SULL'EQUILIBRIO DELLE SUPERFICIE

FLESSIBILI E INESTENDIBILI;

Nota di **G. Pennacchietti**, in Catania.

Adunanza del 23 dicembre 1894.

Dopo la classica memoria del Beltrami *Sull'equilibrio delle superficie flessibili e inestendibili* (*) si pubblicarono pregevolissimi lavori sullo stesso soggetto (**), intorno al quale mi limito a fare in questa breve Nota qualche osservazione sul modo di dedurre le equazioni differenziali, indicando in ultimo un nuovo notevole caso di equilibrio.

I. Sopra una superficie, che supponiamo perfettamente flessibile e inestendibile, sia tracciato un sistema di coordinate curvilinee u, v e sieno x, y, z le coordinate di un punto M della superficie rispetto

(*) Mem. R. Accad. delle Scienze di Bologna, serie IV, t. III, anno 1881, pag. 217-265.

(**) G. Morera, Rend. Accad. Lincei, 1883.

V. Volterra, ivi, 1884, note due.

G. A. Maggi, Rend. Ist. Lomb. serie II, vol. XVII, 1884.

E. Padova, Rend. Accad. Lincei 1885.

G. Picciati, Sull'equilibrio e sul moto infinitesimo delle superficie flessibili ed inestendibili. (Giorn. di Matem. del prof. G. Battaglini, 1892).

a un sistema di tre assi ortogonali fissi nello spazio. Consideriamo il parallelogramma elementare $d\sigma$, di cui sieno ds_u , ds_v i lati uscenti dal punto M e nei quali varino la sola u e la sola v rispettivamente. Poniamo :

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v},$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$

Se X , Y , Z sono le componenti di una forza secondo gli assi e U , V , W le componenti della forza stessa secondo le linee coordinate u , v e secondo la normale alla superficie e se questa normale forma cogli assi angoli i cui coseni sono α , β , γ , si ha :

$$X = U \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u} + V \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v} + \alpha W,$$

$$Y = U \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial y}{\partial u} + V \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial y}{\partial v} + \beta W,$$

$$Z = U \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial z}{\partial u} + V \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial z}{\partial v} + \gamma W.$$

Sui lati ds_u , ds_v del parallelogramma si esercitano dalla rimanente superficie tensioni dirette nel piano tangente e le cui componenti denoteremo con $-T_{uu}$, $-T_{vu}$ secondo le linee coordinate u e con $-T_{uv}$, $-T_{vv}$ secondo le linee v . In virtù delle ultime tre equazioni le componenti, secondo l'asse delle x , delle tensioni che si esercitano sui lati ds_u , ds_v del parallelogramma, sono rispettivamente :

$$-\left(T_{uu} \frac{\partial x}{\partial u} + T_{uv} \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial v}\right) du,$$

$$-\left(T_{vu} \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial u} + T_{vv} \frac{\partial x}{\partial v}\right) dv.$$

Le componenti analoghe pei rimanenti due lati, opposti rispettivamente a ds_u , ds_v , sono:

$$\left(T_{uu} \frac{\partial x}{\partial u} + T_{uv} \sqrt{\frac{E}{G}} \frac{\partial x}{\partial v}\right) du + \frac{\partial}{\partial v} \left(T_{uu} \frac{\partial x}{\partial u} + T_{uv} \sqrt{\frac{E}{G}} \frac{\partial x}{\partial v}\right) du dv,$$

$$\left(T_{uv} \sqrt{\frac{G}{E}} \frac{\partial x}{\partial u} + T_{vv} \frac{\partial x}{\partial v}\right) dv + \frac{\partial}{\partial u} \left(T_{uv} \sqrt{\frac{G}{E}} \frac{\partial x}{\partial u} + T_{vv} \frac{\partial x}{\partial v}\right) du dv.$$

