstante bedeutet, und die Variabel ω ist gleich:

$$\omega = \frac{2\pi \xi' \alpha}{\lambda}.$$

In derselben Weise zerlegen wir den Ausdruck S_{2A} und erhalten:

$$S_{2A} = A_{2A} \sin 2\pi \frac{t}{T} + B_{2A} \cos 2\pi \frac{t}{T},$$

wo die Koeffizienten A_{2A} und B_{2A} sind gleich:

$$A_{2A} = \frac{K}{\lambda} \varphi \int_{-\alpha'}^{+\alpha'} d\xi' \int_{\text{Stäbe}} dX \cos 2\pi \left[\psi + \frac{\xi' (x-X)}{\lambda} \right]$$

$$= \frac{K}{\lambda} \varphi \cdot \cos 2\pi \psi \cdot \int_{-\alpha'}^{+\alpha'} d\xi' \int_{\text{Stäbe}} dX \cos \frac{2\pi \xi' (x-X)}{\lambda}$$

$$- \frac{K}{\lambda} \varphi \cdot \sin 2\pi \psi \cdot \int_{-\alpha'}^{+\alpha'} d\xi' \int_{\text{Stäbe}} dX \sin \frac{2\pi \xi' (x-X)}{\lambda};$$

$$\begin{aligned}
 B_{2A} &= \frac{K}{\lambda} \varphi \int_{-a'}^{+a'} d\xi' \int_{\text{Stäbe}} dX \sin 2\pi \left[\psi + \frac{\xi'(x-X)}{\lambda} \right] \\
 &= \frac{K}{\lambda} \varphi \cdot \sin 2\pi \psi \cdot \int_{-a'}^{+a'} d\xi' \int_{\text{Stäbe}} dX \cos \frac{2\pi \xi'(x-X)}{\lambda} \\
 &\quad + \frac{K}{\lambda} \varphi \cdot \cos 2\pi \psi \cdot \int_{-a'}^{+a'} d\xi' \int_{\text{Stäbe}} dX \sin \frac{2\pi \xi'(x-X)}{\lambda}.
 \end{aligned}$$

Die Integrale, die die Funktion $\sin \frac{2\pi \xi'(x-X)}{\lambda}$ enthalten, verschwinden wegen der Symmetrie der Blende, und es bleibt:

$$\begin{aligned}
 A_{2A} &= \frac{K}{\lambda} \varphi \cdot \cos 2\pi \psi \cdot \int_{-a'}^{+a'} d\xi' \int_{\text{Stäbe}} dX \cos \frac{2\pi \xi'(x-X)}{\lambda}; \\
 B_{2A} &= \frac{K}{\lambda} \varphi \cdot \sin 2\pi \psi \cdot \int_{-a'}^{+a'} d\xi' \int_{\text{Stäbe}} dX \cos \frac{2\pi \xi'(x-X)}{\lambda}.
 \end{aligned}$$

Das Integral, welches in den obigen Ausdrücken steht, können wir in folgender Form schreiben:

$$\int_{-a'}^{+a'} d\xi' \int_{\text{Stäbe}} dX \cos \frac{2\pi \xi'(x-X)}{\lambda} = \int_{-a'}^{+a'} d\xi' \sum_{i=1}^{N-1} \int_{p_i}^{q_i} dX \cos \frac{2\pi \xi'(x-X)}{\lambda},$$

wo p_i und q_i die Randkoordinaten eines i^{ten} Stabes sind. Eine einfache Rechnung, ähnlich wie für die Spalten, ergibt in diesem Falle folgendes Resultat für das obige Integral:

$$\begin{aligned}
 &+ \frac{2\pi A a'}{\lambda} \\
 &\int_{-\frac{2\pi A a'}{\lambda}}^{+\frac{2\pi A a'}{\lambda}} d\theta \cdot \frac{\sin \theta}{\theta} \cdot \frac{\sin \frac{(N-1)\gamma\theta}{2A}}{\sin \frac{\gamma\theta}{2A}} \cdot \cos \frac{x\theta}{A}, \\
 &- \frac{2\pi A a'}{\lambda}
 \end{aligned}$$

wo die Variabel θ gleich ist:

$$\theta = \frac{2\pi \xi' A}{\lambda}.$$

Die Koeffizienten A_{2A} und B_{2A} werden also gleich:

$$A_{2A} = C \varphi \cdot \cos 2\pi \psi \cdot \int d\theta \cdot \frac{\sin \theta}{\theta} \cdot \frac{\sin \frac{(N-1)\gamma \theta}{2A}}{\sin \frac{\gamma \theta}{2A}} \cdot \cos \frac{x \theta}{A};$$

$$B_{2A} = C \varphi \cdot \sin 2\pi \psi \cdot \int d\theta \cdot \frac{\sin \theta}{\theta} \cdot \frac{\sin \frac{(N-1)\gamma \theta}{2A}}{\sin \frac{\gamma \theta}{2A}} \cdot \cos \frac{x \theta}{A},$$

wo C eine Konstante bedeutet.

