II. *Die thermischen, optischen und krystallographischen Axen des Krystallsystems des Gypses;*

von F. E. Neumann in Königsberg.

[Inhalt: §. 1. Allgemeine Resultate von theoretischen Untersuchungen über das Verhältniß der thermischen, optischen und krystallographischen Axen. — §. 2. Beschreibung der bis jetzt beobachteten Krystallflächen des Gypssystems. — §. 3. Neue Messungen des Gypssystems und Discussionen der Messungen von Phillips. — §. 4. Verfahren, die thermischen Axen in zwei- und eingliedrigen Systemen zu finden. — §. 5. Anwendung desselben auf das Gypssystem. — §. 6. Allgemeiner Ausdruck der linearen Ausdehnungen in den verschiedenen Richtungen eines zwei- und eingliedrigen Systems. Die linearen Ausdehnungen in den thermischen Axen des Gypssystems. — §. 7. Die thermischen und optischen Axen fallen im Gypssystem innerhalb der Beobachtungsfehler zusammen. — §. 8. Die Flächen dieses Systems haben eine einfache Beziehung zu den krystallographischen Axen.]

§. 1.

Wenn man die Erscheinungen, welche der Quarz in Hinsicht der doppelten Strahlenbrechung darbietet, und die noch nicht auf eine mechanische Theorie zurückgeführt sind, ausnimmt, so würden sich nach Fresnel's Theorie der doppelten Strahlenbrechung die übrigen bekannten Erscheinungen derselben vollständig aus der Homogenität, Unterschiedlosigkeit der Masse an den verschiedenen Stellen derselben erklären lassen, ohne in Beziehung auf die Verschiedenheit der Cohäsions-Verhältnisse eines Theilchen der Masse zu seinen umgebenden irgend eine Voraussetzung zu machen; das Gesetz ihrer Verschiedenheiten nach den verschiedenen Richtungen könnte nach jener Theorie jedes beliebige seyn, und unter-

terläge keiner von einem allgemeinen Begriff der krystallinischen Structur abhängigen, engeren Begränzung. Wie auch das Gesetz jener Cohäsionsverschiedenheiten eines Punktes zu seinen umgebenden beschaffen sey, immer lassen sich durch ihn die drei auf einander rechtwinkligen *Elasticitätsaxen* Fresnel's legen, welche an jeder Stelle, wegen der Unterschiedslosigkeit der Masse an den verschiedenen Stellen; mit einander parallel sind, und auf welche die von Fresnel entdeckten Gesetze der doppelten Strahlenbrechung sich beziehen; sie sind die Axen seiner Elasticitätsfläche, sie sind die Axen der Wellenfläche und die des Ellipsoïdes, wodurch die Geschwindigkeit der Lichtstrahlen in den verschiedenen Richtungen construirt wird.

Abstrahirt man von dem theoretischen Ursprung dieser Axen, so kann man ihre empirisch-allgemeinste, optische Eigenschaft so aussprechen, dafs die Geschwindigkeit eines Lichtstrahls im Innern des krystallinischen Mediums eine solche Function der Winkel φ , φ' , φ'' , die er mit jenen Axen bildet, ist, die nicht verändert wird, wenn diese Winkel sich in $180 \pm \varphi$, $180 \pm \varphi'$, $180 \pm \varphi''$ verwandeln, so dafs es im Allgemeinen immer vier sich entsprechende Richtungen giebt, in welchen die Strahlen sich mit derselben Geschwindigkeit bewegen; liegt der Strahl in einer der durch zwei der Axen gelegten Ebenen, so giebt es nur zwei solcher sich entsprechenden Richtungen. Setzen wir nun diese Eigenschaft als die Definition der rechtwinkligen, optischen Axen fest. Das wirkliche Vorhandenseyn derselben in dem krystallinischen Medium kann man als ein Resultat der Erfahrung ansehen; nirgends ist bis jetzt eine Abweichung von dieser optischen Symmetrie beobachtet.

Wenn man von denselben Grundprincipien ausgehet als Fresnel, — nämlich, dafs die elastischen Kräfte, durch welche die Lichtundulationen in dem krystallinischen Medium sich fortpflanzen, resultiren aus den anziehen-

den und abstofsenden Kräften, mit welchen auf ein Theilchen von den ihn zunächst umgebenden Theilchen gewirkt wird, und zwar in den einzelnen Richtungen proportional der Veränderung der ursprünglichen Entfernung — und mit einer strengeren Analyse die Folgerungen untersucht, die sich aus diesen Grundprincipien ergeben, so findet man keinesweges das Vorhandenseyn der drei rechtwinkligen, optischen Axen als eine allgemeine Folge der Unterschiedslosigkeit der Masse an den verschiedenen Stellen, wie Fresnel, unabhängig von dem Gesetze, durch welches die Wirkung zweier zunächstliegenden Theilchen nach den verschiedenen Richtungen ihrer Entfernung bestimmt wird; man findet im Gegentheil, dafs dieses Gesetz, weit entfernt irgend ein beliebiges seyn zu können, gewissen Beschränkungen unterworfen ist, wenn in dem System der Geschwindigkeiten der Lichtwellen oder Lichtstrahlen jene Symmetrie in Beziehung auf ein rechtwinkliges, optisches Axensystem stattfinden soll. Zufolge dieser Beschränkungen, innerhalb welcher das Gesetz der Wirkung irgend zweier Theilchen in den verschiedenen Richtungen ihrer Entfernung sich befinden mufs, ist das System von Kräften, welches um irgend einen Punkt sich entwickelt, durch die Verschiebungen der Theilchen der Masse dasselbe, welches entsteht, wenn die Masse in Hinsicht ihrer Cohäsionsverhältnisse in jedem Punkt durch jede von drei auf einander rechtwinkligen Ebenen in gleiche und symmetrische Hälften getheilt werden kann. Die Annahme also, welche ich in meiner Abhandlung über die doppelte Strahlenbrechung (Poggendorff's Ann. d. Physik, Bd. XXV) zu Grunde gelegt habe, nämlich die der symmetrischen Theilbarkeit des Mediums in jedem Punkte durch drei rechtwinklige Ebenen, ist demnach die nothwendige und allgemeinste Annahme für alle krystallinische Medien, welche drei rechtwinklige optische Axen haben. Für den optischen Begriff eines krystallinischen Mediums ergibt

sich aber hieraus *die* wichtige Folge, daß die mechanische Structur der Masse, bezogen auf irgend ein Theilchen, nicht irgend eine beliebige seyn kann, daß vielmehr in dem dem Medium inhärirenden System von Cohäsionskräften schon eine ganz bestimmte Beziehung zu drei auf einander rechtwinklichen Axen vorhanden ist, welche Beziehung für den optischen Effect, immer die Undulationstheorie des Lichtes vorausgesetzt, dieselbe ist, als würde das dem krystallinischen Medium inhärirende System von Cohäsionskräften durch jede von drei rechtwinklichen Ebenen in gleiche und symmetrische Theile getheilt. Man kann die Durchschnittslinie dieser Ebene die *Cohäsionsaxen* nennen.

Das Vorhandenseyn dieser drei auf einander rechtwinkligen Cohäsionsaxen in jedem krystallinischen Medium muß also als eine nothwendige Bedingung angesehen werden, überall wo die Erfahrung drei auf einander rechtwinklige optische Axen als vorhanden nachgewiesen hat; und beiderlei Axensysteme fallen zusammen.

Wie auch die mechanische Structur eines homogenen Mediums beschaffen sey, wenn es von allen Seiten einen gleichen, gegen seine Oberfläche senkrechten Druck unterworfen wird, so verändert sich die relative Lage der Theilchen so, daß diejenigen, welche ursprünglich auf der Oberfläche einer Kugel sich befanden, nun, unter der Wirkung des Drucks, sich auf der Oberfläche eines Ellipsoïdes befinden. Die drei Axen dieses Ellipsoïdes kann man die *Hauptdruckaxen* nennen. Die Lage und das respective Verhältniß der Hauptdruckaxen ist allein abhängig von dem System von Cohäsionskräften um jeden Punkt des Mediums. Wenn man annimmt, und es ist die einfachste Annahme, die sich darbietet, und eine durch die bekannten Lichtphänomene des comprimirtten Glases, und durch die Untersuchungen von Savart über die Schwingungen krystallinischer Scheiben sehr unterstützte Annahme, daß das System von Elasti-

citätskräften, welches in den Schallschwingungen wirksam ist, aus einem, dem Medium inhärirenden Cohäsionssystem hervorgeht, welches dasselbe Gesetz der Verschiedenheit nach den verschiedenen Richtungen befolgt, als dasjenige, aus welchem das System von Elasticitätskräften hervorgeht, welches in den Lichtschwingungen die Bewegungen fortpflanzt, so ergiebt sich strenge, daß in allen den krystallinischen Medien, welche drei auf einander rechtwinklige optische Axen haben, die Hauptdruckaxen zusammenfallen mit diesen optischen Axen.