Analoghe sono le componenti delle stesse tensioni rispetto agli altri due assi. Tutte queste tensioni fanno equilibrio alla forza esterna che si esercita sull'elemento $d\sigma$ e le cui componenti diremo $X d\sigma$, $Y d\sigma$, $Z d\sigma$. Esprimendo che sono nulle le somme delle componenti di queste tensioni e della forza esterna, secondo gli assi, dividendo per $du dv$ e ponendo $H = \sqrt{EG - F^2}$, si ha:

$$\begin{aligned} HX = & \frac{\partial}{\partial u} \left(-T_{vu} \sqrt{\frac{G}{E}} \frac{\partial x}{\partial u} - T_{vv} \frac{\partial x}{\partial v} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial v} \left(-T_{uu} \frac{\partial x}{\partial u} - T_{uv} \sqrt{\frac{E}{G}} \frac{\partial x}{\partial v} \right) \end{aligned}$$

con due equazioni analoghe.

Si può immaginare che pel centro del parallelogramma $d\sigma$ passino le direzioni della forza esterna e delle componenti, secondo le linee coordinate, delle tensioni sui lati del parallelogramma, sicchè esprimendo che è nulla la somma algebrica dei momenti, rispetto al centro del parallelogramma, della forza esterna e delle tensioni per le quali è in equilibrio il parallelogramma stesso, si trova la relazione:

$$T_{uu} = T_{vv}.$$

Ponendo

$$\lambda = -T_{vu} \sqrt{\frac{G}{E}}, \quad \mu = -T_{uu} = -T_{vv}, \quad \nu = -T_{uv} \sqrt{\frac{E}{G}},$$

si ottengono così le equazioni indefinite dell'equilibrio :

$$\left. \begin{aligned} HX &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\lambda \frac{\partial x}{\partial u} + \mu \frac{\partial x}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\mu \frac{\partial x}{\partial u} + \nu \frac{\partial x}{\partial v} \right), \\ HY &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\lambda \frac{\partial y}{\partial u} + \mu \frac{\partial y}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\mu \frac{\partial y}{\partial u} + \nu \frac{\partial y}{\partial v} \right), \\ HZ &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\lambda \frac{\partial z}{\partial u} + \mu \frac{\partial z}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\mu \frac{\partial z}{\partial u} + \nu \frac{\partial z}{\partial v} \right), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

le quali sono conformi alle equazioni del Beltrami.

Se X, ds , Y, ds , Z, ds sono le componenti, secondo gli assi, della forza che agisce sopra un elemento ds del contorno, si dovrà avere, per l'equilibrio, anche la condizione :

$$\int X, ds + \int_{\sigma} X d\sigma = 0.$$

Se per X si sostituisce il suo valore fornito dalla prima delle (1) e se si osserva che si ha :

$$\int_{\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{1}{H} d\sigma = \int \varphi \frac{dv}{ds} ds,$$

$$\int_{\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{1}{H} d\sigma = - \int \varphi \frac{du}{ds} ds,$$

si deduce :

$$\int \left[\left(\lambda \frac{\partial x}{\partial u} + \mu \frac{\partial x}{\partial v} \right) \frac{dv}{ds} - \left(\mu \frac{\partial x}{\partial u} + \nu \frac{\partial x}{\partial v} \right) \frac{du}{ds} + X, \right] ds = 0.$$

Osservando che quest'equazione e le due analoghe che si potrebbero egualmente dedurre, sono verificate per qualsiasi contorno,

anche piccolissimo, si ottengono le tre equazioni ai limiti :

$$\left. \begin{aligned} X_s &= - \left(\lambda \frac{\partial x}{\partial u} + \mu \frac{\partial x}{\partial v} \right) \frac{dv}{ds} + \left(\mu \frac{\partial x}{\partial u} + \nu \frac{\partial x}{\partial v} \right) \frac{du}{ds}, \\ Y_s &= - \left(\lambda \frac{\partial y}{\partial u} + \mu \frac{\partial y}{\partial v} \right) \frac{dv}{ds} + \left(\mu \frac{\partial y}{\partial u} + \nu \frac{\partial y}{\partial v} \right) \frac{du}{ds}, \\ Z_s &= - \left(\lambda \frac{\partial z}{\partial u} + \mu \frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{dv}{ds} + \left(\mu \frac{\partial z}{\partial u} + \nu \frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{du}{ds}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Se le (1) si moltiplicano ordinatamente dapprima per $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$, poi per $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, infine per i coseni α , β , γ degli angoli che la normale alla superficie forma cogli assi e se ciascuna volta si sommano i risultati e si pone :

