Generalizzazione di alcuni punti della teoria delle equazioni integrali di Fredholm.

(Di PIA NALLI, a Palermo.)

È noto che, data in una forma geometrica di prima specie una proiettività reale non ellittica e non involutoria, ciascuno degli elementi uniti della proiettività può essere approssimato, iterando su un elemento qualunque della forma la proiettività data o la sua inversa.

Ho pensato che qualche cosa di simile potrà avvenire nel campo del calcolo funzionale.

Data l'operazione funzionale $F[\varphi(s)]$, che cosa succederà iterando sopra una funzione $\varphi(s)$ l'operazione F o la sua inversa, dato che questa inversa si possa definire?

Per il caso in cui si ha

$$F[\varphi(s)] = \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt,$$

essendo $K(s, t)$ una funzione continua e simmetrica nel dominio $a \leq s \leq b$, $a \leq t \leq b$, la risposta si può trovare nei lavori del VERGERIO (*).

Ponendo

$$F_1[\varphi(s)] = F[\varphi(s)],$$

$$F_n[\varphi(s)] = F[F_{n-1}[\varphi(s)]] \quad (n = 2, 3, \dots)$$

se è $F[\varphi(s)] \equiv 0$ esiste una costante c tale da avere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{2n}[\varphi(s)]}{c^n} = f(s),$$

dove $f(s)$ è una funzione continua.

(*) A. VERGERIO, *Sulle equazioni integrali del tipo Fredholm* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XLI (1916), pp. 1-35].

La funzione $f(s)$ non è identicamente nulla e si possono dare due casi: o $f(s)$ soddisfa all'eguaglianza

$$\sqrt{c} f(s) = F[f(s)],$$

$\sqrt{c}$ essendo presa con segno conveniente, ovvero è $f(s) = f_1(s) + f_2(s)$ e si ha

$$\begin{aligned}\sqrt{c} f_1(s) &= F[f_1(s)], \\ -\sqrt{c} f_2(s) &= F[f_2(s)].\end{aligned}$$

Se consideriamo come identiche due funzioni che differiscono per una costante moltiplicativa, possiamo dire che nel primo caso $f(s)$ è un elemento unito nella corrispondenza funzionale $\psi(s) = F[\varphi(s)]$ — cioè nella corrispondenza che fa passare dalla funzione $\varphi(s)$ alla $\psi(s)$ — e nel secondo caso sono elementi uniti $f_1(s)$ ed $f_2(s)$.

Per l'operazione qui esaminata non è possibile definire l'operazione inversa, ossia l'operazione $G[\varphi(s)]$ tale da avere $G[F[\varphi(s)]] = \varphi(s)$.

Ho pensato di considerare l'operazione funzionale lineare più generale

$$F[\varphi(s)] = k(s) \varphi(s) + \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt,$$

dove $k(s)$ è limitata in (a, b) , $K(s, t)$ è a quadrato sommabile nel dominio $a \leq s \leq b$, $a \leq t \leq b$, operazione per la quale, sotto certe condizioni, è possibile definire l'operazione inversa $G[\varphi(s)]$.

Definite le $F_n[\varphi(s)]$ e $G_n[\varphi(s)]$ analogamente a quanto si è fatto precedentemente, fissata $\varphi(s)$ può esistere una costante $c(d)$ tale che la successione di funzioni

$$\frac{F_{2n}[\varphi(s)]}{c^n}, \quad \left(\frac{G_{2n}[\varphi(s)]}{d^n} \right)$$

converga in media verso una funzione $f(s)$ ($g(s)$) la quale o è un elemento unito nella corrispondenza $\psi(s) = F[\varphi(s)]$ ovvero è la somma di due elementi uniti.

Viene così messo in vista che nelle questioni del genere di quelle da me trattate il concetto di convergenza in media è quello che si presenta come il più adatto alla natura delle questioni e solo in casi particolari può essere sostituito dal concetto di convergenza ordinaria.

Gli elementi uniti nella corrispondenza

$$\psi(s) = \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt$$

sono le funzioni fondamentali nel senso di FREDHOLM relative al nucleo $K(s, t)$: tale concetto viene così esteso ad una coppia di funzioni $K(s, t)$, $k(s)$.

E qui si presentano spontanee una quantità di domande quando si tengano presenti i risultati delle ricerche a cui ha dato impulso l'equazione di FREDHOLM a nucleo simmetrico.