Die Lage und das relative Verhältniß der Hauptdruckaxen bleibt unverändert, sey es, daß das begränzte Medium einen überall gleichen, gegen seine Oberfläche senkrechten Druck, oder einer solchen Spannung unterworfen wird. *Die Wirkung der Wärme auf dasselbe begränzte Medium bei vermehrter Temperatur desselben kann man sich als eine überall gleiche, gegen die Oberfläche des Mediums senkrecht wirkende Spannung vorstellen.* Die Repulsivkräfte des Zuwachses von Wärme, welche die Vergrößerung des Volumens hervorgebracht haben, heben sich in der That im Inneren des Mediums in jedem Punkte auf, nur die Theilchen des Mediums an der Oberfläche erleiden einen von Innen nach Aufsen gehenden Druck, dem sie nachgegeben haben; zugleich haben sie die ihnen zunächst liegenden Theilchen mitgenommen, welche wiederum die ihnen folgenden nach sich gezogen haben. Es ist also allein die Spannung an der Oberfläche, wodurch das Volumen mit steigender Temperatur vergrößert wird. Durch Veränderung der Temperatur wird also die relative Lage der Theilchen auf dieselbe Weise verändert werden, wie durch einen auf die Oberfläche senkrechten, überall gleichen Druck; die Theilchen, welche ursprünglich auf der Oberfläche einer Kugel liegen, befinden sich nach der Temperaturveränderung auf der Oberfläche des Ellipsoides. Die Axen

des Ellipsoïdes können die *thermischen Axen* genannt werden. Unabhängig von dieser mechanischen Betrachtung läßt sich beweisen, daß, welche Vorstellung man sich auch von der Wirkung machen möge, wenn diese nur von der Art ist, daß alle Theile, welche ursprünglich in einer geraden Linie liegen, auch nach der Temperaturveränderung in einer solchen liegen, d. h. wenn sie nur keine Krümmung hervorbringt, welcher Bedingung sie in der That der Erfahrung zufolge entspricht, die relative Lage der Theile immer durch eine Temperaturveränderung so verändert ist, daß die ursprünglich auf einer Kugelfläche liegenden Theile nun auf der Oberfläche eines Ellipsoïdes sich befinden. Die Definition der thermischen Axen ist also gewissermaßen unabhängig von unserer mechanischen Vorstellung der Wirkung der Wärme, aber ohne sie ist man nicht im Stande die Frage a priori zu entscheiden, ob die Richtung der Axen des thermischen Ellipsoïdes immer dieselbe sey, wie groß oder klein auch die Temperaturveränderung sey. Aus jener mechanischen Betrachtung ist diese Beständigkeit der Richtung der Axen des Ellipsoïdes eine nothwendige Folge; sie führt außerdem auf den strengen Schluß, *daß die thermischen Axen immer dieselben als die Hauptdruckaxen seyn müssen.*

Nun ist gezeigt, daß in den krystallinischen Medien mit drei rechtwinklich optischen Axen die Hauptdruckaxen unter der Voraussetzung einer sehr wahrscheinlichen Annahme über die Cohäsionskräfte zusammenfallen mit den optischen Axen. Aus derselben Voraussetzung, daß nämlich die in den Licht- und Schallschwingungen erregten Elasticitätskräfte hervorgehen aus Systemen von Cohäsionskräften, welche dasselbe Gesetz der Richtung befolgen, folgt also, daß auch die *thermischen Axen zusammenfallen mit den optischen Axen.* Alle drei Axensysteme, das optische, das thermische und das des

Drucks oder das akustische, fallen zusammen mit dem Axensysteme, welches das Cohäsionsaxensystem genannt wurde.

Was nun endlich ein fünftes Axensystem betrifft, das krystallographische, so kann kein Zweifel seyn, daß überall da, wo die Krystallformen symmetrisch in Beziehung auf die rechtwinkligen Ebenen sind, also bei den vollflächigen Gestalten die Durchschnittslinien dieser drei rechtwinkligen Ebenen, welche eben die krystallographischen Axen sind, zusammenfallen mit den Cohäsionsaxen, und somit also auch mit den optischen, thermischen, und mit denen des Druckes. Diefs ist eine Folge des Grundbegriffs, der von den Cohäsionsaxen aufgestellt ist; es ist außerdem sowohl durch die in optischer Hinsicht *), als durch die Beobachtungen des Hrn. Mitscherlich in thermischer Hinsicht erwiesen. In denjenigen Gestalten, in welchen die Symmetrie in Beziehung auf drei rechtwinklige Ebenen fehlt, in den hemiëdrischen, sucht die Krystallographie das Gesetz der Formen gleichfalls in drei auf einander rechtwinkligen Richtungen. Ich will mich hier nicht auf die Gründe einlassen, wodurch die Krystallographie zur Annahme solcher drei rechtwinkligen Richtungen, d. i. der krystallographischen Axen, auch in den Formen, wo sie nicht durch deren Symmetrie unmittelbar gegeben sind, veranlaßt worden ist, auch nicht von den im Begriff unserer Cohäsionsaxen liegenden inneren Gründen sprechen, wodurch es sehr wahrscheinlich wird, daß diese und krystallographische Axen identisch seyen, und daß also schon allein hieraus sich das Vorhandenseyn der krystallographischen Axen eben so allgemein, als das der optischen Axen ergebe. Ich will

*) In den Ann. d. Chimie, Bd. XXVI, theilt Hr. Mitscherlich eine Beobachtung über die Lage der optischen Axen in der schwefelsauren Magnesia mit, welche hiemit in Widerspruch steht; indeß mögen hier optische Verhältnisse ganz besonderer Art vorhanden gewesen seyn.

vielmehr beweisen, dafs, wenn die Krystallographie *unter Axen überhaupt solche Linien in einer Krystallform versteht, welche eine feste, unveränderliche, relative Richtung haben, und deren relativen Längen allein veränderlich sind*, solcher Linien immer drei, und im Allgemeinen *nur* drei auf einander rechtwinkliche vorhanden sind, und dafs diese keine anderen seyn können, als die drei Hauptdruckaxen und thermischen Axen. Der Beweis ist einfach: die relative Richtung aller anderen Linien ist abhängig von dem zufälligen Druck (atmosphärischen z. B.) und der zufälligen Temperatur, unter welcher die Krystallform sich befindet, und veränderlich mit diesen; auf die Gröfse der Veränderung kann es natürlich bei der Bestimmung des Begriffs der krystallographischen Axen nicht ankommen. — Ich habe vorher die Gründe angegeben, welche meines Erachtens keinen Zweifel übrig lassen, dafs die thermischen Axen überall zusammenfallen mit den Hauptdruckaxen; — auf diesem Zusammenfallen beiderlei Axensysteme beruht unser Beweis; fielen sie nicht zusammen, so würden überhaupt gar keine krystallographischen Axen in dem Sinne der eben gegebenen Definition, und man kann keine andere geben, existiren, weil die relativen Richtungen, welche bei der Temperaturveränderung constant sind, durch den Druck verändert werden, und umgekehrt.

Es giebt also in allen krystallinischen Formen ein rechtwinkliges, krystallographisches Axensystem, und diefs ist dasselbe, als das thermische und das der Hauptdruckaxen, von denen vorher die Identität mit dem optischen Axensysteme und dem Axensysteme der Cohäsionskräfte unter einer sehr einfachen und wahrscheinlichen Voraussetzung nachgewiesen ist.

So sicher oder annehmbar die Gründe sind, woraus dieser Satz abgeleitet ist, so schien es doch, wegen der Voraussetzung, aus welcher die Identität der Hauptdruckaxen und der optischen Axen abgeleitet ist, sehr wün-

schenswerth, ihn an der Erfahrung prüfen zu können. Diese Prüfung kann sich nur auf eine der hemiëdrischen Krystallsysteme beziehen. Glücklicherweise sind die erforderlichen Erfahrungen für das Krystallsystem des Gypses vorhanden, aus welchen sowohl die Lage der drei optischen Axen als der drei thermischen Axen abgeleitet werden kann. Theils dieser Ableitung wegen, theils um die Eigenschaften dieser Axen in krystallographischer Hinsicht kennen zu lernen, ob nämlich die Lage der verschiedenen Krystallflächen durch eine einfache und unmittelbare Beziehung auf diese Axen bestimmt sey, worin bis dahin der wesentliche Charakter der Krystallaxen gesetzt werden mußte, war eine genauere empirische Bestimmung des Krystallsystems des Gypses nöthig, als sie sich aus den Haüy'schen Messungen ergibt; diese macht demnach einen Theil der folgenden Untersuchung aus.

§. 2.

Die mitzutheilenden Messungen des Gypssystems wurden an zwei Krystallen von Bex, welche dem Mineralien-cabinet der hiesigen Universität gehören, angestellt. Aufser der gewöhnlichen Form des Gypses, gebildet von den Seitenflächen f und f' , der Abstumpfung der scharfen Seitenkante der Säule durch die Fläche P , parallel dem ersten Blätterdurchgang, und den augitartigen Zuschärfungsflächen l und l' , hatten diese Krystalle einige seltneren Flächen. Aufser einer Fläche n , welche nur einzeln an einem der Krystalle an einem Ende sich fand, hatten diese Krystalle als Abstumpfungen der Kante zwischen P und f die von Haüy mit o bezeichnete Fläche (es ist diejenige Fläche in der horizontalen Zone, deren Neigung gegen P die halbe Tangente der Neigung f gegen P hat), und am Ende fand sich eine sehr kleine Fläche, die in der im Gypssysteme charakteristisch hervortretenden Zone von l nach n lag, und zugleich in der Zone von einem vorderen, rechts liegenden o nach einem hinten links liegenden l ; von der Richtigkeit dieser

Bestimmung überzeugte ich mich theils durch die directe Beobachtung der letzteren Zone, theils durch Winkelmessungen, welche indess nur als ein ungefähr richtiges Resultat gebend können betrachtet werden, wegen der Kleinheit der in Rede stehenden Fläche. Ich fand die Neigung dieser Fläche gegen l auf derselben Seite $26^{\circ} 43'$ *) und gegen l auf der anderen Seite $48^{\circ} 35'$. Es sollen diese Flächen mit ν bezeichnet werden. Die scharfen End Ecken, gebildet von den augitartigen Zuschärfungen l , l und den Säulenflächen f, f , sind abgestumpft von Flächen ausgezeichnet durch ihr unebenes, drusiges Ansehen und merkliche Wölbung; es ist die (zufällige) Hälfte einer sehr stumpfen augitartigen Zuschärfung mit sehr wenig geneigter schiefer Endkante, und liegt in der Zone von einem rechts liegenden n nach einem links liegenden l . Diese Zonenbestimmung liefs sich direct beobachten; aus angestellten Messungen mußte geschlossen werden, dafs sie ausserdem noch in der Zone von einem links liegenden n nach einem rechts liegenden ν sich befindet **). Diefs ist also eine neue, noch nicht beobachtete Fläche (sie soll mit ω bezeichnet werden), sie ist aber aus der Diagonalzone derselben schiefen Endfläche, welche von Haüy beobachtet ist, und mit ϵ bezeichnet wurde im *Traité de Mineralogie*, in deren Diagonalzone seine Flächen u liegen, welche zugleich in der Zone von l nach n sich befinden, und deren Neigungen gegen die Fläche P zur Tangente ein Drittel der Tangente der Neigung der in Rede stehenden Fläche ω gegen P haben. — Bei Haüy finden sich ausser den hier beschrie-

*) Winkelangaben im Folgenden sind die Neigungen der Normalen der Flächen.

