10. *Zur Theorie der Berührung fester elastischer Körper; von M. T. Huber.*

Im Jahre 1881 wurde von H. Hertz die allgemeine Lösung des folgenden wichtigen Problems der Elastizitätstheorie veröffentlicht[1]):

„Zwei elastische isotrope Körper berühren sich in einem sehr kleinen Teile ihrer vollkommen glatt gedachten Oberfläche und üben durch diesen Teil (Druckfläche) gegenseitig einen endlichen Druck aus. Gegeben sind die beiden Elastizitätskonstanten eines jeden der sich berührenden Körper, die Form und gegenseitige Lage der Oberflächen in der Nähe des Berührungspunktes, endlich der Gesamtdruck; gesucht ist die Fläche, von welcher die Druckfläche ein unendlich kleiner Teil ist, die Form und absolute Größe der Druckfigur (d. h. der Begrenzung der Druckfläche), die Verteilung des senkrechten Druckes in der Druckfläche, endlich die Annäherung der beiden Körper, welche durch einen bestimmten Gesamtdruck hervorgerufen wird."

Die gefundene Lösung veranlaßte Hertz zum Versuch, an die Stelle mehrerer älteren, der wissenschaftlichen Strenge entbehrenden Definitionen der Härte eine neue, möglichst einfache und exakte, in folgenden Worten zu setzen[2]):

„Die Härte ist die Festigkeit, welche ein Körper derjenigen Deformation entgegensetzt, die einer Berührung mit kreisförmiger Druckfläche entspricht. Ein absolutes Maß aber für die Härte erhalten wir, wenn wir festsetzen: Die Härte eines Körpers wird gemessen durch den Normaldruck auf die Flächeneinheit, welcher im Mittelpunkte einer kreisförmigen Druckfläche herrschen muß, damit in einem Punkte des Körpers die Spannungen eben die Elastizitätsgrenze erreichen."

1) H. Hertz, Journ. für die reine u. ang. Math. **92.** p. 156—171. 1881. Oder auch: Gesammelte Werke **1.** p. 155—173. 1895.

2) H. Hertz, Verhandl. d. Ver. zur Beförd. d. Gewerbefl. Berlin, November 1882. Oder: Gesammelte Werke **1.** p. 174—196. 1895.

Aus der Hertzschen Arbeit geht weiter hervor, daß er der so definierten Härte die Bedeutung einer Materialkonstante beilegte, und so wurde auch seine Theorie von nachfolgenden Forschern gedeutet. Während aber die Hauptergebnisse der Hertzschen Lösung oftmals glänzende experimentelle Bestätigung fanden[1]) und ohne Zweifel unanfechtbar sind, so gilt das nicht mehr von der angeführten Anwendung. Die Erfahrung lehrt nämlich[2]), daß die Hertzsche Härte für spröde Körper von den Krümmungsradien beider Körperoberflächen an der Berührungsstelle abhängt, daß sie also nicht als Materialkonstante betrachtet werden kann. Ich glaube in vorliegender Arbeit wesentliches zur Aufklärung dieser Tatsache beizutragen.

Eine Berührung mit kreisförmiger Druckfläche findet im allgemeinen statt, wenn die Oberflächen beider Körper in der Nähe der Berührungsstelle sphärisch gekrümmt sind. Für diesen Fall genügt es also die Berührung zweier Kugeln zu betrachten.

Bezeichnet p den Gesamtdruck; $R_1 = 1/\varrho_1$, $R_2 = 1/\varrho_2$ die Radien, $E_1\,\mu_1$, $E_2\,\mu_2$ die gewöhnlichen (Young-Poissonschen[3])) und $\vartheta_1 = 4(1-\mu_1^2)/E_1$, $\vartheta_2 = 4(1-\mu_2^2)/E_2$ die von Hertz eingeführten Elastizitätskonstanten der beiden Kugeln, so ist der Radius des Druckkreises:

$$a = \sqrt[3]{\frac{3\,p}{16}\cdot\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{\varrho_1+\varrho_2}}, \tag{I}$$

die Annäherung der Kugeln:

$$\alpha = \frac{3\,p}{16\,a}(\vartheta_1+\vartheta_2), \tag{II}$$

die Hauptspannungen (Drucke) im Mittelpunkte des Druckkreises

$$\left\{\begin{aligned} Z_z^{(0)} &= \frac{3\,p}{2\,\pi\,a^2} = p', \\ X_x^{(0)} = Y_y^{(0)} &= \left(\tfrac{1}{2}+\mu\right)\frac{3\,p}{2\,\pi\,a^2} = \frac{1+2\,\mu}{2}\,p'. \end{aligned}\right. \tag{III}$$