Un nucleo simmetrico si può rappresentare per mezzo delle sue funzioni fondamentali nel senso di FREDHOLM.

Tale rappresentazione è suscettibile di una generalizzazione quando si generalizzino nel modo suddetto le funzioni fondamentali?

La risposta affermativa a tale domanda quando $k(s)$ prende un numero finito di valori si troverà nel presente lavoro, ma in generale la generalizzazione non è possibile. In generale, insieme alle funzioni fondamentali generalizzate bisognerà considerare le *funzioni differenziali fondamentali generalizzate*, estensione di quelle introdotte nella teoria dell'equazione singolare di FREDHOLM e che è necessario considerare qui anche nel caso di regolarità.

Diremo che una funzione $f(s, \lambda)$, a quadrato sommabile rispetto ad s nell'intervallo (a, b) e tale che $\int_a^b f^2(s, \lambda) ds$ rappresenti una funzione $\rho_0(\lambda)$ continua e limitata per λ variabile in $(-\infty, \infty)$, è una funzione differenziale fondamentale relativa a $K(s, t)$ e $k(s)$ quando per ogni intervallo (λ_1, λ_2) , ponendo

$$\Delta f(s, \lambda) = f(s, \lambda_2) - f(s, \lambda_1),$$

$$\int_a^b \lambda d_\lambda f(s, \lambda) = \lambda_2 f(s, \lambda_2) - \lambda_1 f(s, \lambda_1) - \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} f(s, \lambda) d\lambda,$$

si ha

$$k(s) \Delta f(s, \lambda) + \int_a^b K(s, t) \Delta f(t, \lambda) dt = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \lambda d_\lambda f(s, \lambda).$$

Per le equazioni singolari di FREDHOLM le funzioni differenziali fondamentali sono state introdotte in seguito alle ricerche sulle forme quadratiche ad infinite variabili. Anche nel caso più generale che stiamo esaminando trova applicazione la teoria delle forme quadratiche, come è accennato altrove nel presente lavoro.

Concludendo: i risultati finora da me ottenuti mi fanno ritenere che la teoria delle equazioni di FREDHOLM a nucleo simmetrico, sia regolari che singolari, è compresa in una teoria più generale alla quale conduce naturalmente la considerazione dell'operazione funzionale

$$F[\varphi(s)] = k(s)\varphi(s) + \int_a^b K(s, t)\varphi(t)dt.$$

I problemi nei quali ha trovato applicazione la teoria delle equazioni di FREDHOLM potranno in corrispondenza venire generalizzati.

Notiamo finalmente che alla teoria di cui sopra si riattacca quella dell'equazione integrale di terza specie

$$f(s) = k(s)\varphi(s) + \lambda \int_a^b K(s, t)\varphi(t)dt,$$

che sarebbe forse più conveniente di considerare sotto la forma

$$f(s) = \lambda [k(s)\varphi(s) + \int_a^b K(s, t)\varphi(t)dt].$$

Richiamo brevemente alcune definizioni da me introdotte in alcune Note di recente pubblicazione ed alcuni risultati in esse contenuti (*).

Sia $K(s, t)$ una funzione reale definita nel dominio $a \leq s \leq b$, $a \leq t \leq b$, simmetrica ed a quadrato sommabile in detto dominio, e $k(s)$ una funzione reale, misurabile, limitata, definita in (a, b) .

Definisco le funzioni

$$K^{(1)}(s, t), K^{(2)}(s, t), \dots, K^{(n)}(s, t), \dots$$

per mezzo delle relazioni

$$K^{(1)}(s, t) = K(s, t),$$

$$K^{(n)}(s, t) = k(s)K^{(n-1)}(s, t) + \int_a^b K(v, s)K^{(n-1)}(v, t)dv + \\ + k^{n-1}(t)K(s, t) \quad (n = 2, 3, \dots),$$

e chiamo $K^{(n)}(s, t)$ *n-esimo nucleo iterato di $K(s, t)$ per mezzo di $k(s)$* .

(*) P. NALLI, *Sulle equazioni integrali*, Note I, II, III, IV, V, VI, Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, Roma, 2° semestre 1918 e 1° semestre 1919.

$K^n(s, t)$ è funzione simmetrica.