**) Die Messungen konnten, wegen der Drusigkeit der Flächen, nur ein sehr unvollkommenes Resultat geben; ich fand in der Zone l, f , in welcher die Fläche liegt, ihre Neigung gegen l : 48° und $49^{\circ} 47'$ statt $47^{\circ} 4'$, gegen f : $83^{\circ} 21'$ und $82^{\circ} 55'$ statt $83^{\circ} 6'$, und gegen das andere l $41^{\circ} 51'$ statt $39^{\circ} 58'$.

benen Flächen noch eine Fläche r aus der horizontalen Zone mit ein Drittel der Tangente der Neigung von f gegen P , und eine Fläche k aus der Zone der schiefen Endkante der Flächen l und l gleichfalls mit $\frac{1}{3}$ der Tangente der Neigung der Flächen l gegen P . Endlich werden noch als von Soret beschrieben zwei Flächen x und s angegeben (im Grundriß der Mineralogie von Mohs), aus der Diagonalzone von T , deren Neigung gegen P $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ der Tangente der Neigung von n gegen P haben. — Alle diese Flächen stehen unter einander in einem nahen, sich mannigfaltig durchkreuzenden Zonenzusammenhang, der sich am einfachsten aus der graphischen Darstellung dieses Krystallsystems, Fig. I Taf. III, übersehen läßt, in welchem die Durchschnitte einer, auf den Flächen f, f senkrechten Ebene mit den Normalen der Krystallflächen durch die diesen entsprechenden Buchstaben bezeichnet sind. Diese Darstellung enthält vollständig, was von beobachteten Flächen bekannt ist, obgleich es Anfangs scheinen möchte, daß Phillips in seiner *Introduction to the kn. of Mineralogy* noch ganz andere Flächen beobachtet habe; indess bei genauer Ansicht muß man sich überzeugen, daß sowohl in seinen Abbildungen, als in den Winkelangaben Verwechselungen der von ihm mit a und d bezeichneten Flächen stattgefunden haben, so daß in der großen Figur die mit a bezeichneten Flächen keine anderen sind, als die Haüy'schen n Flächen, und die mit d bezeichneten unsere mit v bezeichneten, und in den Winkelangaben die Angabe P, o, n, a vertauscht werden muß mit P, o, n, d . Seine Fläche e mochte wohl nur Haüy's E seyn, so daß sein b_2 allein als eine bisher nicht gekannte Angabe übrig bleibt, in deren Neigungsangaben sich aber solche Irrthümer eingeschlichen haben, daß die systematische Bestimmung dieser Fläche dadurch unmöglich gemacht ist. In diese Kritik der Phillips'schen Darstellung des Gypssystems war es nöthig einzugehen, weil

sie außerdem dadurch ausgezeichnet ist, daß sie eine große Anzahl gemessener Winkel enthält, ein Umstand, der um so schätzbarer ist, theils weil dieß die einzigen Messungen dieses Systems bis jetzt sind, welche mit dem Reflexionsgoniometer angestellt sind, theils weil namentlich bei einer solchen Substanz, wie der Gyps, welche mechanischen Einwirkungen so wenig widersteht, so leicht Biegungen und Verschiebungen dadurch erleidet, die Anzahl der Messungen nicht vervielfältigt genug werden kann, um zu einem sicheren Resultat zu gelangen.

§. 3.

An den beiden beschriebenen Krystallen von Bex ließen sich folgende Messungen mit Sicherheit anstellen:

	Gemessene Winkel				Corrigirte Winkel.
	am Krystall No. I.		am Krystall No. II.		
		Δ		Δ	
$f-f'$	68° 34',4	1,1	68° 36',4	1,7	68° 38'
$l-l'$	36 16,3	1,7	36 12,6	1,0	36 18
			36 17,8	1,1	
$f-l$		..	107 37,1	3,5	107 44
$f-l'$		..	131 5,0	1,0	131 0

Jede dieser Winkelangaben (es sind die unmittelbaren Messungen, also das Complement zu 180° der Flächenneigungen) ist das Mittel aus zehn Messungen, deren Uebereinstimmung unter einander man aus den mit Δ überschriebenen Spalten ersehen kann, welche das arithmetische Mittel der Fehler der einzelnen Messungen (sämmliche Fehler positiv genommen) enthalten. Von den beiden Angaben für $l-l'$ am Krystall No. II ist die eine das Resultat von Messungen an den beiden vorderen $l-l'$, die andere an den beiden hinteren, welche mit jenen parallel hätten seyn sollen.

Da in der Abtheilung der zwei- und eingliedrigen Systeme durch drei Winkel das System vollständig bestimmt wird, so müssen die vier gemessenen Winkel ei-

ner Bedingungsgleichung genügen, die man dazu benutzen kann, die gemessenen Winkel unter sich zu corrigiren. Diese Bedingungsgleichung ist im gegenwärtigen Falle:

$$\cos fl - \cos fl + 2 \sin \frac{1}{2} ff' \cdot \sin \frac{1}{2} ll' = 0.$$

Die mittelst dieser Gleichung corrigirten Werthe der gemessenen Winkel, so dafs den Winkeln ll' und ff' das doppelte Gewicht gegeben ist, sind die in der Tafel unter der Ueberschrift »corrigirte Messungen« enthaltenen Angaben.

Um die Lage der Flächen durch ihre Beziehung zu drei auf einander rechtwinkligen Dimensionen a, b, c auszudrücken, legen wir diese so, dafs eine derselben senkrecht auf P stehe, die andere c parallel mit den Säulenkannten $\frac{f}{f'}$, und die dritte, also a , senkrecht auf der Kante $\frac{f}{f'}$ und parallel mit P ist. Es schneide die Fläche l von den drei Dimensionen a, b, c Theile ab, deren relative Länge $-\frac{1}{\alpha'}, \frac{1}{\beta}, 1$ seyen, so dafs ihr Flächenausdruck $\left(-\frac{1}{\alpha'} : \frac{1}{\beta} : 1\right)$ ist; der Ausdruck der schiefen Endfläche, in deren Diagonalzone die Flächen v liegen, sey $\left(-\frac{1}{\alpha} : \frac{1}{0} b : 1\right)$, alsdann erhalten die übrigen Flächen des Systems folgende Ausdrücke:

$$\begin{array}{ll} M = \left(-\frac{1}{\alpha' - \alpha} : \frac{1}{0} : \frac{1}{0}\right) & T = \left(\frac{1}{\alpha' - 2\alpha} : \frac{1}{0} : 1\right) \\ f = \left(\frac{1}{\alpha' - \alpha} : \frac{1}{\beta} : \frac{1}{0}\right) & E = \left(\frac{3}{\alpha' - 4\alpha} : \frac{1}{0} : \frac{1}{0}\right) \\ o = \left(\frac{1}{\alpha' - \alpha} : \frac{1}{2\beta} : \frac{1}{0}\right) & l = \left(-\frac{1}{\alpha'} : \frac{1}{\beta} : 1\right) \\ r = \left(\frac{1}{\alpha' - \alpha} : \frac{1}{3\beta} : \frac{1}{0}\right) & k = \left(-\frac{1}{\alpha'} : \frac{1}{3\beta} : 1\right) \\ P = \left(\frac{1}{0} : \frac{1}{\beta} : \frac{1}{0}\right) & v = \left(-\frac{1}{\alpha} : \frac{1}{\beta} : 1\right) \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 w &= \left(\frac{3}{\alpha' - 4\alpha} : \frac{3}{\beta} : 1 \right) & x &= \left(\frac{1}{\alpha' - 2\alpha} : \frac{1}{2\beta} : 1 \right) \\
 u &= \left(\frac{3}{\alpha' - 4\alpha} : \frac{1}{\beta} : 1 \right) & s &= \left(\frac{1}{\alpha' - 2\alpha} : \frac{1}{3\beta} : 1 \right) \\
 n &= \left(\frac{1}{\alpha' - 2\alpha} : \frac{1}{\beta} : 1 \right)
 \end{aligned}$$

Die numerischen Werthe von α' , α , β , wie sie sich aus den corrigirten Messungen ergeben, sind:

$$\alpha' = 0,77381$$

$$\alpha = 0,16675$$

$$\beta = 0,41437.$$

In der folgenden Tafel sind die aus diesen Elementen α' , α , β des Systems berechneten Winkel mit den Messungen von Phillips zusammengestellt:

	Berechnete Winkel.	Messungen von Phillips.	Δ .
$\{ff\}$	68° 38'	68° 40'	$\{ + \quad 2' \}$
$\{nf\}$	34 19	34 20	$\{ + \quad 1 \}$
Mo	53 48	53 42	$- \quad 6$
Mr	63 59	63 55	$- \quad 4$
$\{nn\}$	41 32	41 18	$\{ - \quad 14 \}$
$\{nT\}$	20 46	20 51	$\{ + \quad 5 \}$
$n\nu$	30 53	30 40	$- \quad 13$
$\frac{1}{2}(\nu\nu)$	22 14	22 14	0
$\{ll\}$	36 18	36 12	$\{ - \quad 6 \}$
$\{\frac{1}{2}ll\}$	18 9	18 0	$\{ - \quad 9 \}$
nf	59 16	61 42	$+2^{\circ} 26$

Ogleich diese Messungen von Phillips bis auf die letzte, die eilfte, auf eine kaum hier erwartete Weise übereinstimmen mit denjenigen, die aus unseren Elementen berechnet sind, so schien es doch nicht überflüssig zu untersuchen, ob die zehn Phillips'schen Messungen (denn die eilfte glaubte ich verwerfen zu müssen) sich nicht durch kleine Verbesserungen der Elemente noch besser vorstellen ließen. Wenn ν den aus den Ele-

menten α' , α , β berechneten Winkel darstellt, unter welchem die Flächen

$$\left(\frac{1}{m'\alpha' + m\alpha} : \frac{1}{n\beta} : 1\right) \text{ und } \left(\frac{1}{\mu\alpha' + \mu\alpha} : \frac{1}{\nu\beta} : 1\right)$$

gegen einander geneigt sind, und ΔV die Veränderung ist, welche er erleidet, wenn die Elemente sich um die kleinen Größen $\Delta\alpha'$, $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$ vergrößern, so ist:

$$\Delta V = a' \Delta\alpha' + a \Delta\alpha + b \Delta\beta,$$

wo a' , a , b bestimmt sind durch diese Relationen:

$$a' = m' P + \mu' \Pi$$

$$a = m P + \mu \Pi$$

$$b = n S + \nu \Sigma,$$

in welchen die Größen P , Π , S , Σ für die Rechnung am bequemsten durch folgende Gleichungen bestimmt werden, in welchen A und $\mathfrak{A}$ die Neigungen der Normalen der ersten und zweiten Fläche gegen die Richtung der α 's und B und $\mathfrak{B}$ ihre Neigungen gegen die Richtung der β 's vorstellen, und C und $\mathfrak{C}$ ihre Neigungen gegen die dritte Dimension:

$$NP - N\Pi = -2 \cot \frac{1}{2} V \sin \frac{A - \mathfrak{A}}{2} \sin \frac{A + \mathfrak{A}}{2}$$

$$NP + N\Pi = -2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} V \cos \frac{A - \mathfrak{A}}{2} \cos \frac{A + \mathfrak{A}}{2}$$

$$NS - N\Sigma = -2 \cot \frac{1}{2} V \sin \frac{B - \mathfrak{B}}{2} \sin \frac{B + \mathfrak{B}}{2}$$

$$NS + N\Sigma = -2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} V \cos \frac{B - \mathfrak{B}}{2} \cos \frac{B + \mathfrak{B}}{2}$$

$$N = \frac{m'\alpha' + m\alpha}{\cos A} = \frac{n\beta}{\cos B} = \frac{1}{\cos C}$$

$$N = \frac{\mu'\alpha' + \mu\alpha}{\cos \mathfrak{A}} = \frac{\nu\beta}{\cos \mathfrak{B}} = \frac{1}{\cos \mathfrak{C}}.$$

A , B , C , $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ werden alle von den positiven Enden der drei Dimensionen an gerechnet und wachsen bis 180° . Berechnet man nach diesen Gleichungen die Werthe von a' , a , b für die von Phillips gemessenen

Winkel, so erhält man folgende zehn Gleichungen, wenn man $\Delta \alpha' - \Delta \alpha = \Delta A$ setzt:

$$\begin{aligned}
 \Delta ff &= + 2m = -1,534 \Delta A \dots\dots + 2,247 \Delta \beta \\
 \Delta Mf &= + 1m = -0,767 \Delta A \dots\dots + 1,123 \Delta \beta \\
 \Delta Mo &= - 6m = -0,785 \Delta A \dots\dots + 1,150 \Delta \beta \\
 \Delta Mr &= - 4m = -0,649 \Delta A \dots\dots + 0,951 \Delta \beta \\
 \Delta nn &= -14m = -0,244 \Delta A + 0,244 \Delta \alpha + 1,600 \Delta \beta \\
 \Delta nT &= + 5m = -0,122 \Delta A + 0,122 \Delta \alpha + 0,800 \Delta \beta \\
 \Delta nv &= -13m = +0,792 \Delta A + 0,110 \Delta \alpha - 0,175 \Delta \beta \\
 \frac{1}{2} \Delta vv &= - 0 = \dots\dots A - 0,057 \Delta \alpha + 0,845 \Delta \beta \\
 \Delta ll &= - 6m = -0,287 \Delta A - 0,287 \Delta \alpha + 1,429 \Delta \beta \\
 \frac{1}{2} \Delta ll &= - 9m = -0,143 \Delta A - 0,143 \Delta \alpha + 0,714 \Delta \beta
 \end{aligned}$$

wo $m = 0,000291$ ist.

Nach der Methode der kleinsten Quadrate erhält man hieraus:

$$\begin{aligned}
 4,783 \Delta A + 0,110 \Delta \alpha - 6,967 \Delta \beta &= - 1,01m \\
 0,110 \Delta A + 0,190 \Delta \alpha - 0,092 \Delta \beta &= - 1,23m \\
 6,967 \Delta A + 0,092 \Delta \alpha - 15,033 \Delta \beta &= + 36,22m
 \end{aligned}$$

woraus sich ergibt:

$$\begin{aligned}
 \Delta A &= -11,31m & \text{oder} & & \Delta \alpha' &= -14,8m \\
 \Delta \alpha &= - 3,5m & & & \Delta \alpha &= - 3,5m \\
 \Delta \beta &= - 7,67m & & & \Delta \beta &= - 7,67m
 \end{aligned}$$

und hieraus:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= 0,7695 \\
 \alpha &= 0,1657 \\
 \beta &= 0,4121.
 \end{aligned}$$

Den Erfolg dieser Verbesserungen der Elemente zeigt folgende Tafel:

	Beobachtete.	Berechnete.	<i>A.</i>
Δff	+ 2,0	0,0	— 2,0
Δnf	+ 1,0	0,0	— 1,0
ΔMo	— 6,0	0,0	+ 6,0
ΔMr	— 4,0	0,0	+ 4,0
Δnn	— 14,0	— 10,4	+ 3,6
$\Delta n T$	+ 5	— 5,2	— 10,2
$\Delta n o$	— 13	— 8	+ 5,0
$\frac{1}{2} \Delta oo$	0	— 6,3	— 6,3
Δll	— 6	— 6,7	— 0,7
$\frac{1}{2} \Delta ll$	— 9	— 3,3	+ 5,7

aus der man ersieht, daß die Phillips'schen Messungen durch die verbesserten Elemente so unerheblich besser dargestellt werden, daß man, bei der Ungewißheit des Werthes der einzelnen Messungen, es für jetzt bei unseren obigen Elementen bewenden lassen kann. Die wichtigsten aus diesen Elementen berechneten Winkel findet man in der Fig. 2 Taf. III, welche die Durchschnitte der Normalen der Flächen mit einer Kugelfläche darstellt.

§. 4.

Mit der Temperatur verändern in den Krystallformen im Allgemeinen sich auch die Neigungen der Flächen und ihre ebenen Winkel. Wenn man die relative Lage der Flächen durch ihre Beziehung zu drei auf einander rechtwinkligen oder schiefwinkligen Richtungen bezeichnet, so behalten zwar die Flächen nach der Temperaturveränderung dieselbe Beziehung zu diesen Richtungen; diese Richtungen selbst aber haben ihre relative Lage, und zugleich ihre relativen Einheiten verändert. Es giebt indessen immer ein gewisses System von drei auf einander rechtwinkligen Richtungen, und nur ein solches im Allgemeinen, welche die Eigenschaften besitzen, daß sie ihre relativen Richtungen nicht verändern, also rechtwinklig vor und nach der Temperaturveränderung sind; in *diesem* System rechtwinkliger Dimensionen haben also

also nur lineare Ausdehnungen oder Zusammenziehungen stattgefunden, wodurch allein ihre relativen Einheiten verändert sind. Dieß sind die drei auf einander rechtwinkligen thermischen Axen.