1) H. Hertz, Gesammelte Werke 1. p. 188. 1895; F. Auerbach, Wied. Ann. **43**. p. 61—100. 1891; Stribeck, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. **45**. p. 73—79. 1901; Schwinning, l. c., **45**. p. 332—336. 1901.

2) F. Auerbach, Wied. Ann. **43**. p. 61—100. 1891.

3) Hertz benützte in seinen p. 153 zitierten Abhandlungen die Kirchhoffschen Elastizitätskonstanten K und θ. Seine im folgenden mit römischen Ziffern bezeichneten Formeln wurden für gewöhnliche Elastizitätskonstanten umgerechnet.

Dabei ist die z-Achse der Richtung des Gesamtdruckes parallel gedacht. Die letzteren Gleichungen beziehen sich auf den einen oder den anderen Körper, je nachdem $\mu = \mu_1$ oder $\mu = \mu_2$ gesetzt wird. Hertz berechnet außerdem noch den Normaldruck Z_z, die Verschiebung ζ in seiner Richtung und die Verdichtung σ des Materiales im beliebigen Punkte der kreisförmigen Druckfläche. Die allgemeinen Spannungskomponenten im Innern des Körpers gibt Hertz explizite nicht an, obwohl die genaue Kenntnis des Spannungszustandes in der Nähe des Randes der Druckfläche, wo bei wachsendem Druck die Überschreitung der Elastizitätsgrenze in spröden Körpern zuerst auftritt, offenbar von wesentlicher Bedeutung für das Härteproblem ist. Wie aus seinen eigenen Worten hervorgeht, betrachtete Hertz die bezüglichen Rechnungen wegen der großen Kompliziertheit der Formeln als kaum durchführbar; für den Fall zweier Kugeln treten jedoch, wie ich mich überzeugt habe, im Laufe der allerdings recht mühsamen Rechnung, so erhebliche Vereinfachungen ein, daß man am Ende zu gut verwendbaren Formeln gelangt, welche nur elementare Funktionen enthalten. Den Ausgangspunkt der Rechnung bildeten folgende allgemeine Gleichungen:

$$
\text{(IV)} \quad \left\{
\begin{aligned}
X_x &= -\frac{E}{1+\mu}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} - 4\mu\frac{\partial P}{\partial z}, \\
Y_y &= -\frac{E}{1+\mu}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} - 4\mu\frac{\partial P}{\partial z}, \\
Z_z &= -\frac{E}{1+\mu}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} - 4(2-\mu)\frac{\partial P}{\partial z}, \\
X_y &= -\frac{E}{1+\mu}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x\,\partial y}, \\
X_z &= -\frac{E}{1+\mu}\left\{\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x\,\partial z} + \vartheta\frac{\partial P}{\partial x}\right\} = 2z\frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial z}, \\
Y_z &= -\frac{E}{1+\mu}\left\{\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y\,\partial z} + \vartheta\frac{\partial P}{\partial y}\right\} = 2z\frac{\partial^2 P}{\partial y\,\partial z}.
\end{aligned}
\right.
$$

Obigen Formeln ist in jedem der beiden Körper ein besonderes mit ihm im Unendlichen starr verbundenes rechtwinkliggeradliniges Koordinatensystem zugrunde gelegt. Die xy-Ebene und die z-Achse des Systems fallen mit der gemeinsamen Tangentialebene, bez. Normale, der beiden Oberflächen während der ursprünglichen mathematischen Berührung zusammen. Y_x bezeichnet die Druckkomponente in der Richtung der y, welche in einem Flächenelemente, dessen Normale die x-Richtung hat, von dem Körperteile, in dem x kleinere Werte besitzt, auf denjenigen, in dem x größer ist, ausgeübt wird. Die analoge Bezeichnung gilt für die übrigen Druckkomponenten. P ist außerhalb der kreisförmigen Druckfläche eine Funktion der positiven Wurzel u der quadratischen Gleichung