Data una funzione $g_0(s)$ reale ed a quadrato sommabile in (a, b) definisco le funzioni

$$g_1(s), g_2(s), \dots, g_n(s), \dots$$

per mezzo delle relazioni

$$g_n(s) = k(s) g_{n-1}(s) + \int_a^b K(s, t) g_{n-1}(t) dt \quad (n = 1, 2, \dots),$$

e chiamo $g_n(s)$ *n-esima iterata diretta di $g_0(s)$ relativa a $K(s, t)$ e $k(s)$* .

Sussiste la relazione

$$g_n(s) = k^n(s) g_0(s) + \int_a^b K^{(n)}(s, t) g_0(t) dt.$$

Se m, n ed r sono tre interi non negativi ed $r \leq n$, tra le iterate dirette di due funzioni $f_0(s)$ e $g_0(s)$ si ha la relazione

$$\int_a^b f_n(s) g_m(s) ds = \int_a^b f_{n-r}(s) g_{m+r}(s) ds. \quad (\text{I})$$

Se una funzione $\varphi(s)$ che ha il quadrato del modulo sommabile in (a, b) soddisfa alla relazione

$$[\mu - k(s)] \varphi(s) = \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt \quad (*)$$

con μ costante, chiameremo $\varphi(s)$ *funzione fondamentale* e μ *costante caratteristica relativa a $K(s, t)$ e $k(s)$* .

Se il prodotto $[\mu - k(s)] \varphi(s)$ non è nullo identicamente chiameremo $\varphi(s)$ *funzione fondamentale propria*, la diremo *impropria* nel caso contrario.

Una costante caratteristica la diremo *propria* se ad essa corrisponde almeno una funzione fondamentale propria, *impropria* nel caso contrario.

Per due funzioni fondamentali $\varphi_1(s)$ e $\varphi_2(s)$ corrispondenti a costanti caratteristiche distinte si ha

$$\int_a^b \varphi_1(s) \varphi_2(s) ds = 0. \quad (\text{II})$$

(*) Avvertiamo una volta per sempre che una eguaglianza tra funzioni la intendiamo soddisfatta quasi dappertutto, fatta cioè eventualmente eccezione per un insieme di punti di misura nulla (misura lineare o superficiale a seconda dei casi).

Le costanti caratteristiche sono reali e formano un insieme numerabile.

Una funzione fondamentale relativa a $K(s, t)$ e $k(s)$ corrispondente alla costante μ lo è anche relativamente a $K^{(n)}(s, t)$ e $k^{(n)}(s)$ e corrisponde alla costante μ^n .

Una funzione $\varphi(s)$ fondamentale relativamente a $K^{(n)}(s, t)$ e $k^{(n)}(s)$ corrispondente alla costante μ , o è funzione fondamentale relativamente a $K(s, t)$ e $k(s)$ e corrisponde ad uno dei valori reali di $\sqrt[n]{\mu}$ (e si presenta questo caso se n è dispari o se $\mu = 0$) ovvero (e questo può succedere se n è pari) $\varphi(s)$ è la somma di due funzioni $\varphi'(s)$ e $\varphi''(s)$ fondamentali relativamente a $K(s, t)$ e $k(s)$ e corrispondenti rispettivamente alle costanti $\pm \sqrt[n]{\mu}$.

Se μ è una costante caratteristica propria relativa a $K(s, t)$ e $k(s)$ esiste una ed una sola funzione reale $\Gamma(st)$ a quadrato sommabile nel dominio $a \leq s \leq b$, $a \leq t \leq b$ soddisfacente all'eguaglianza

$$[\mu - k(s)] \Gamma(s, t) = \int_a^b K(v, s) \Gamma(v, t) dv$$

tale che, qualunque sia la funzione fondamentale $\varphi(s)$ corrispondente a μ , si abbia

$$[\mu - k(s)] \varphi(s) = \int_a^b \Gamma(t, s) \varphi(t) dt.$$

In particolare sarà

$$[\mu - k(s)] \Gamma(s, t) = \int_a^b \Gamma(v, s) \Gamma(v, t) dv. \quad (\text{III})$$

Chiameremo $\Gamma(s, t)$ *funzione caratteristica relativa a $K(s, t)$ e $k(s)$, corrispondente alla costante μ .*

Se $\Gamma_1(s, t), \Gamma_2(s, t), \dots$ sono funzioni caratteristiche distinte relative a $K(s, t)$ e $k(s)$, la successione delle somme parziali della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n(s, t)$$

converge in media nel dominio $a \leq s \leq b$, $a \leq t \leq b$ (*), cioè esiste una funzione $H(s, t)$ reale ed a quadrato sommabile nel detto dominio per la quale