$$Q_1 = X \frac{\partial x}{\partial u} + Y \frac{\partial y}{\partial u} + Z \frac{\partial z}{\partial u}, \quad Q_2 = X \frac{\partial x}{\partial v} + Y \frac{\partial y}{\partial v} + Z \frac{\partial z}{\partial v},$$

si avranno le equazioni indefinite dell'equilibrio nella forma :

$$\begin{aligned} H Q_1 &= \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u} \lambda + \frac{\partial E}{\partial v} \mu + \left(\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} \right) \nu + \\ &\quad + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial u} + \frac{\partial \mu}{\partial v} \right) E + \left(\frac{\partial \mu}{\partial u} + \frac{\partial \nu}{\partial v} \right) F, \\ H Q_2 &= - \left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} \right) \lambda + \frac{\partial G}{\partial u} \mu + \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial v} \nu + \\ &\quad + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial u} + \frac{\partial \mu}{\partial v} \right) F + \left(\frac{\partial \mu}{\partial u} + \frac{\partial \nu}{\partial v} \right) G, \\ H(X\alpha + Y\beta + Z\gamma) &= A\lambda + 2B\mu + C\nu, \end{aligned}$$

dove si è posto per brevità :

$$A = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \alpha + \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} \beta + \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \gamma,$$

$$B = \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \alpha + \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} \beta + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \gamma,$$

$$C = \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \alpha + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} \beta + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \gamma.$$

Se U , V , W sono le componenti della forza X , Y , Z secondo le linee coordinate u , v e secondo la normale alla superficie, si ha :

$$U = \frac{\sqrt{E}}{H^2} (G Q_1 - F Q_2), \quad V = \frac{\sqrt{G}}{H^2} (-F Q_1 + E Q_2),$$

$$W = X\alpha + Y\beta + Z\gamma.$$

Le equazioni indefinite dell'equilibrio divengono perciò :

$$\left. \begin{aligned} HU &= \sqrt{E} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial u} + \frac{\partial \mu}{\partial v} + E_1 \lambda + 2 F_1 \mu + G_1 \nu \right), \\ HV &= \sqrt{G} \left(\frac{\partial \mu}{\partial u} + \frac{\partial \nu}{\partial v} + E_2 \lambda + 2 F_2 \mu + G_2 \nu \right), \\ HW &= A \lambda + 2 B \mu + C \nu, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

dove :

$$E_1 = \frac{1}{H^2} \left[\frac{1}{2} G \frac{\partial E}{\partial u} - F \left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} \right) \right],$$

$$F_1 = \frac{1}{2 H^2} \left(G \frac{\partial E}{\partial v} - F \frac{\partial G}{\partial u} \right),$$

$$G_1 = \frac{1}{H^2} \left[G \left(\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} \right) - \frac{1}{2} F \frac{\partial G}{\partial v} \right],$$

$$E_2 = \frac{1}{H^2} \left[-\frac{1}{2} F \frac{\partial E}{\partial u} + E \left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} \right) \right],$$

$$F_2 = \frac{1}{2 H^2} \left(-F \frac{\partial E}{\partial v} + E \frac{\partial G}{\partial u} \right),$$

$$G_2 = \frac{1}{H^2} \left[-F \left(\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} \right) + \frac{1}{2} E \frac{\partial G}{\partial v} \right],$$

come si dedurrebbe anche dalla memoria del Beltrami.