$$\text{(V)} \qquad \frac{x^2 + y^2}{a^2 + u} + \frac{z^2}{u} = 1$$

von der Form

$$\text{(VI)} \qquad P = \frac{3p}{16\pi} \int_u^\infty \frac{1 - \frac{r^2}{a^2 + u} - \frac{z^2}{u}}{(a^2 + u)\sqrt{u}} \, du,$$

in welcher zur Abkürzung $x^2 + y^2 = r^2$ gesetzt wurde. Für das Innere des Druckkreises ist die untere Grenze des Integrales $u = 0$ zu setzen. Schließlich bezeichnet Π zwei Funktionen, deren eine sich auf den einen, die andere sich auf den anderen Körper bezieht, und zwar ist:

$$\text{(VII)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \Pi_1 &= -\frac{2(1+\mu_1)}{E_1} P + \frac{2(1+\mu_1)(1-2\mu_1)}{E_1} \left\{ \int_z^\infty P\,dz - J \right\}, \\ \Pi_2 &= -\frac{2(1+\mu_2)}{E_2} P_z + \frac{2(1+\mu_2)(1-2\mu_2)}{E_2} \left\{ \int_z^\infty P\,dz - J \right\}. \end{aligned} \right.$$

Hierin bedeutet J eine Konstante, die so gewählt ist, das Π endlich wird.

Die Verschiebungskomponenten nach x, y, z sind:

$$\text{(VIII)} \qquad \xi = \frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad \eta = \frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad \zeta = \frac{\partial \Pi}{\partial z} + 2\vartheta P;$$

die Verdichtung

$$\sigma = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \nabla^2 \Pi + 2\vartheta \frac{\partial P}{\partial z},$$

oder wegen

$$\text{(IX)} \qquad \nabla^2 \Pi = -\frac{4(1+\mu)}{E} \frac{\partial P}{\partial z},$$

wird

$$\text{(X)} \qquad \sigma = \frac{4(1+\mu)(1-2\mu)}{E} \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Das Integral (VI) läßt sich ohne Schwierigkeit in folgender geschlossener Form darstellen:

$$(1)\qquad P = \frac{p'}{8}\left\{\frac{z}{a}\left(a^2 + z^2 - \frac{r^2}{z}\right)\operatorname{arctg}\frac{a}{\sqrt{u}} + \frac{r^2\sqrt{u}}{a^2+u} - \frac{2z^2}{\sqrt{u}}\right\},$$

wo nach (III) $p' = 3p/16\pi a^2$. Dabei ist nach Gleichung (V)

$$(2)\qquad u = \tfrac{1}{2}\left[r^2 + z^2 - a^2 \pm \sqrt{(r^2+z^2-a^2)^2 + 4a^2z^2}\right].$$

Die Differentiation nach z liefert jetzt nach mehreren Reduktionen unter Berücksichtigung von (V)

$$(3)\qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{p'}{2} z\left\{\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{a}{\sqrt{u}} - \frac{1}{\sqrt{u}}\right\}.$$

Die Verdichtung in einem beliebigen Punkte des Körpers außerhalb der Druckfläche ist also nach (X) gegeben durch die Gleichung

$$(4)\qquad \sigma = 2p'\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E} z\left\{\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{a}{\sqrt{u}} - \frac{1}{\sqrt{u}}\right\}.$$

In der Druckfläche selbst ist aber nach Hertz:

$$(\mathrm{XI})\qquad \sigma = -2p'\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E}\frac{\sqrt{a^2-r^2}}{a}.$$

Berücksichtigt man, daß

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0} = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{x=0} = \frac{2u}{2u + a^2 - r^2 - z^2},$$

so gibt die Berechnung des zweiten Differentialquotienten nach x von P für die Ebene $x = 0$

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)_{x=0} = \frac{p'}{4}\left\{\frac{\sqrt{u}}{a^2+u} - \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{a}{\sqrt{u}}\right.$$
$$\left. + \frac{\sqrt{u}}{2u + a^2 - r^2 - z^2}\left[\frac{r^2}{2}\frac{a^2-u}{(a^2+u)^2} + \frac{z}{u} - \frac{a^2 + z^2 - \frac{r^2}{2}}{a^2+u}\right]\right\}.$$