(*) E. FISCHER, *Sur la convergence en moyenne*. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. Paris, Tome 144, 1^{er} semestre 1907, pp. 1022-1024.

si ha

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b \int_a^b \left[H(s, t) - \sum_{n=1}^m \Gamma_n(s, t) \right]^2 ds dt = 0.$$

Si ha

$$\int_a^b \int_a^b H^2(s, t) ds dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \int_a^b \Gamma_n^2(s, t) ds dt$$

e

$$\int_a^b \int_a^b K^2(s, t) ds dt \geq \int_a^b \int_a^b H^2(s, t) ds dt.$$

Se $\Gamma(s, t)$ è la funzione caratteristica relativa a $K(s, t)$ e $k(s)$ corrispondente alla costante μ ed n è dispari, la funzione caratteristica relativa a $K^{(n)}(s, t)$ e $k^n(s)$ corrispondente a μ^n è

$$\Gamma(s, t) \sum_{i=0}^{n-1} \mu^i k^{n-i-1}(t).$$

Se n è pari, condizione necessaria e sufficiente perchè μ^n sia una costante caratteristica propria relativa a $K^{(n)}(s, t)$ e $k^n(s)$ è che la funzione

$$\Gamma(s, t) \sum_{i=0}^{n-1} \mu^i k^{n-i-1}(t) + \Gamma'(s, t) \sum_{i=0}^{n-1} (-\mu)^i k^{n-i-1}(t),$$

(dove con $\Gamma'(s, t)$ denotiamo la funzione caratteristica relativa a $K(s, t)$ e $k(s)$ corrispondente a $-\mu$, se questa è una costante caratteristica propria, e poniamo $\Gamma'(s, t) \equiv 0$ nel caso contrario) non sia identicamente nulla. Quando la detta funzione non è nulla identicamente essa è la funzione caratteristica relativa a $K^{(n)}(s, t)$ e $k^n(s)$ corrispondente alla costante μ^n .

Scopo principale del presente lavoro è di dimostrare il teorema seguente: *se per qualche valore di n la successione delle somme parziali della serie formata con le funzioni caratteristiche relative a $K^{(n)}(s, t)$ e $k^n(s)$ converge in media verso $K^{(n)}(s, t)$ nel dominio $a \leq s \leq b$, $a \leq t \leq b$, lo stesso accadrà per $n = 1$, e quindi per qualunque n .*

1. Sia $n > 1$ e indichiamo con $R_1(s, t)$, $R_2(s, t)$, ... le funzioni caratteristiche relative a $K^{(n)}(s, t)$ e $k^n(s)$, corrispondenti rispettivamente alle costanti λ_1 , λ_2 , ...

Supponiamo che nel dominio $a \leq s \leq b$, $a \leq t \leq b$ la successione delle somme parziali della serie

$$\sum_m R_m(s, t)$$

converga in media verso $K^{(n)}(s, t)$, ciò che indichiamo nel seguente modo

$$K^{(n)}(s, t) \sim \sum_m R_m(s, t).$$

Denotiamo con $\mu_1, \mu_2, \dots$ le costanti caratteristiche proprie relative a $K(s, t)$ e $k(s)$ che sono radici n^{esima} delle λ_m e con $\Gamma_1(s, t), \Gamma_2(s, t), \dots$ le corrispondenti funzioni caratteristiche.

Da quanto abbiamo premesso risulta che si può porre

$$K^{(n)}(s, t) \sim \sum_m \Gamma_m(s, t) \sum_{i=0}^{n-1} \mu_m^i k^{n-i-1}(t). \quad (1)$$

Dimostreremo che se n è *dispari* si avrà

$$K(s, t) \sim \sum_m \Gamma_m(s, t),$$

e se n è *pari*: o vale ancora la relazione precedente, ovvero si ha

$$K(s, t) \sim \sum_m \Gamma_m(s, t) + \sum_m \Delta_m(s, t),$$

dove $\Delta_m(s, t)$ è la funzione caratteristica relativa a $K(s, t)$ e $k(s)$ corrispondente ad una costante μ'_m , diversa da tutte le μ_m , ed è

$$[\mu'_m + k(t)] \Delta_m(s, t) \equiv 0.$$

Poniamo

$$K(s, t) \sim \sum_m \Gamma_m(s, t) + P(s, t):$$

sarà, per qualunque m ,

$$\int_a^b P(v, s) \Gamma_m(v, t) dv \equiv 0. \quad (2)$$

Ricordiamo la formula

$$K^{(n+1)}(s, t) = k(s) K^{(n)}(s, t) + \int_a^b K(v, s) K^{(n)}(v, t) dv + k^n(t) K(s, t).$$