Die sekundäre Lichtbewegung S_2 wird also gleich sein:

$$S_2 = (A_{2a} + A_{2A}) \sin 2\pi \frac{t}{T} + B_{2A} \cos 2\pi \frac{t}{T},$$

woraus die Intensitätsverteilung I_2 in dem sekundären Bilde wird sein:

$$I_2 = (A_{2a} + A_{2A})^2 + B_{2A}^2.$$

Wir werden jetzt die beiden Integrale, die in dem Ausdrucke A_{2a} und in den Ausdrücken A_{2A} und B_{2A} sich befinden, für den einfachen Fall zweier i^{ten} Hauptmaximis transformieren. Nämlich wir nehmen an, daß bei der Entstehung des sekundären Bildes nur die beiden i^{ten} Hauptmaxima des primären Bildes zur Wirkung gelangen.

Die bekannte Transformation¹⁾ gibt uns für das erste Integral folgendes Resultat:

$$\int d\omega \cdot \frac{\sin \omega}{\omega} \cdot \frac{\sin \frac{N\gamma \omega}{2a}}{\sin \frac{\gamma \omega}{2a}} \cdot \cos \frac{x \omega}{a} = C_{ai} \cdot \cos \frac{2\pi x i}{\gamma},$$

wo C_{ai} eine Funktion bedeutet, die in einem γ -Intervall einen konstanten Wert annähernd besitzt, die aber von dem Wert i abhängig ist.

1) M. Wolfke, Ann. d. Phys. 34. 1911: vgl. § 6, p. 290—294.

Dieselbe Transformation gibt uns für das zweite Integral analogen Wert:

$$+ \frac{2\pi \Delta \alpha'}{\lambda} \int d\theta \cdot \frac{\sin \theta}{\theta} \cdot \frac{\sin \frac{(N-1)\gamma \theta}{2\Delta}}{\sin \frac{\gamma \theta}{2\Delta}} \cdot \cos \frac{x \theta}{\Delta} = C_{\Delta i} \cos \frac{2\pi x i}{\gamma},$$

$$- \frac{2\pi \Delta \alpha'}{\lambda}$$

wo $C_{\Delta i}$ eine in einem γ -Intervall nahe konstante und von i abhängige Größe bedeutet.

Im Falle, wo zur Wirkung mehrere Maxima des primären Bildes gelangen, z. B. die beiden $j^{\text{ten}}, k^{\text{ten}}, l^{\text{ten}}$ usw., dann werden die beiden obigen Integrale durch folgende Ausdrücke gegeben:

$$+ \frac{2\pi \alpha \alpha'}{\lambda} \int d\omega \cdot \frac{\sin \omega}{\omega} \cdot \frac{\sin \frac{N\gamma \omega}{2a}}{\sin \frac{\gamma \omega}{2a}} \cdot \cos \frac{x \omega}{a} = \sum_{i=j,k,l,\dots} C_{\alpha i} \cos \frac{2\pi x i}{\gamma};$$

$$- \frac{2\pi \alpha \alpha'}{\lambda}$$

$$+ \frac{2\pi \Delta \alpha'}{\lambda} \int d\theta \cdot \frac{\sin \theta}{\theta} \cdot \frac{\sin \frac{(N-1)\gamma \theta}{2\Delta}}{\sin \frac{\gamma \theta}{2\Delta}} \cdot \cos \frac{x \theta}{\Delta} = \sum_{i=j,k,l,\dots} C_{\Delta i} \cos \frac{2\pi x i}{\gamma}.$$

$$- \frac{2\pi \Delta \alpha'}{\lambda}$$

In allgemeinem Falle wird also bei symmetrischer Abbildung die Intensität I_2 des sekundären Bildes durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$I_2 = \left(C \sum_{i=j,k,l,\dots} C_{\alpha i} \cos \frac{2\pi x i}{\gamma} + C \varphi \cos 2\pi \psi \sum_{i=j,k,l,\dots} C_{\Delta i} \cos \frac{2\pi x i}{\gamma} \right)^2$$

$$+ \left(C \varphi \sin 2\pi \psi \sum_{i=j,k,l,\dots} C_{\Delta i} \cos \frac{2\pi x i}{\gamma} \right)^2.$$

Nach der Quadratur erhalten wir in der ersten und zweiten Klammer Glieder von folgender Form:

$$A_1 \cos^2 \frac{2\pi x i}{\gamma} \quad \text{und} \quad A_2 \cos \frac{2\pi x k}{\gamma} \cdot \cos \frac{2\pi x l}{\gamma}.$$

Diese Glieder bleiben unverändert beim Durchgang von dem Punkte x zu dem Punkte $(-x)$, ebenso beim Übergang vom Punkte x zu dem Punkte $(\gamma - x)$.