Hier verschwindet jedoch identisch der Ausdruck in der eckigen Klammer, folglich ist

$$(5)\qquad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)_{x=0} = \frac{p'}{4}\left\{\frac{\sqrt{u}}{a^2+u} - \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{a}{\sqrt{u}}\right\}.$$

Aus (VII) folgt ferner nach Fortlassung der Indices:

$$(6)\qquad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} = \frac{2(1+\mu)}{E}\left\{(1-2\mu)\int_z^\infty \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\,dz - z\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right\}.$$

Substituiert man diesen Wert in die erste der Gleichungen (IV), so erhält man

$$(7) \qquad X_x = 2\,z\,\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - 4\,\mu\,\frac{\partial P}{\partial z} - 2\,(1 - 2\,\mu)\int\limits_z^\infty \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\,d\,z.$$

Die Berechnung des Normaldruckes $\overline{X}_x$ im beliebigen Punkte der Ebene $x = 0$ erfordert also noch die Auswertung des Integrales

$$\int\limits_z^\infty \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)_{x=0} d\,z = \frac{p'}{4}\int\limits_z^\infty \left(\frac{\sqrt{u}}{a^2+u} - \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{a}{\sqrt{u}}\right) d\,z.$$

Durch teilweise Integration unter Benützung der Gleichung (V) findet man das unbestimmte Integral

$$8) \quad \left\{\begin{aligned} \int \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)_{x=0} d\,z &= \frac{p'}{4}\left\{\left(\frac{\sqrt{u}}{a^2+u} - \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{a}{\sqrt{u}}\right) z \right. \\ &\qquad\qquad \left. - \frac{2}{3}\,\frac{a^2}{r^2}\left(1 - \frac{r^2}{a^2+u}\right)^{3/2}\right\} \\ &= \frac{p'}{4}\left\{\left(\frac{\sqrt{u}}{a^2+u} - \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{a}{\sqrt{u}}\right) z - \frac{2}{3}\,\frac{a^2}{r^2}\left(\frac{z}{\sqrt{u}}\right)^3\right\}, \end{aligned}\right.$$

und nach Einführung der Grenzen:

$$(9) \quad \left\{\begin{aligned} \int\limits_z^\infty \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)_{x=0} d\,z &= -\frac{p'}{4}\left\{z\left(\frac{\sqrt{u}}{a^2+u} - \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{a}{\sqrt{u}}\right)\right. \\ &\qquad\qquad \left. + \frac{2}{3}\,\frac{a^2}{r^2}\left[1 - \left(\frac{z}{\sqrt{u}}\right)^3\right]\right\}. \end{aligned}\right.$$

Nach Substitution der Werte aus (3), (5) und (9) in (7) erhalten wir schließlich für die normale Druckkomponente in der $y\,z$-Ebene folgende Formel:

$$(10) \quad \left\{\begin{aligned} &\underline{\overline{X}_x = p'\left\{\frac{1-2\,\mu}{3}\,\frac{a^2}{r^2}\left[1 - \left(\frac{z}{\sqrt{u}}\right)^3\right]\right.} \\ &\qquad \underline{\left. + \frac{z}{\sqrt{u}}\left[2\,\mu + \frac{(1 \overset{-}{\cancel{+}} \mu)\,u}{a^2+u} - (1+\mu)\,\frac{\sqrt{u}}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{a}{\sqrt{u}}\right]\right\}}. \end{aligned}\right.$$

Für die dritte Druckkomponente findet man aus (IV) und (VII) die allgemeine Gleichung

$$Z_z = -2\frac{\partial P}{\partial z} + 2z\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}. \tag{XII}$$

Die Differentiation von (3) liefert aber

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}\right) = \frac{p'}{2}\left\{\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{a}{\sqrt{u}} - \frac{1}{u} + \frac{a^2}{u\sqrt{u}}\cdot\frac{z^2}{2u + a^2 - r^2 - z^2}\right\}. \tag{11}$$