Abbiamo, per la (2),

$$\int_a^b K(v, s) K^{(n)}(v, t) dv \sim \sum_{i,j} \sum_{p=0}^{n-1} k^{n-p-1}(t) \int_a^b \Gamma_i(v, s) \Gamma_j(v, t) dv$$

e, per le (II) e (III),

$$\int_a^b K(v, s) K^{(n)}(v, t) dv \sim \sum_m [\mu_m - k(s)] \Gamma_m(s, t) \sum_{i=0}^{n-1} \mu_m^i k^{n-i-1}(t),$$

quindi possiamo scrivere

$$K^{(n+1)}(s, t) \sim \sum_m \Gamma_m(s, t) \sum_{i=0}^n \mu_m^i k^{n-i}(t) + k^n(t) P(s, t). \quad (3)$$

Ma si può anche scrivere

$$K^{(n+1)}(s, t) = k(s) K^{(n)}(t, s) + \int_a^b K(v, s) K^{(n)}(v, t) dv + k^n(t) K(t, s)$$

e siccome, per la (III), $[\mu_m - k(s)] \Gamma_m(s, t)$ è funzione simmetrica di s e t , avremo

$$K^{(n+1)}(s, t) \sim \sum_m \Gamma_m(t, s) \left\{ k(s) \sum_{i=0}^{n-1} \mu_m^i k^{n-i-1}(s) + [\mu_m - k(t)] \sum_{i=0}^{n-1} \mu_m^i k^{n-i-1}(t) + k^n(t) \right\} + k^n(t) P(t, s)$$

cioè

$$K^{(n+1)}(s, t) \sim \sum_m \Gamma_m(t, s) \sum_{i=0}^n \mu_m^i k^{n-i}(s) + k^n(t) P(t, s).$$

Confrontando questa con la (3), per la simmetria di $K^{(n+1)}(s, t)$, concludiamo

$$k^n(s) P(s, t) = k^n(t) P(s, t). \quad (4)$$

2. Supponiamo dapprima n dispari. La (4) ci dà

$$k(s) P(s, t) = k(t) P(s, t): \quad (5)$$

faremo vedere che è $P(s, t) \equiv 0$.

Infatti, supposto che ciò non sia, si può porre

$$P(s, t) \sim \sum_n \lambda_n \sum_{m=1}^{m_n} \chi_m^{(n)}(s) \sigma_m^{(n)}(t), \quad (6)$$

dove le $\chi_m^{(n)}(s)$, quando si fanno variare m ed n , formano un sistema orto-

gonale nell'intervallo (a, b) ed un altro ne formano le $\sigma_m^{(n)}(s)$, le λ_n sono costanti positive distinte (*).

La (5) ci darà dunque

$$\left. \begin{aligned} \int_a^b P(s, t) k(t) \sigma_m^{(n)}(t) dt &= \lambda_n k(s) \chi_m^{(n)}(s) \\ \int_a^b P(s, t) k(s) \chi_m^{(n)}(s) ds &= \lambda_n k(t) \sigma_m^{(n)}(t). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Facciamo, per esempio, $n=1$ e per semplicità sopprimiamo l'apice (1) e indichiamo m , con p .

Per le (7) si avrà

$$\begin{aligned} k(s) \chi_i(s) &= \sum_{r=1}^p a_{ir} \chi_r(s); \quad k(s) \sigma_i(s) = \sum_{r=1}^p a_{ir} \sigma_r(s), \\ (i &= 1, 2, \dots, p), \end{aligned}$$

dove le a_{ir} sono costanti (*). Essendo

$$a_{ir} = \int_a^b k(s) \chi_i(s) \chi_r(s) ds,$$

il determinante formato con le a_{ir} è simmetrico.

Esso è diverso da zero.