Bei den zwei- und eingliedrigen Krystallsystemen fordert es die Symmetrie der Gestalt, und die Beobachtung hat es bestätigt, daß eine dieser drei Dimensionen senkrecht steht auf der Ebene, wodurch die Gestalt in zwei symmetrische Hälften getheilt wird, die beiden andern also in dieser Ebene liegen müssen. Bei dieser Klasse von Systemen ist demnach die Aufgabe, die thermischen Axen zu finden, einfach, nämlich: *zwei auf einander senkrechte Linien zu finden, in der die Gestalt symmetrisch theilenden Ebene, welche auch nach der Temperaturveränderung rechtwinklig gegen einander geneigt sind.*

Nehmen wir in der die Gestalt symmetrisch theilenden Ebene, daß ist, in der Ebene der Richtungen a und c , nach den angenommenen Bezeichnungen irgend zwei sich schneidende Linien OA und OC , Figur 3 Tafel III, in Beziehung auf welche die Lage der übrigen Linien bestimmt werden soll. Es seyen die Längen $OC=C$ und $OA=A$ die Einheiten in diesen schiefwinkligen Dimensionen, und der Winkel AOC sey φ ; irgend eine Linie sey durch C gelegt und schneide von OA das Stück $OD=\frac{1}{m}OA$ ab. Es heiße der Winkel DCO , den diese Linie CD mit der Dimension OC bildet, ν , dann ist $\cotg \nu = m \frac{C}{A \sin \varphi} - \cotg \varphi$. Nach der Temperaturveränderung hat sich der Winkel AOC in den Winkel $A'OC$ verwandelt, und die ursprünglichen Einheiten OC und CA in OC' und OA' . In diesem neuen Zustande hat die ursprüngliche Linie CD die Lage $C'D'$, wo der Punkt C' auf die eben bemerkte Weise in der Richtung OC bestimmt ist, der Punkt D' aber

auf der Linie OA' liegt, und zwar so, daß $OD' = \frac{1}{m} OA'$ ist. Bezeichnen wir mit A', C', φ', ν' in dem durch die Temperatur veränderten Zustand dieselben Größen, welche im ursprünglichen Zustande mit A, C, φ, ν bezeichnet wurden, so ist $\cotg \nu' = \frac{mC'}{A' \sin \varphi'} - \cotg \varphi'$. Nehmen wir nun eine zweite Linie, die im ursprünglichen Zustand durch C und $\frac{1}{\mu} A$ gelegt ist, und also durch C' und $\frac{1}{\mu} A'$ im veränderten Zustand; ihre Neigungen gegen die Richtung OC seyen u und u' . Wenn diese zwei Linien $\left(\frac{1}{m} A : c\right)$ und $\left(\frac{1}{\mu} A : c\right)$ rechtwinklig gegen einander geneigt sind, und diese rechtwinklige Neigung auch nach der Temperaturveränderung behalten, so sind es die zwei in der Ebene der Construction liegenden thermischen Axen. Es muß also seyn $u - \nu = 90^\circ$ und $u' - \nu' = 90^\circ$, oder:

$$\begin{aligned} 1 + \cotg u \cdot \cotg \nu &= 0 \\ 1 + \cotg u' \cdot \cotg \nu' &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Wir finden aber:

$$\begin{aligned} \cotg \nu &= m \frac{C}{A \sin \varphi} - \cotg \varphi \\ \cotg \nu' &= m \frac{C'}{A' \sin \varphi'} - \cotg \varphi' \end{aligned} \quad (2)$$

und:

$$\begin{aligned} \cotg u &= \mu \frac{C}{A \sin \varphi} - \cotg \varphi \\ \cotg u' &= \mu' \frac{C'}{A' \sin \varphi'} - \cotg \varphi' \end{aligned}$$

und erhalten durch Substitution dieser Werthe in (1):

$$\begin{aligned} 1 + \left(m \frac{C}{A \sin \varphi} - \cotg \varphi \right) \left(\mu \frac{C}{A \sin \varphi} - \cotg \varphi \right) &= 0 \\ 1 + \left(m \frac{C'}{A' \sin \varphi'} - \cotg \varphi' \right) \left(\mu' \frac{C'}{A' \sin \varphi'} - \cotg \varphi' \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Die Gleichungen (3) bestimmen die Werthe von m und μ , und somit also die Lage der beiden thermischen Axen.

Um in diese Gleichungen diejenigen Gröfsen einzuführen, deren wir uns vorher als Elemente des Gypssystems bedient haben, sey die Richtung OC diejenige, welche parallel mit den Kanten der Säule f, f ist; die Richtung OA sey parallel mit der Diagonale der schiefen Endfläche $\left(-\frac{1}{\alpha} : \frac{1}{0} : 1\right)$, d. i. diejenige, in deren Diagonalzone die Flächen ν, ν liegen, und das Verhältniß der Einheiten A und C sey so gewählt, daß die durch den Endpunkt der von C angenommenen Einheit und den Endpunkt der negativen von A angenommenen Einheit gelegte Linie parallel sey mit der schiefelaufenden Endkante, in welcher die Flächen l und l sich schneiden: alsdann ist für:

$\left(-\frac{1}{\alpha} : \frac{1}{0} : 1\right)$ wegen $m=0$; $\cotg \nu = -\cotg \varphi = -\alpha$
und für:

$\left(-\frac{1}{\alpha'} : \frac{1}{0} : 1\right)$ wegen $m=-1$; $\cotg \nu = -\frac{C}{A \sin \varphi}$
 $-\cotg \varphi = \alpha'$

oder:

$$\frac{C}{A \sin \varphi} = \alpha' - \alpha \text{ und } \cotg \varphi = \alpha$$

und für $\frac{C'}{A' \sin \varphi'}$ und $\cotg \varphi'$ können wir setzen:

$$\frac{C'}{A' \sin \varphi'} = \alpha' - a, \cotg \varphi' = a$$

wo also α' und a diejenigen Gröfsen bezeichnen, in welche sich α' und α verwandeln durch die Temperaturveränderung. Durch die Substitution dieser Werthe für

$\frac{C}{A \sin \varphi} \dots \cotg \varphi \dots$ in (3) verwandeln sich diese in:

$$1 + (m(\alpha' - \alpha) - \alpha)(\mu(\alpha' - \alpha) - \alpha) = 0$$

$$1 + (m(a' - a) - a)(\mu(a' - a) - a) = 0$$

oder nach ausgeführter Multiplication:

$$\begin{aligned} m \cdot \mu (\alpha' - \alpha)^2 - (m + \mu) \alpha (\alpha' - \alpha) + \alpha^2 + 1 &= 0 \\ m \cdot \mu (a' - a)^2 - (m + \mu) a (a' - a) + a^2 + 1 &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Es soll jetzt bewiesen werden, daß die beiden Wurzeln m und μ , welches auch der Werth von α , α' , a , a' seyn möge, immer möglich sind.

Aus (4) erhält man:

$$\begin{aligned} m\mu &= \frac{\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha(\alpha' - \alpha)} - \frac{\alpha^2 + 1}{a(a' - a)}}{\frac{\frac{\alpha'}{\alpha} - \alpha}{\alpha} - \frac{\frac{a'}{a} - a}{a}} = \frac{a\alpha}{(\alpha' - \alpha)(a' - a)} \\ &\quad + \frac{a}{a' - a} \frac{\alpha}{\alpha' - \alpha} \left\{ \frac{\left(\frac{1}{\alpha(\alpha' - \alpha)} - \frac{1}{a(a' - a)} \right)}{\frac{\alpha}{\alpha' - \alpha} - \frac{a}{a' - a}} \right\} \\ m + \mu &= \frac{\frac{\alpha^2 + 1}{(\alpha' - \alpha)^2} - \frac{a^2 + 1}{(a' - a)^2}}{\frac{\alpha}{\alpha' - \alpha} - \frac{a}{a' - a}} = \frac{\alpha}{\alpha' - \alpha} + \frac{a}{a' - a} \\ &\quad + \frac{\frac{1}{(\alpha' - \alpha)^2} - \frac{1}{(a' - a)^2}}{\frac{\alpha}{\alpha' - \alpha} - \frac{a}{a' - a}} \end{aligned} \quad (5)$$

und hieraus erhält man nach gehöriger Reduction:

$$\begin{aligned} m - \mu &= \left[\frac{\alpha}{\alpha' - \alpha} - \frac{a}{a' - a} \right] \sqrt{\left\{ \left(\frac{\alpha}{\alpha' - \alpha} - \frac{a}{a' - a} \right)^4 \right.} \\ &\quad + 2 \left(\frac{1}{(\alpha' - \alpha)^2} + \frac{1}{(a' - a)^2} \right) \left(\frac{\alpha}{\alpha' - \alpha} - \frac{a}{a' - a} \right)^2 \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{(\alpha' - \alpha)^2} - \frac{1}{(a' - a)^2} \right)^2 \right\}} \end{aligned} \quad (6)$$

woraus erhellt, daß $m - \mu$ immer eine mögliche GröÙe ist, da alle Glieder unter dem $\sqrt{\quad}$ positive GröÙen sind, und daß somit auch m und μ , die man aus (5) und (6) durch Addition und Subtraction dieser Gleichungen

findet, immer reelle Werthe haben. *Das immer reelle Vorhandenseyn der thermischen Axen in den zwei- und eingliedrigen Systemen ist hiemit bewiesen.* — Es ergibt sich von selbst die Bemerkung, daß dieser Beweis sich auf jede Art von Winkelveränderungen erstreckt, sie mag durch irgend eine andere Ursache, durch Druck oder dergleichen hervorgebracht seyn, wenn diese Winkelveränderungen nur von der Art sind, daß dadurch die veränderte Form nicht den Charakter einer zwei- und eingliedrigen Form verliert.

Für die Berechnung der Lage der thermischen Axen kann man, da hier die Winkel- und Linearveränderungen sehr klein sind, die Gleichungen (4) bequemer einrichten, indem man von den Unterschieden der Größen a' , a , von α' , α die höheren Potenzen vernachlässigt.

Man setze:

$$\alpha' - \alpha = A$$

$$a' - a = A + \Delta A$$

$$a = \alpha + \Delta \alpha,$$

so verwandeln sich (4), wenn nur die ersten Potenzen von ΔA und $\Delta \alpha$ beibehalten werden, in:

$$m\mu A^2 - (m + \mu)\alpha A + \alpha^2 + 1 = 0$$

$$2m\mu A \Delta A - (m + \mu)(\alpha \Delta A + A \Delta \alpha) + 2\alpha \Delta \alpha = 0,$$

woraus sich ergibt:

$$\begin{aligned} m\mu &= \frac{1}{A^2} \left(\alpha^2 - \frac{A \Delta \alpha + \alpha \Delta A}{A \Delta \alpha - \alpha \Delta A} \right) \\ m + \mu &= \frac{2}{A} \left(\alpha + \frac{\Delta A}{\alpha \Delta A - A \Delta \alpha} \right) \end{aligned} \quad \dots (7)$$

§. 5.