Berücksichtigt man noch die wegen (V) bestehende Identität:

$$\frac{1}{2u + a^2 - r^2 - z^2} = \frac{u}{u^2 + a^2 z^2}, \tag{12}$$

so ist (außerhalb des Druckkreises):

$$\underline{Z_z = p'\left(\frac{z}{\sqrt{u}}\right)^3 \frac{a^2 u}{u^2 + a^2 z^2}}. \tag{13}$$

Die Komponente Y_y berechnen wir mit Hilfe der Relation

$$X_x + Y_y + Z_z = -4(1+\mu)\frac{\partial P}{\partial z}, \tag{14}$$

welche aus den Gleichungen (IV) und (IX) leicht zu entnehmen ist. Wir erhalten (in den Punkten der yz-Ebene):

$$\left\{\begin{aligned} \overline{Y}_y = -p'\Big\{&\frac{1-2\mu}{3}\frac{a^2}{r^2}\left[1 - \left(\frac{z}{\sqrt{u}}\right)^3\right] + \left(\frac{z}{\sqrt{u}}\right)^3 \frac{a^2 u}{u^2 + a^2 z^2} \\ &+ \frac{z}{\sqrt{u}}\left[\frac{(1-\mu)u}{a^2 +} + (1+\mu)\frac{\sqrt{u}}{a}\operatorname{arctg}\frac{a}{\sqrt{u}} - 2\right]\Big\}. \end{aligned}\right. \tag{15}$$

Von den übrigen drei Tangentialkomponenten ist infolge der Symmetrie bezüglich der z-Achse nur eine und zwar Y_z notwendig, um den Spannungszustand vollständig zu beschreiben. Man findet ohne Schwierigkeit

$$Y_z = 2z\frac{\partial^2 P}{\partial y\,\partial z} = p'\frac{y z^2}{u^2 + a^2 z^2}\cdot\frac{a^2\sqrt{u}}{a^2 + u},$$

oder, da in der yz-Ebene $y = r$

$$\underline{\overline{Y}_z = p'\frac{r z^2}{u^2 + a^2 z^2}\frac{a^2\sqrt{u}}{a^2 + u}}. \tag{16}$$

Die gefundenen allgemeinen Formeln (10), (13) und (15) sollen für $r = 0$, $z = 0$ mit den von Hertz berechneten

Werten (III) übereinstimmen. Man findet in der Tat zuerst für $r = 0$:

$$\underset{r=0}{u} = z^2, \quad \left\{\frac{1}{r^2}\left[1 - \left(\frac{z}{\sqrt{u}}\right)^3\right]\right\}_{r=0} = \frac{3}{2}\frac{1}{a^2 + z^2},$$

$$(17) \begin{cases} (X_x)_{r=0} = (Y_y)_{r=0} = p'\left\{(1+\mu)\left[1 - \frac{z}{a}\operatorname{arctg}\frac{a}{z}\right] - \frac{1}{2}\frac{a^2}{a^2+z^2}\right\}, \\ (Z_z)_{r=0} = p'\frac{a^2}{a^2+z^2}, \end{cases}$$

und dann für $z = 0$

$$X_x^{(0)} = Y_y^{(0)} = (\tfrac{1}{2} + \mu)p', \quad Z_z^{(0)} = p'.$$

Außerdem verschwinden alle vier Druckkomponenten, wie es die Hertzsche Theorie verlangt, für die unendlichen Werte der Koordinaten, was in Verbindung mit letzteren Resultaten als eine willkommene Prüfung der neuen Formeln betrachtet werden kann.

Da in der Druckfläche (im Sinne der Hertzschen Lösung) $z = 0$ und $u = 0$ zu setzen ist, so nimmt in allgemeinen Formeln für $\overline{X}_x$, $\overline{Y}_y$ und $\overline{Z}_z$ der Ausdruck $z/\sqrt{u}$ die Form $\frac{0}{0}$ an. Man findet aber auf bekannte Weise seinen wahren Wert:

$$\left(\frac{z}{\sqrt{u}}\right)_{\substack{z=0\\u=0}} = \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{a};$$

folglich gelten für die Hauptdrücke in der Druckfläche folgende Formeln:

$$(18a) \quad \overline{X}_x = p'\left\{\frac{1-2\mu}{3}\frac{a^2}{r^2}\left[1 - \left(\frac{1}{a}\sqrt{a^2 - r^2}\right)^3\right] + \frac{2\mu}{a}\sqrt{a^2 - r^2}\right\},$$

$$(18b) \quad \overline{Y}_y = -p'\left\{\frac{1-2\mu}{3}\frac{a^2}{r^2}\left[1 - \left(\frac{1}{a}\sqrt{a^2 - r^2}\right)^3\right] - \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - r^2}\right\},$$

$$(18c) \quad \overline{Z}_z = p'\frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{a}.$$