Daraus schließen wir, daß *das sekundäre Bild eines durchlässigen Gitters bei symmetrischer Abbildung symmetrisch zu der Mitte des Gitters und auch symmetrisch in jedem γ -Intervall zu dessen Mitte bleibt.*

In einzelnen Fällen wird sich das Abbild nicht wesentlich unterscheiden von demjenigen eines undurchlässigen Gitters.

§ 3. Das sekundäre Bild bei asymmetrischer Abbildung.

So wie in dem vorigen Paragraphen, bei symmetrischer Abbildung, wird auch jetzt, bei asymmetrischer Abbildung, die Lichtbewegung S_2 in dem sekundären Bild durch folgende Gleichung gegeben:

$$S_2 = S_{2a} + S_{2d},$$

wobei die Ausdrücke S_{2a} und S_{2d} sind gleich:

$$S_{2a} = \frac{K}{\lambda} \int_{\alpha_1'}^{\alpha_2'} d\xi' \int_{\text{Spalten}} dX \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{\xi'(x-X)}{\lambda} \right];$$

$$S_{2d} = \frac{K}{\lambda} \varphi \int_{\alpha_1'}^{\alpha_2'} d\xi' \int_{\text{Stäbe}} dX \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} - \psi - \frac{\xi'(x-X)}{\lambda} \right],$$

wo α_1' und α_2' die angularen Randkoordinaten der Blende sind.

Wir zerlegen auf bekannte Weise den Ausdruck S_{2a} und erhalten:

$$S_{2a} = A_{2a} \sin 2\pi \frac{t}{T} + B_{2a} \cos 2\pi \frac{t}{T},$$

wo die Ausdrücke A_{2a} und B_{2a} folgende Werte haben:

$$A_{2a} = \frac{K}{\lambda} \int_{\alpha_1'}^{\alpha_2'} d\xi' \int_{\text{Spalten}} dX \cos \frac{2\pi \xi'(x-X)}{\lambda};$$

$$B_{2a} = \frac{K}{\lambda} \int_{\alpha_1'}^{\alpha_2'} d\xi' \int_{\text{Spalten}} dX \sin \frac{2\pi \xi'(x-X)}{\lambda}.$$

Das erste Integral ist uns aus dem vorigen Paragraphen bekannt, das zweite berechnen wir auf ähnliche Weise und erhalten folgendes Resultat:

$$A_{2a} = C \cdot \int_{\frac{2\pi a \alpha_1'}{\lambda}}^{\frac{2\pi a \alpha_2'}{\lambda}} d\omega \cdot \frac{\sin \omega}{\omega} \cdot \frac{\sin \frac{N\gamma \omega}{2a}}{\sin \frac{\gamma \omega}{2a}} \cdot \cos \frac{x \omega}{a};$$

$$B_{2a} = C \cdot \int_{\frac{2\pi a \alpha_1'}{\lambda}}^{\frac{2\pi a \alpha_2'}{\lambda}} d\omega \cdot \frac{\sin \omega}{\omega} \cdot \frac{\sin \frac{N\gamma \omega}{2a}}{\sin \frac{\gamma \omega}{2a}} \cdot \sin \frac{x \omega}{a},$$

wo ω den Wert

$$\omega = \frac{2\pi \xi' a}{\lambda}$$

hat und C eine Konstante bedeutet.

In derselben Weise zerlegen wir den Ausdruck S_{2A} und erhalten:

$$S_{2A} = A_{2A} \sin 2\pi \frac{t}{T} + B_{2A} \cos 2\pi \frac{t}{T},$$

wo die Koeffizienten A_{2A} und B_{2A} folgende Werte haben:

$$A_{2A} = \frac{K}{\lambda} \varphi \cdot \cos 2\pi \psi \cdot \int_{\alpha_1'}^{\alpha_2'} d\xi' \int_{\text{Stäbe}} dX \cos \frac{2\pi \xi' (x - X)}{\lambda}$$