Infatti, supponiamolo nullo: potremo determinare p costanti $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ non tutte nulle, in modo che, ponendo

$$\chi(s) = \sum_{r=1}^p \alpha_r \chi_r(s), \quad \sigma(s) = \sum_{r=1}^p \alpha_r \sigma_r(s),$$

si abbia $k(s) \chi(s) = 0, k(s) \sigma(s) = 0$. Sarà anche

$$\int_a^b P(s, t) \sigma(t) dt = \lambda_1 \chi(s), \quad \int_a^b P(s, t) \chi(s) ds = \lambda_1 \sigma(t),$$

e, per la (2),

$$\int_a^b \Gamma_m(s, t) \chi(s) ds = 0,$$

(*) E. SCHMIDT, *Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen*, I. Teil: *Entwicklung willkürlichen Funktionen nach Systemen vorgeschriebener* [Mathematische Annalen, Bd. 63 (1907), pp. 433-476].

quindi

$$\int_a^b K^{(n)}(s, t) \chi(t) dt = 0,$$

che si può scrivere

$$k^n(s) \chi(s) + \int_a^b K^n(s, t) \chi(t) dt = 0,$$

cioè $\chi(s)$ è funzione fondamentale relativamente a $K^{(n)}(s, t)$ e $k^n(s)$ e corrisponde alla costante zero, sarà perciò

$$k(s) \chi(s) + \int_a^b K(s, t) \chi(t) dt = 0,$$

cioè

$$\int_a^b K(s, t) \chi(t) dt = 0.$$

Ma è

$$\int_a^b K(s, t) \chi(t) dt = \int_a^b P(t, s) \chi(t) dt = \lambda_1 \sigma(s),$$

quindi sarà $\sigma(s) = 0$, il che non è possibile.

Il determinante formato con le a_{ir} è dunque diverso da zero.

Sia ora

$$x_i = \sum_{r=1}^p b_{ri} y_r \quad (i = 1, 2, \dots, p)$$

una sostituzione lineare ortogonale che riduce la forma quadratica

$$\sum_{i,r} a_{ir} x_i x_r$$

alla forma canonica $\sum_{j=1}^p \rho_j y_j^2$: le ρ_j saranno tutte diverse da zero.

Avremo

$$\rho_n b_{ni} = \sum_{r=1}^p a_{nr} b_{ri} \quad (n = 1, 2, \dots, p; \quad i = 1, 2, \dots, p)$$

e

$$\sum_{r=1}^p b_{nr} b_{mr} = \begin{cases} 0 & (n \neq m) \\ 1 & (n = m) \end{cases}.$$

Se ora poniamo

$$\psi_n(s) = \sum_{i=1}^p b_{ni} \sigma_i(s) \quad (n = 1, 2, \dots, p),$$

le $\psi_n(s)$ formeranno un sistema ortogonale equivalente a quello delle $\sigma_n(s)$.

Dalle relazioni

$$k(s) \sigma_i(s) = \sum_{r=1}^p a_{ir} \sigma_r(s),$$

moltiplicando la relazione generica per b_{ni} e sommando membro a membro le p relazioni ottenute, si ha

$$k(s) \psi_n(s) = \sum_{r=1}^p \sigma_r(s) \sum_{i=1}^p a_{ir} b_{ni},$$

cioè, essendo $a_{ir} = a_{ri}$,

$$k(s) \psi_n(s) = \rho_n \sum_{r=1}^p b_{nr} \sigma_r(s),$$

e finalmente

$$k(s) \psi_n(s) = \rho_n \psi_n(s).$$

Se poniamo

$$\varphi_n(s) = \sum_{i=1}^p b_{ni} \chi_i(s)$$

sarà

$$k(s) \varphi_n(s) = \rho_n \varphi_n(s)$$

e

$$\sum_{n=1}^p \chi_n(s) \sigma_n(t) = \sum_{n=1}^p \varphi_n(s) \psi_n(t).$$

Si può quindi supporre senz'altro che le $\chi_i(s)$ e le $\sigma_i(s)$ soddisfino ad eguaglianze del tipo

$$[\rho_i - k(s)] \chi_i(s) = 0, \quad [\rho_i - k(s)] \sigma_i(s) = 0,$$

dove le ρ_i sono costanti non nulle, sostituendo, ove occorra, alle $\chi_i(s)$ ed alle $\sigma_i(s)$ rispettivamente le $\varphi_i(s)$ e le $\psi_i(s)$.