Si riconosce poi immediatamente che le prime due equazioni indefinite dell'equilibrio in coordinate curvilinee si deducono dalle note equazioni differenziali:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial u'} - \frac{\partial T}{\partial u} = Q_1, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial v'} - \frac{\partial T}{\partial v} = Q_2$$

del moto di un punto di massa eguale all'unità sopra la superficie data e sotto l'azione delle forze date X, Y, Z , col solo cambiare in queste ultime equazioni:

$$u'^2, \quad u'v', \quad v'^2, \quad u'', \quad v''$$

rispettivamente in

$$\frac{1}{H} \lambda, \quad \frac{1}{H} \mu, \quad \frac{1}{H} \nu, \quad \frac{1}{H} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial u} + \frac{\partial \mu}{\partial v} \right), \quad \frac{1}{H} \left(\frac{\partial \mu}{\partial u} + \frac{\partial \nu}{\partial v} \right).$$

Similmente moltiplichiamo le equazioni (2) rispettivamente per $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}$ e sommiamo; operiamo nello stesso modo coi moltiplicatori $\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}$ e coi moltiplicatori α, β, γ : poniamo:

$$Q'_1 = X \frac{\partial x}{\partial u} + Y \frac{\partial y}{\partial u} + Z \frac{\partial z}{\partial u}, \quad Q'_2 = X \frac{\partial x}{\partial v} + Y \frac{\partial y}{\partial v} + Z \frac{\partial z}{\partial v}$$

e osserviamo che si ha identicamente :

$$\frac{\partial x}{\partial u}\alpha + \frac{\partial y}{\partial u}\beta + \frac{\partial z}{\partial u}\gamma = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial v}\alpha + \frac{\partial y}{\partial v}\beta + \frac{\partial z}{\partial v}\gamma = 0;$$

si avranno le equazioni ai limiti nella forma :

$$Q'_1 = E\left(-\lambda \frac{dv}{ds} + \mu \frac{du}{ds}\right) + F\left(-\mu \frac{dv}{ds} + \nu \frac{du}{ds}\right),$$

$$Q'_2 = F\left(-\lambda \frac{dv}{ds} + \mu \frac{du}{ds}\right) + G\left(-\mu \frac{dv}{ds} + \nu \frac{du}{ds}\right),$$

$$X_s\alpha + Y_s\beta + Z_s\gamma = 0.$$

Se la forza X_s, Y_s, Z_s si risolve in tre componenti U_s, V_s, W_s secondo le linee coordinate u, v e secondo la normale alla superficie, si ha :

$$U_s = \frac{\sqrt{E}}{H^2}(G Q'_1 - F Q'_2), \quad V_s = \frac{\sqrt{G}}{H^2}(-F Q'_1 + E Q'_2),$$

$$W_s = X_s\alpha + Y_s\beta + Z_s\gamma.$$

Le equazioni ai limiti assumono così quest'altra forma data pure dal Beltrami.

$$U_s = \sqrt{E}\left(-\lambda \frac{dv}{ds} + \mu \frac{du}{ds}\right), \quad V_s = \sqrt{G}\left(-\mu \frac{dv}{ds} + \nu \frac{du}{ds}\right), \quad (4)$$

$$W_s = 0.$$

II. Ai casi notevoli di equilibrio dati dal Beltrami aggiungerò il seguente, il quale vale pure per una superficie qualunque e può essere direttamente verificato mediante le formule che precedono. S'immagini, com'è sempre possibile, sopra la superficie data un si-

stema di coordinate curvilinee isoterme e il quadrato dell'elemento lineare sia dato da :

$$ds^2 = E(du^2 + dv^2).$$

La superficie stessa sarà in equilibrio sotto l'azione :

1° delle forze

$$U = \frac{k}{r_u}, \quad V = \frac{k}{r_v},$$

$$W = \frac{1}{E}(A\lambda + 2B\mu + C\nu),$$

dove k è una costante qualunque, $\frac{1}{r_u}$, $\frac{1}{r_v}$ sono le curvature tangenziali o geodetiche delle linee coordinate u , v , cioè :

$$\frac{1}{r_u} = \frac{1}{E} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}, \quad \frac{1}{r_v} = \frac{1}{E} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial u}$$

e dove, indicando con b_1 , b_2 , k_1 nuove costanti qualunque, si ha :

$$\lambda = \frac{b_1}{E} + k_1, \quad \mu = \frac{b_2}{E} + \frac{k}{2}, \quad \nu = -\frac{b_1}{E} + k_1;$$

2° di forze al contorno determinate dalle formule generali (I, 4) e da quest'ultimi valori di λ , μ , ν .

Catania, 29 novembre 1894.

G. PENNACCHIETTI.