$$- \frac{K}{\lambda} \varphi \cdot \sin 2\pi \psi \cdot \int_{\alpha_1'}^{\alpha_2'} d\xi' \int_{\text{Stäbe}} dX \sin \frac{2\pi \xi' (x - X)}{\lambda};$$

$$B_{2A} = \frac{K}{\lambda} \varphi \cdot \sin 2\pi \psi \cdot \int_{\alpha_1'}^{\alpha_2'} d\xi' \int_{\text{Stäbe}} dX \cos \frac{2\pi \xi' (x - X)}{\lambda}$$

$$+ \frac{K}{\lambda} \varphi \cdot \cos 2\pi \psi \cdot \int_{\alpha_1'}^{\alpha_2'} d\xi' \int_{\text{Stäbe}} dX \sin \frac{2\pi \xi' (x - X)}{\lambda}.$$

Die Integrale berechnen wir auf ähnliche Weise wie in dem vorigen Paragraphen und wir erhalten folgende Resultate:

$$\begin{aligned}
A_{2A} &= C \varphi \cdot \cos 2\pi \psi \cdot \int_{\frac{2\pi A \alpha_1'}{\lambda}}^{\frac{2\pi A \alpha_2'}{\lambda}} d\theta \cdot \frac{\sin \theta}{\theta} \cdot \frac{\sin \frac{(N-1)\gamma \theta}{2A}}{\sin \frac{\gamma \theta}{2A}} \cdot \cos \frac{x \theta}{A} \\
&\quad - C \varphi \cdot \sin 2\pi \psi \cdot \int_{\frac{2\pi A \alpha_1'}{\lambda}}^{\frac{2\pi A \alpha_2'}{\lambda}} d\theta \cdot \frac{\sin \theta}{\theta} \cdot \frac{\sin \frac{(N-1)\gamma \theta}{2A}}{\sin \frac{\gamma \theta}{2A}} \cdot \sin \frac{x \theta}{A}; \\
B_{2A} &= C \varphi \cdot \sin 2\pi \psi \cdot \int_{\frac{2\pi A \alpha_1'}{\lambda}}^{\frac{2\pi A \alpha_2'}{\lambda}} d\theta \cdot \frac{\sin \theta}{\theta} \cdot \frac{\sin \frac{(N-1)\gamma \theta}{2A}}{\sin \frac{\gamma \theta}{2A}} \cdot \cos \frac{x \theta}{A} \\
&\quad + C \varphi \cdot \cos 2\pi \psi \cdot \int_{\frac{2\pi A \alpha_1'}{\lambda}}^{\frac{2\pi A \alpha_2'}{\lambda}} d\theta \cdot \frac{\sin \theta}{\theta} \cdot \frac{\sin \frac{(N-1)\gamma \theta}{2A}}{\sin \frac{\gamma \theta}{2A}} \cdot \sin \frac{x \theta}{A},
\end{aligned}$$

wo C eine Konstante bedeutet und θ den Wert

$$\theta = \frac{2\pi \xi' A}{\lambda}$$

hat.

Die sekundäre Lichtbewegung wird gleich sein:

$$S_2 = (A_{2a} + A_{2A}) \sin 2\pi \frac{t}{T} + (B_{2a} + B_{2A}) \cos 2\pi \frac{t}{T},$$

woraus die Intensität I_2 des sekundären Bildes wird sein:

$$I_2 = (A_{2a} + A_{2A})^2 + (B_{2a} + B_{2A})^2.$$

Wir transformieren auf bekannte Weise¹⁾ die in dem obigen Ausdruck vorkommenden Integrale für den Fall eines

1) M. Wolfke, Ann. d. Phys. 37. 1912. vgl. § 1. p. 99.

i^{ten} Hauptmaximums, das allein bei der Entstehung des sekundären Bildes teilnimmt. Im Falle, wo mehrere Maxima des primären Bildes zur Wirkung gelangen, wie z. B. das j^{te} , k^{te} , l^{te} usw. werden die obigen Integrale nach der Transformation folgende Werte annehmen:

$$\int_{\frac{2\pi a \alpha_1'}{\lambda}}^{\frac{2\pi a \alpha_2'}{\lambda}} d\omega \cdot \frac{\sin \omega}{\omega} \cdot \frac{\sin \frac{N\gamma \omega}{2a}}{\sin \frac{\gamma \omega}{2a}} \cdot \cos \frac{x \omega}{a} = \sum_{i=j, k, l, \dots} C_{ai} \cos \frac{2\pi x i}{\gamma};$$