Die letztere Gleichung ist, wie oben erwähnt, bereits von Hertz angegeben worden.

Man überzeugt sich leicht, daß die durch die Formeln (18) ausgedrückten Hauptdrücke in der Ebene $z = 0$ für $r = 0$ die oben angeführten Werte $X_x^{(0)}$, $Y_y^{(0)}$, $Z_z^{(0)}$ annehmen.

Bei der Anwendung der gefundenen Resultate muß man darauf achten, daß die Hertzsche allgemeine Lösung, von welcher das Obige abgeleitet wurde, streng genommen nur für einen unendlich kleinen, die Druckstelle umgebenden Teil eines Körpers gilt. Innerhalb dieses Teiles verschwindet also in der Oberfläche des Körpers z gegen r und wir erhalten aus (10) und (15) folgende einfache Formeln für die Hauptdrucke in der Oberfläche außerhalb des Druckkreises:

$$\overline{X}_x = p' \frac{1-2\mu}{3} \frac{a^2}{r^2}, \tag{19a}$$

$$\overline{Y}_y = -p' \frac{1-2\mu}{3} \frac{a^2}{r^2}. \tag{19b}$$

Diese Drucke erreichen ihre größten Werte (absolut genommen)

$$\overline{X}_x = \frac{1-2\mu}{3} p', \tag{20a}$$

$$\overline{Y}_y = -\frac{1-2\mu}{3} p' \tag{20b}$$

für $r = a$, d. h. am Rande der Druckfläche. Die nähere Betrachtung der allgemeinen Formeln lehrt weiter, daß der letztere Wert von $\overline{Y}_y$ den größten Zug bestimmt, welcher überhaupt im ganzen Körper vorkommt. Beim spröden Material scheinen also hier die Bedingungen für das Zustandekommen eines Sprunges bei einem gewissen Werte des Gesamtdruckes p aufzutreten. Diese Vermutung hat bereits Hertz in der l. c. zitierten Arbeit ausgesprochen und fand sie später durch einige Versuche mit Glas bestätigt.[1]) Dagegen hatte der Sprung bei zahlreichen Auerbachschen Experimenten in einer kleinen, aber meßbaren Entfernung vom Rande des Druckkreises und außerhalb desselben stattgefunden.

Wenn die Druckfläche nicht mehr als verschwindend klein gegen die Oberfläche der Kugel angesehen werden kann, so liefert die Hertzsche Lösung und somit unsere Formeln (18), (19), (20) nur eine Annäherung, die um so größer wird, je kleiner in der Oberfläche z im Vergleich zu r ist. Man gewinnt offenbar eine Vorstellung von der Größe des durch Benützung der Gleichung (20) begangenen Fehlers, wenn man die

1) In der zweiten Abhandlung behauptet er aber an einem Orte (Werke, p. 185 u. 186), zwar ohne die bezüglichen Rechnungen anzuführen, daß die radiale Zugspannung „in der Nähe der Grenze“ der (elliptischen) Druckfläche ihr Maximum erreicht.

allgemeinen Formeln für $\overline{X}_x$ und $\overline{Y}_y$ in Potenzreihen nach z/a entwickelt und nur das Glied von niedrigster Ordnung beibehält. Es ist dann (für $r = 0$)

$$
(21) \qquad \left\{ \begin{aligned} \overline{X}_x &= p'\left[\frac{1-2\mu}{3} + 2\mu\sqrt{\frac{z}{a}} - \ldots\right], \\ \overline{Y}_y &= -p'\left[\frac{1-2\mu}{3} - 2\sqrt{\frac{z}{a}} + \ldots\right]. \end{aligned} \right.
$$