Nach den Messungen des Hrn. Mitscherlich in Abhandlungen der Berliner Academie von 1825, wo er seine Entdeckung der ungleichen Ausdehnungen krystalinischer Massen mittheilt, sind die Winkelveränderungen im Gypssystem bei einer Temperaturdifferenz von 80° R. die in folgender Tafel angegeben:

	Absolute Neigungen.	Veränderung.
$\frac{ff}{ll}$	68° 38'	— 10' 50"
$\frac{l}{l} - \frac{f}{f}$	36 18	— 8 25
$\frac{l}{l} - \frac{f}{f} \text{ *)}$	127 44	+ 7' 26

Die unter »absolute Neigungen« angegebenen Winkel $\sin$ aus meinen Messungen abgeleitet, da in Hrn. Mitscherlich's Abhandlung diese Angaben sich nicht befinden; sie beziehen sich auf die gewöhnliche Temperatur von etwa 15° R.; — es würde ganz überflüssig seyn, sie noch auf 0° reduciren zu wollen.

Aus diesen Winkelveränderungen lassen sich $\Delta A = \Delta \alpha' - \Delta \alpha$, $\Delta \alpha$ und $\Delta \beta$ ableiten; die Bedeutung von $\Delta \beta$ ist folgende:

$$\beta = \frac{C}{B}; \quad \frac{\Delta \beta}{\beta} = \frac{\frac{\Delta C}{B}}{\frac{C}{B}} = \frac{\Delta C}{C} - \frac{\Delta B}{B},$$

wo $\frac{\Delta C}{C}$ die lineare Ausdehnung bedeutet der Einheit von OC in Fig. 3 Taf. III, und $\frac{\Delta B}{B}$ die lineare Ausdehnung der Einheit von OB , welche Linie senkrecht steht auf OA und OC in Fig. 3 Taf. III. — Bezeichnen wir den Winkel $\frac{l}{l} - \frac{f}{f}$ mit $k + 90^\circ$, und die Veränderung dieses Winkels und der übrigen mit Δk , Δff , Δll , so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta k}{\cos^2 k} &= \Delta \alpha' \\ \frac{\Delta ll}{\sin ll} &= \frac{\Delta \beta}{\beta} - \frac{\alpha'}{1 + \alpha'^2} \Delta \alpha' \\ \frac{\Delta ff}{\sin ff} &= \frac{\Delta \beta}{\beta} - \frac{\Delta \alpha'}{\alpha' - \alpha} + \frac{\Delta \alpha}{\alpha' - \alpha}, \end{aligned}$$

*) $\frac{l}{l} - \frac{f}{f}$ soll heißen: die Kante der Flächen l und l gegen die Kante der Flächen f und f .

oder:

$$\Delta \alpha' = \frac{\Delta k}{\cos^2 k}$$

$$\Delta \alpha = (\alpha \alpha' + 1) \Delta k - \frac{\alpha' - \alpha}{\sin ll} \Delta ll + \frac{\alpha' - \alpha}{\sin ff} \Delta ff$$

$$\Delta \beta = \alpha' \beta \Delta k + \frac{\beta}{\sin ll} \Delta ll.$$

Werden hier die Werthe von $\alpha, \alpha' \dots$ gesetzt, so erhält man:

$$\Delta \alpha' = 1,599 \Delta k$$

$$\Delta \alpha = 1,129 \Delta k - 1,025 \Delta ll + 0,6519 \Delta ff \dots (8)$$

$$\Delta \beta = 0,3206 \Delta k + 0,6999 \Delta ll$$

Wenn man die Werthe der Veränderungen aus der obigen Tafel setzt, nämlich:

$$\Delta k = +7,47 m, \Delta ll = -8,41 m, \Delta ff = -10,83 m,$$

wo $m = 0,000291$ ist, so erhält man aus (8):

$$\Delta \alpha' = +11,879 m \text{ und } \Delta A = +1,9321 m$$

$$\Delta \alpha = +9,9477 m \dots \dots \dots (9)$$

$$\Delta \beta = -3,5041 m.$$

Diese Werthe in (7) substituirt, findet man:

$$m + \mu = -0,5638$$

$$m \mu = -2,9434$$

Also:

$$m = -2,0205 \dots \dots (10)$$

$$\mu = -1,4567$$

Hiedurch also sind die Richtungen der beiden in der Ebene P liegenden thermischen Axen bestimmt; die eine, welche durch m bestimmt wird, ist sehr nahe die Normale der schiefen Endfläche $\left(\frac{1}{-2(\alpha' - \alpha) - \alpha} : \frac{1}{6} : 1 \right)$, die andere, durch μ bestimmt, ist nahe die schiefelaufende Diagonale derselben schiefen Endfläche; diese schiefe Endfläche, eine im Gange der Entwicklung des Systems nahe liegende Fläche, ist bestimmt, durch die Zonen von einem rechts liegenden l nach einem hinten links liegenden f , und von einem links liegenden l nach einem hinten rechts liegenden f .

§. 6.

Es soll das Verhältniß der linearen Ausdehnungen in den drei thermischen Axen gesucht werden.

Suchen wir zuerst den Ausdruck der Verlängerung in irgend einer Richtung. Wir gehen zurück zu dem Coordinaten-System, Fig. 3 Taf. III, wo OC die Richtung der O , OA die Richtung der A , und eine in O senkrecht auf OA und OC gezogenen Linie, die Richtung der B ist. Die zu untersuchende Richtung legen wir durch den Mittelpunkt O , und irgend ein anderer Punkt derselben sey gegeben durch die drei Coordinaten dieses Punktes, $\frac{1}{m}A$, $\frac{1}{n}B$, $\frac{1}{p}C$, die Entfernung dieses Punktes von O nennen wir R ; dann ist:

$$R^2 = \left(\frac{A}{m}\right)^2 + \left(\frac{B}{n}\right)^2 + \left(\frac{C}{p}\right)^2 + 2 \frac{AC}{mp} \cos \varphi,$$

wo φ der Winkel ist, den die zwei Coordinaten-Linien OA und OC mit einander bilden. Die Veränderung der Entfernung des R sey ΔR , so ist $\frac{\Delta R}{R}$ die Verlängerung der Einheit der durch den Mittelpunkt und durch den Punkt $\frac{1}{m}A$, $\frac{1}{n}B$, $\frac{1}{p}C$ gehenden Richtung; diese Verlängerung entsteht durch kleine Veränderungen von A um ΔA , B um ΔB , C um ΔC , von denen nur die ersten Potenzen zu berücksichtigen sind; es ist also:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta R}{R} = \frac{1}{R^2} & \left[\frac{A}{m} \left(\frac{A}{m} + \frac{C}{p} \cos \varphi \right) \frac{\Delta A}{A} + \left(\frac{B}{n} \right)^2 \frac{\Delta B}{B} \right. \\ & \left. + \frac{C}{p} \left(\frac{C}{p} + \frac{A}{m} \cos \varphi \right) \frac{\Delta C}{C} - \frac{A}{m} \frac{C}{p} \sin \varphi \Delta \varphi \right] \end{aligned} \quad (11)$$

Nennen wir Z , Y , X die Winkel der Richtung des R mit den Coordinaten-Linien OC , OB , und einer dritten gegen diese beiden senkrechten Linie, und bezeichnen wir mit V den Winkel, den die gerade Projection

der Richtung R auf die Ebene AOC mit OC bildet, so haben wir:

$$\frac{A}{m} + \frac{C}{p} \cos \varphi = R \sin Y \cos(\varphi - V); \quad \frac{C}{p} + \frac{A}{m} \cos \varphi = R \sin Y \cos V$$

$$\frac{A}{m} = \frac{R \sin V \sin Y}{\sin \varphi}, \quad \frac{C}{p} = R \sin Y \frac{\sin(\varphi - V)}{\sin \varphi}$$

$$\sin Y \cos V = \cos Z, \quad \sin V \sin Y = \cos X.$$

Durch diese Relation ist man im Stande die Coëfficienten von $\frac{\Delta A}{A}$, $\frac{\Delta B}{B}$. . . durch X , Y , Z auszudrücken:

man erhält so:

$$\frac{\Delta R}{R} = \cos^2 X \left(\frac{\Delta A}{A} + \cotg \varphi \Delta \varphi \right) + \cos^2 Y \frac{\Delta B}{B}$$

$$+ \cos^2 Z \frac{\Delta C}{C} + \cos X \cos Z \left[\cotg \varphi \left(\frac{\Delta A}{A} - \frac{\Delta C}{C} \right) - \Delta \varphi \right] \quad (12)$$

Statt ΔA , ΔB . . . führen wir die im krystallographischen Theile gebrauchten Größen α' , α , β wieder ein; es ist:

$$\frac{C}{A \sin \varphi} = \alpha' - \alpha \quad \frac{C}{B} = \beta, \quad \cotg \varphi = \alpha$$

und hieraus erhält man:

$$\frac{\Delta C}{C} - \frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta(\alpha' - \alpha)}{\alpha' - \alpha} - \cos^2 \varphi \frac{\Delta \alpha}{\alpha}$$

$$\frac{\Delta C}{C} - \frac{\Delta B}{B} = \frac{\Delta \beta}{\beta}$$

$$\Delta \varphi = -\Delta \alpha \sin^2 \varphi.$$

Werden diese Werthe von $\frac{\Delta A}{A}$, $\frac{\Delta B}{B}$ und $\Delta \varphi$ in den vorhergehenden Ausdruck von $\frac{\Delta R}{R}$ gesetzt, so findet man:

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta C}{C} - \cos^2 X \frac{\Delta(\alpha' - \alpha)}{\alpha' - \alpha} - \cos^2 Y \frac{\Delta \beta}{\beta}$$

$$- \cos X \cos Z \alpha \left(\frac{\Delta(\alpha' - \alpha)}{\alpha' - \alpha} = \frac{\Delta \alpha}{\alpha} \right) \quad (13)$$

Dies ist die lineare Ausdehnung einer Linie, deren Länge gleich 1, und die mit den Richtungen OC , OB und einer auf diesen senkrechten Richtung die Winkel Z , Y , X bildet. Um die räumliche Ausdehnung zu finden, suchen wir die linearen Ausdehnungen in drei auf einander rechtwinkligen Richtungen; es seyen diese:

$$\frac{\Delta R'}{R'}, \frac{\Delta R''}{R''}, \frac{\Delta R'''}{R'''}$$

Das ursprüngliche Volumen = 1 gesetzt, verwandelt sich in:

$$\left(1 + \frac{\Delta R'}{R'}\right) \left(1 - \frac{\Delta R''}{R''}\right) \left(1 + \frac{\Delta R'''}{R'''}\right) \\ = 1 + \frac{\Delta R'}{R'} + \frac{\Delta R''}{R''} + \frac{\Delta R'''}{R'''} ,$$

so daß also die räumliche Ausdehnung ist:

$$\frac{\Delta R'}{R'} + \frac{\Delta R''}{R''} + \frac{\Delta R'''}{R'''} = \frac{\Delta v}{v} .$$

Setzen wir in (12) nach einander $Z=0$, $Y=90$, $X=90$, und $Z=90$, $Y=0$, $X=90$, und $Z=90$, $Y=90$, $X=0$, so erhalten wir die Wertbe von:

$$\frac{\Delta R'}{R'}, \frac{\Delta R''}{R''}, \frac{\Delta R'''}{R'''},$$

und ihre Summe ist:

$$\frac{\Delta V}{V} = 3 \frac{\Delta C}{C} - \frac{\Delta(\alpha' - \alpha)}{\alpha' - \alpha} - \frac{\Delta \beta}{\beta} . . . (14)$$

Wenden wir diese Ausdrücke (13) und (14) auf das Gypssystem an; man hat aus (9)

$$\frac{\Delta(\alpha' - \alpha)}{\alpha' - \alpha} = +3,1807 m \quad \Delta \beta = -8,4638 m \\ \Delta \alpha = +9,9477 \quad \alpha = -0,16672 ,$$

also:

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta C}{C} - 3,1807 m \cdot \cos^2 X + 8,4564 m \cdot \cos^2 Y \\ + 9,4174 m \cdot \cos X \cos Z .$$

Um die Verlängerungen in beiden thermischen Axen zu finden, welche in der auf der Richtung der B senkrechten Ebene liegen, hat man zu setzen:

$$\cos Y = 0$$

$$\cos Z = \frac{1}{\sqrt{(m(\alpha' - \alpha) - \alpha)^2 + 1}}$$

$$\cos X + \frac{m(\alpha' - \alpha) - \alpha}{\sqrt{(m(\alpha' - \alpha) - \alpha)^2 + 1}},$$

wo für m nach und nach die beiden in (10) gefundenen Werthe zu setzen sind; man erhält so,

wenn $m = -2,0205$:

$$\frac{\Delta R'}{R'} = \frac{\Delta C}{C} - 6,561 m = \frac{\Delta C}{C} - 0,001909,$$

wenn $m = +1,4567$:

$$\frac{\Delta R''}{R''} = \frac{\Delta C}{C} + 3,380 m = \frac{\Delta C}{C} + 0,000983. \quad (15)$$

Man erhält für die dritte Axe, für welche $X = 90$, $Z = 90$, $Y = 0$:

$$\frac{\Delta R'''}{R'''} = \frac{\Delta C}{C} + 8,456 m = \frac{\Delta C}{C} + 0,002468.$$

Die räumliche Ausdehnung endlich:

$$\frac{\Delta V}{V} = 3 \frac{\Delta C}{C} + 5,275 m = 3 \frac{\Delta C}{C} + 0,001535 \quad (16)$$

Durch Subtraction der ersten der Gleichung (15) von den übrigen, erhält man:

$$\frac{\Delta R''}{R''} = \frac{\Delta R'}{R'} + 0,002892$$

$$\frac{\Delta R'''}{R'''} = \frac{\Delta R'}{R'} + 0,004370$$

$$\frac{\Delta V}{V} = 3 \frac{\Delta R'}{R'} + 0,007262.$$

Da kein bekannter fester Körper eine solche Volumenausdehnung hat, als hier durch den numerischen Werth in $\frac{\Delta V}{V}$ für den Gyps angegeben ist, so ist es sehr wahrscheinlich daß $\frac{\Delta R'}{R'}$ einen bedeutenden negativen Werth hat, d. h. daß in der Richtung derjenigen thermischen

Axen, welche sehr nahe mit der Normale von

$$\left(\frac{1}{-2(\alpha' - \alpha) - \alpha} : \frac{1}{6}\beta : 1 \right)$$

zusammenfällt, eine starke Contraction stattfindet.

§. 7.

Es soll untersucht werden, ob die Messungen der Winkelveränderung sich mit der Annahme vertragen, daß die drei rechtwinkligen thermischen zusammenfallen mit den drei optischen Axen.

Unter optischen Axen verstehe ich die drei gegen einander rechtwinkligen, von Fresnel entdeckten und von ihm »Elasticitätsaxen« genannten. Eine dieser Elasticitätsaxen, das fordert die Symmetrie der zwei- und eingliedrigen Gestalten, und ist durch die Erfahrung bestätigt, fällt zusammen mit der Richtung, die wir mit B bezeichnet haben, d. h. steht senkrecht auf P ; die beiden anderen liegen in der Ebene P , und von diesen ist eine diejenige Richtung, welche Biot mit dem Namen *ligne intermédiaire*, Halbirungslinie, bezeichnet hat, die andere steht senkrecht gegen diese. Die Lage der Halbirungslinie hat Biot so bestimmt (wenn man von demjenigen abstrahirt, wodurch er ihre Lage in eine einfache Beziehung zu der von Haüy als Primitivform angenommenen Gestalt zu bringen sucht), daß sie mit der Durchschnittslinie der Fläche P mit T einen Winkel bildet von 16° bis 17° , und zwar so, daß wenn man sie sich als Diagonale einer schiefen Endfläche denkt, welche auf den Säulenkanten $\int$ gerad aufgesetzt ist, diese die stumpfe Kante zwischen M und T schief abstumpfen würde. Nehmen wir das Mittel aus den beiden Gränzen: $16^\circ \frac{1}{2}$, so hat die dadurch bestimmte Richtung eine Beziehung zu den krystallinischen Richtungen, die so einfach und charakteristisch ist, daß man sie als mehr denn zufällig anzusehen sehr geneigt seyn muß; sie halbiert nämlich genau den Winkel, welcher von der Normale der Fläche

M und der Normale der schiefen Endfläche, aus deren Diagonalzone die Flächen ν beobachtet sind, gebildet wird. Die erste der thermischen Axen, für welche $m = -2,050$, hat eine Lage, welche sich dieser optischen Axe so sehr nähert, daß es sehr wahrscheinlich scheint, daß beiderlei Richtungen zusammenfallen; stellen wir uns diese thermische Axe gleichfalls als die Diagonale einer schiefen Endfläche vor, so stumpft diese den stumpfen Winkel zwischen M und T schief ab, und zwar so, daß sie gegen T unter $11^\circ 54'$ geneigt ist; die Differenz zwischen diesen beiden Neigungen: $4^\circ 36'$ darf nicht als sehr groß erscheinen, wenn man bedenkt, daß die Lage der thermischen Axen ganz allein von den kleinen Winkelveränderungen abhängt, welche durch die Temperaturveränderung hervorgebracht werden, und Beobachtungsfehler bei diesen innerhalb der Secunden Fehler von einigen Graden in der Bestimmung der Lage der thermischen Axen hervorbringen können. *Es soll untersucht werden, welche Correctionen an den beobachteten Winkelveränderungen müßten angebracht werden, damit die thermischen Axen genau die Lage der von Biot bestimmten optischen Axen haben.*

Die Werthe von m und μ in (7) sind aus der Lage der beiden optischen Axen, welche in der Ebene P liegen, zu bestimmen; diese halbiren die Winkel zwischen der Normale der Fläche M und der Normale der schiefen Endfläche $\left(-\frac{1}{\alpha} : \infty \beta : 1\right)$. Setzt man $p = \text{arc}(tg = \alpha)$

und $q = \frac{90^\circ + p}{2}$, so ist:

$$\begin{aligned} m(\alpha' - \alpha) - \alpha &= -\text{tang } q \\ \mu(\alpha' - \alpha) - \alpha &= +\text{cotang } q. \end{aligned}$$

Hieraus zieht man:

$$(m + \mu)(\alpha' - \alpha) = 2\alpha + \text{cotg } q - \text{tang } q.$$

Setzt man statt q seinen Werth $\frac{90^\circ + p}{2}$, so hat man:

$$(m+\mu)(\alpha'-\alpha)=2\alpha-\frac{4\tan\frac{1}{2}p}{1-\tan^2\frac{1}{2}p}=0.$$

Es ist also:

$$m+\mu=0.$$

Setzt man diesen Werth für $m+\mu$ in die zweite der Gleichungen (17), so hat man:

$$\frac{1}{\alpha}+\alpha-A\frac{\Delta\alpha}{\Delta A}=0 \quad \text{oder} \quad \frac{\Delta\alpha}{\Delta A}=\frac{\alpha}{A}\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2}.$$

Berechnet man diesen Werth, so findet man:

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta A} 10,154,$$

wofür man setzen kann:

$$\Delta\alpha-\frac{10,154}{11,133}\Delta\alpha'=0.$$

In diese Gleichung sind die Werthe für $\Delta\alpha$ und $\Delta\alpha'$ aus (8) zu setzen:

$$0=0,3266\Delta k+1,025\Delta ll-0,6519\Delta ff \quad (a)$$

Dies ist die Relation, welche unter den beobachteten Winkelveränderungen bestehen muß, wenn die durch sie bestimmten thermischen Axen zusammenfallen sollen mit den optischen Axen. Setzt man $\Delta k=\Delta k+\delta k$, $\Delta ff=\Delta ff+\delta ff$, $\Delta ll=\Delta ll+\delta ll$, wo δk , δff , δll die an Δk . . . anzubringenden Correctionen sind, damit der Gleichung (a) genügt werde, so findet man:

$$0,8667m=-0,326\delta k-1,025\delta ll+0,6519\delta ff.$$

Bestimmt man hieraus δk , δll , δff , so dafs $(\delta k)^2+(\delta ll)^2+(\delta ff)^2$ ein Kleinstes sey, so findet man als Werthe der anzubringenden Correctionen:

$$\delta k=-0,179m=-10'',7$$

$$\delta ll=-0,562m=-33,7 \quad . \quad . \quad (b)$$

$$\delta ff=+0,357m=+21,4.$$

Unter diesen anzubringenden Correctionen trifft die größte auf Δll , und beträgt 33,7 Secunden; sie ist von der Art, dafs sie innerhalb der Beobachtungsfehler liegt, wie man sich überzeugt durch die Ansicht des Details der Messungen, welches Hr. Mitscherlich beim Kalkspath angibt, welche Substanz doch noch viel günstiger

für so feine Winkelbestimmung ist als der Gyps. Man muß also behaupten, *daß innerhalb der Beobachtungsfehler die beiderlei Axensysteme, das thermische und das optische, zusammenfallen.*

Um die linearen in Ausdehnungen den drei thermischen Axen, nachdem die gefundenen Correctionen an die beobachteten Winkelveränderungen angebracht sind, zu erhalten, hat man in (8) die corrigirten Werthe von Δk , Δff , Δll zu setzen, wodurch man erhält:

$$\Delta \alpha' = 11,593$$

$$\Delta \alpha = 10,554$$

$$\Delta \beta = - 3,955.$$

Diese Werthe in (13) substituirt, geben:

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta C}{C} - 1,7105 \cos^2 X + 9,544 \cos^2 Y \\ + 10,269 \cos X \cos Z.$$

Bezeichnen wir, der bequemerer Unterscheidung wegen, die lineare Ausdehnung der Einheit derjenigen thermischen Axe, welche mit der Halbirungslinie zusammenfällt mit $\frac{\Delta c}{c}$, derjenigen, welche auf der, die Gestalt symmetrisch theilenden Ebene senkrecht steht mit $\frac{\Delta b}{b}$, und endlich der dritten, gegen jene beiden senkrechten mit $\frac{\Delta a}{a}$, so haben wir:

$$\left\{ \begin{array}{l} Z = 49^\circ 44' \\ X = 139 \quad 44 \\ Y = 9 \end{array} \right\} \frac{\Delta c}{c} = \frac{\Delta C}{C} - 6,060 m = \frac{\Delta C}{C} - 0,001765$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Z = 40^\circ 16' \\ X = 49 \quad 44 \\ Y = 9 \end{array} \right\} \frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta C}{C} + 4,350 m = \frac{\Delta C}{C} + 0,001266$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Z = 90, \quad X = 90, \quad Y = 0 \end{array} \right\} \frac{\Delta b}{b} = \frac{\Delta C}{C} + 9,544 m = \frac{\Delta C}{C} + 0,002777$$

oder:

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta c}{c} + 003029$$

$$\frac{\Delta b}{b} = \frac{\Delta c}{c} + 0,004540$$

$$\frac{\Delta v}{v} = 3 \frac{\Delta c}{c} + 0,007569.$$

§. 8.

Wenn die verschiedenen Flächen eines Krystallsystems auf drei gegen einander rechtwinklige Linien bezogen werden, und diese als die krystallinischen Axen angesehen werden sollen, so können diefs keine andern seyn, als die drei thermischen Axen, weil diefs das einzige Axensystem ist, welches als ein bleibendes, also als ein wirklich vorhandenes behandelt werden kann; jedes andere rechtwinklige Axensystem hört auf diefs zu seyn mit dem veränderten Druck der umgebenden Atmosphäre, mit der veränderten Temperatur der Krystallform. — Es sollen die Ausdrücke der Flächen des Gypssystems in Beziehung auf die drei optischen Axen, mit denen, wie gezeigt ist, die thermischen als zusammenfallend angesehen werden können, gesucht werden. — Die von Biot sogenannte Halbirungslinie (*ligne intermédiaire*) sey die Axe c , die Axe des b bleibe senkrecht auf P , die Axe a stehe senkrecht auf b und c . In Beziehung auf diese Dimensionen sey der Ausdruck irgend einer Fläche $\left(\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}b : c\right)$ und es sey X der Winkel, der die Fläche $\left(\frac{1}{m}a, \infty b : c\right)$ mit der Axe a bildet, und Y derjenige, der die Fläche $\left(\infty : \frac{1}{n}b : c\right)$ mit der Axe b bildet, alsdann hat man:

$$m \frac{c}{a} = \tan X$$

$$n \frac{c}{b} = \frac{\tan Y}{\cos X}.$$

Die

Die Winkel X und Y sind aus dem Schema, Fig. 2 Taf. III, unmittelbar zu entnehmen; man findet:

$$1) \text{ für die Fläche } M: 0,84706 = m \frac{c}{a}$$

$$2) \text{ für die Flächen } l, l': 0,21255 = m' \frac{c}{a}$$

$$3) \text{ für die Fläche } T: 3,37594 = m'' \frac{c}{a}$$

Diese Zahlenwerthe stehen unter einander so nahe in dem Verhältniß $1 : \frac{1}{4} : 4$, daß die strenge Annahme dieses Verhältnisses sich mit den Beobachtungen verträgt.

Suchen wir die Werthe von $\frac{nc}{b}$ für die verschiedenen Flächen des Systemes, so finden wir:

$$1) \text{ für die Flächen } f: 0,89455 = \frac{n}{c} b$$

$$2) \text{ für die Flächen } l: 0,33514 = \frac{n'}{c} b$$

$$3) \text{ für die Flächen } v: 0,53549 = \frac{n''}{c} b$$

$$4) \text{ für die Flächen } r: 1,33513 = \frac{n'''}{c} b$$

und diese Zahlen stehen wieder sehr nahe in den Verhältnissen $1 : \frac{3}{8} : \frac{3}{5} : \frac{3}{2}$. Nehmen wir diese Verhältnisse als streng an, setzen $n=1$, $n'=\frac{3}{8}$ etc., und $\frac{c}{b}=0,8927$,

und $\frac{c}{a}=0,84708$, und $m=1$, $m'=\frac{1}{4}$ etc., und berechnen die vier Winkel des Systemes, welche als von mir gemessen in §. 1 angegeben sind, so zeigt folgende Tafel den Grad der Uebereinstimmung mit den Beobachtungen:

	Beobachtete Winkel.	Dieuntersich corrigirten Winkel.	Berechnete Winkel.	<i>d.</i>
<i>ff</i>	68° 35',4	68° 38'	68° 32'	+ 3',4
<i>ll'</i>	36 15,7	36 18	36 16	— 0,3
<i>fl</i>	107 37,1	107 44	107 49	—11,9
<i>fl'</i>	131 5,0	131 0	131 2	+ 3

Die Uebereinstimmung zwischen den gemessenen Winkeln und den aus unserer Hypothese hervorgehenden ist in der That so groß, wie man sie nur erwarten kann, zumal wenn man die aus dieser Hypothese berechneten Winkel vergleicht mit denen, in welche die gemessenen Winkel durch die möglichst kleinsten Abänderungen mußten verwandelt werden, um sie unter einander in Uebereinstimmung zu bringen; die einzige erhebliche Differenz zwischen den berechneten Winkeln und den beobachteten fällt auf den Winkel *fl*, gerade auf denjenigen, welcher am unsichersten aus der Messung hervorgeht, da sein mittlerer Fehler beinahe 3',5 ist (siehe die Beobachtungstafel §. 1), während er bei den anderen 1',5 etwa nur beträgt.

Die Flächen haben also eine einfache und unmittelbare Beziehung auf dieses Axensystem, das also auch in dieser Hinsicht als das krystallographische angesehen werden muß; ihre Ausdrücke sind:

$$\begin{array}{ll}
 f..(-a : b : c) & n..(\frac{1}{4}a : \frac{2}{3}b : c) \\
 M..(-a : \infty b : c) & T'..(\frac{1}{4}a : \infty b : c) \\
 o..(-a : \frac{1}{2}b : c) & x..(\frac{1}{4}a : \frac{1}{3}b : c) \\
 r..(-a : \frac{1}{3}b : c) & s..(\frac{1}{4}a : \frac{2}{3}b : c) \\
 l..(a : \frac{2}{3}b : \frac{1}{4}c) & u..(\frac{1}{3}a : \frac{2}{3}b : \frac{1}{2}c) \\
 k..(\frac{1}{2}a : \frac{1}{3}b : \frac{1}{3}c) & w..(\frac{1}{4}a : 2b : \frac{1}{2}c) \\
 v..(a : \frac{5}{3}b : c) & E..(\frac{1}{3}a : \infty b : \frac{1}{2}c)
 \end{array}$$

$$a : a : c = 1,1805 : 1,1202 : 1.$$