$$\int_{\frac{2\pi a \alpha_1'}{\lambda}}^{\frac{2\pi a \alpha_2'}{\lambda}} d\omega \cdot \frac{\sin \omega}{\omega} \cdot \frac{\sin \frac{N\gamma \omega}{2a}}{\sin \frac{\gamma \omega}{2a}} \cdot \sin \frac{x \omega}{a} = \sum_{i=j, k, l, \dots} C_{ai} \sin \frac{2\pi x i}{\gamma};$$

$$\int_{\frac{2\pi \Delta \alpha_1'}{\lambda}}^{\frac{2\pi \Delta \alpha_2'}{\lambda}} d\theta \cdot \frac{\sin \theta}{\theta} \cdot \frac{\sin \frac{(N-1)\gamma \theta}{2\Delta}}{\sin \frac{\gamma \theta}{2\Delta}} \cdot \cos \frac{x \theta}{\Delta} = \sum_{i=j, k, l, \dots} C_{\Delta i} \cos \frac{2\pi x i}{\gamma};$$

$$\int_{\frac{2\pi \Delta \alpha_1'}{\lambda}}^{\frac{2\pi \Delta \alpha_2'}{\lambda}} d\theta \cdot \frac{\sin \theta}{\theta} \cdot \frac{\sin \frac{(N-1)\gamma \theta}{2\Delta}}{\sin \frac{\gamma \theta}{2\Delta}} \cdot \sin \frac{x \theta}{\Delta} = \sum_{i=j, k, l, \dots} C_{\Delta i} \sin \frac{2\pi x i}{\gamma},$$

wo C_{ai} und $C_{\Delta i}$ Funktionen bedeuten, die in einem γ -Intervall einen annähernd konstanten Wert haben, die aber von i abhängig sind.

Auf diese Weise erhalten wir den allgemeinen Ausdruck für die Intensitätsverteilung I_2 in dem sekundären Bild bei asymmetrischer Ablendung. Die Intensität I_2 ist daher gleich:

$$\begin{aligned}
I_2 = & \left(C \sum_{i=j, k, l \dots} C_{Ai} \cos \frac{2\pi x i}{\gamma} + C \varphi \cdot \cos 2\pi \psi \cdot \sum_{i=j, k, l \dots} C_{Ai} \cos \frac{2\pi x i}{\gamma} \right. \\
& \left. - C \varphi \cdot \sin 2\pi \psi \cdot \sum_{i=j, k, l \dots} C_{Ai} \sin \frac{2\pi x i}{\gamma} \right)^2 \\
& + \left(C \sum_{i=j, k, l \dots} C_{Ai} \sin \frac{2\pi x i}{\gamma} + C \varphi \cdot \sin 2\pi \psi \cdot \sum_{i=j, k, l \dots} C_{Ai} \cos \frac{2\pi x i}{\gamma} \right. \\
& \left. + C \varphi \cdot \cos 2\pi \psi \cdot \sum_{i=j, k, l \dots} C_{Ai} \sin \frac{2\pi x i}{\gamma} \right)^2.
\end{aligned}$$

Nach der ausgeführten Quadratur in den beiden Klammern erhalten wir Glieder von folgenden Formen:

$$\begin{aligned}
A_1 \cos^2 \frac{2\pi x i}{\gamma}; & \quad A_2 \cos \frac{2\pi x k}{\gamma} \cdot \cos \frac{2\pi x l}{\gamma}; \\
B_1 \sin^2 \frac{2\pi x i}{\gamma}; & \quad B_2 \sin \frac{2\pi x k}{\gamma} \cdot \sin \frac{2\pi x l}{\gamma};
\end{aligned}$$

und

$$C \sin \frac{2\pi x k}{\gamma} \cdot \cos \frac{2\pi x l}{\gamma}.$$

Wenn wir von dem Punkt x zu dem, ihm zu der Mitte des Gitters symmetrisch liegenden Punkte, $(-x)$, oder zu dem, ihm zu der Mitte seines γ -Intervalls symmetrisch liegenden Punkte, $(\gamma - x)$, übergehen, so sehen wir, daß alle Glieder der ersten vier Typus unverändert bleiben, daß aber die Glieder des letzten Typus das Vorzeichen ändern.

Daraus sehen wir, daß das Abbild eines durchlässigen Gitters bei asymmetrischer Abblendung asymmetrisch zu der Mitte des Gitters ist, und auch asymmetrisch in jedem γ -Intervall bleibt.

Alle in dieser Arbeit gefundenen theoretischen Resultate wurden experimentell geprüft und es ergab sich, daß die Abbesche Abbildungstheorie im allgemeinen mit den experimentellen Tatsachen übereinstimmt. Die einzelnen Fälle werden nächstens näher untersucht.

Breslau, Januar 1912.

(Eingegangen 19. Januar 1912.)