Wir sehen, daß bereits für $z/a \geqq 1/_{1000}$ von keiner Annäherung mehr die Rede sein kann und daß die Krümmung der Körperoberfläche eine starke Verminderung der nach der Hertzschen Theorie berechneten Zugspannungen am Rande der Druckfläche zur Folge hat, sobald das Verhältnis a/R (Radius der Druckfläche zum Kugelradius) etwa $1/_{500}$ übersteigt. Das findet aber fast immer statt, wenn durch Drucksteigerung die Elastizitätsgrenze der sich berührenden Kugel überschritten werden soll; folglich wird im Falle der Kugeln (insbesondere einer Kugel und einer Platte) aus demselben spröden Material der Sprung bei wachsendem Druck zuerst an der größeren Kugel (bez. an der Platte) zustande kommen müssen, angenommen, was in diesem Falle durchaus plausibel erscheint, daß nur die absolute Größe der Zugspannung für das Auftreten eines Sprunges maßgebend ist. Dadurch erklärt sich auf einfachste Weise die vom Prof. Auerbach bemerkte Tatsache, daß beim Zusammendrücken von Kugel und Platte der Sprung stets in der letzteren auftrat. Zugleich bringen obige Betrachtungen den theoretischen Beweis, daß die Hertzsche Definition des absoluten Maßes der Härte (in der allgemeinen am Anfang angeführten Fassung) für spröde Körper unhaltbar ist. Denn es sind offenbar aus Versuchen mit Kugel und Platte andere Werte der Hertzschen Härte zu erwarten, als z. B. aus denjenigen mit zwei gleichen Kugeln; obwohl in beiden Fällen kreisförmige Druckflächen entstehen müssen.

In der ganzen Oberfläche der ebenen Platte ist tatsächlich $z = 0$, mithin werden auch die in der Oberflächenschichte auftretenden Spannungen bei jeder beliebigen Größe des Druckkreises genau den Formeln (10), (13), (15), (18), (19), (20) folgen, solange wenigstens die Abhängigkeit des Radius a des Druckkreises vom Gesamtdrucke p der Gleichung (I) gehorcht. Drückt man daher mehrere Kugeln von verschiedenem Radius R an die Platte von gleichem Material, bis der Normaldruck im Mittelpunkte des Druckkreises dieselbe Größe

$$p' = \frac{3}{2}\frac{p}{\pi a^2} = \frac{1}{\pi}\frac{E}{1-\mu^2}\cdot\frac{a}{R}$$

erreicht, so werden in der Platte unter allen Kugeln räumlich ähnliche und in entsprechenden Punkten quantitativ identische Spannungszustände hervorgerufen. Wenn also, wie Hertz annahm, die Festigkeit eine reine Eigenschaft des Materiales wäre, so müßte der Sprung in der Platte für jeden Kugelradius bei demselben p' (daher demselben a/R) auftreten und zwar am Rande des Druckkreises, wo die größte Zugspannung herrscht. Da aber die Auerbachschen Versuche diese Schlüsse nicht bestätigen und vor allem eine Abhängigkeit der Grenzspannung (bei welcher der Sprung eintritt) vom Kugelradius nachweisen, so liefern sie gleichzeitig auf Grund des Vorhergehenden noch einen experimentellen Beweis mehr für die Richtigkeit der namentlich von Prof. W. Voigt vertretenen Ansicht[1]), daß die Erscheinungen der Festigkeit nicht durch die dem Material individuellen Konstanten allein darstellbar seien. Ohne Zweifel hat man hier mit Erscheinungen der „Oberflächenfestigkeit" zu tun, da z. B. für $R = 1$ mm und $a = \frac{1}{11}R$ (der Grenzwert aus Auerbachschen Versuchen) die Dicke der gezogenen Schichte am Rande des Druckkreises weniger als 0,001 mm beträgt. Ungefähr bei dieser Größe von z (für $r = a$) wechselt nämlich der Wert von $\overline{Y}_y$ sein Vorzeichen, wie aus der Formel (15), oder bequemer aus der angenäherten Formel (21) ersichtlich ist.

Krakau, Februar 1904.

1) W. Voigt, Ann. d. Phys. 4. p. 567—591. 1901.

(Eingegangen 15. März 1904.)