Avremo dunque

$$[\rho_i^n - k^n(s)] \chi_i(s) = 0$$

che insieme all'eguaglianza

$$\int_a^b K^{(n)}(s, t) \chi_i(t) dt = 0$$

ci dà

$$[\rho_i^n - k^n(s)] \chi_i(s) = \int_a^b K^{(n)}(s, t) \chi_i(t) dt.$$

Da questa, essendo n dispari, si trae

$$[\rho_i - k(s)] \chi_i(s) = \int_a^b K(s, t) \chi_i(t) dt, \quad \int_a^b K(s, t) \chi_i(t) dt = 0,$$

cioè $\sigma_i(s) = 0$, contrariamente al supposto.

3. Supponiamo ora n pari. Faremo vedere che se $P(s, t)$ non è identicamente nulla esiste almeno una costante caratteristica propria relativa a $K(s, t)$ e $k(s)$ diversa dalle $\mu_1, \mu_2, \dots$

Dalla (4) si trae

$$k^2(s) P(s, t) = k^2(t) P(s, t).$$

Supposta $P(s, t)$ non identicamente nulla si può scrivere la (6) e quindi si conclude, analogamente a quanto si è detto al numero precedente,

$$k^2(s) \chi_i(s) = \sum_{r=1}^p a_{ir} \chi_r(s); \quad k^2(s) \sigma_i(s) = \sum_{r=1}^p a_{ir} \sigma_r(s).$$

Il determinante simmetrico formato con le a_{ir} è diverso da zero, perchè si è visto al numero precedente che le $k(s) \chi_i(s)$ sono linearmente indipendenti e quindi lo sono anche le $k^2(s) \chi_i(s)$.

Concludiamo dunque come al numero precedente che si può supporre senz'altro che le $\chi_i(s)$ soddisfino ad uguaglianze del tipo $[\rho_i - k^2(s)] \chi_i(s) = 0$, dove le ρ_i sono costanti positive.

Avremo dunque

$$[(\sqrt{\rho_i})^n - k^n(s)] \chi_i(s) = \int_a^b K^{(n)}(s, t) \chi_i(t) dt,$$

perchè ambo i membri hanno valore nullo.

Ed allora si possono dare due casi: o si ha

$$[\sqrt{\rho_i} - k(s)] \chi_i(s) = \int_a^b K(s, t) \chi_i(t) dt, \quad (8)$$

$\sqrt{\rho_i}$ essendo presa con segno conveniente, ed essendo

$$\int_a^b K(s, t) \chi_i(t) dt = \lambda_1 \sigma_i(s)$$

$\sqrt{\rho_i}$ è costante caratteristica propria relativa a $K(s, t)$ e $k(s)$. Inoltre, essendo

$$\int_a^b \Gamma_m(t, s) \chi_i(t) dt = 0,$$

$\sqrt{\rho_i}$ è diversa da tutte le μ_m .

Se la (8) non è soddisfatta, posto

$$u_i(s) = \sqrt{\rho_i} \chi_i(s) + k(s) \chi_i(s) + \int_a^b K(s, t) \chi_i(t) dt,$$

$$v_i(s) = -\sqrt{\rho_i} \chi_i(s) + k(s) \chi_i(s) + \int_a^b K(s, t) \chi_i(t) dt,$$

queste sono funzioni fondamentali relative a $K(s, t)$ e $k(s)$, corrispondenti rispettivamente alle costanti $\sqrt{\rho_i}$ e $-\sqrt{\rho_i}$.

Si ha

$$u_i(s) = [\sqrt{\rho_i} + k(s)] \chi_i(s) + \lambda_1 \sigma_i(s),$$

$$v_i(s) = [-\sqrt{\rho_i} + k(s)] \chi_i(s) + \lambda_1 \sigma_i(s),$$

quindi

$$[\sqrt{\rho_i} - k(s)] u_i(s) = \lambda_1 [\sqrt{\rho_i} - k(s)] \sigma_i(s),$$

$$[-\sqrt{\rho_i} - k(s)] v_i(s) = \lambda_1 [-\sqrt{\rho_i} - k(s)] \sigma_i(s),$$

e di qui si vede che i due primi membri non possono essere entrambi nulli, cioè uno almeno dei due valori di $\sqrt{\rho_i}$ è costante caratteristica propria relativa a $K(s, t)$ e $k(s)$.

Essendo poi

$$\int_a^b \Gamma_m(t, s) \chi_i(t) dt = 0$$

sarà pure, per la (I),

$$\int_a^b \Gamma_m(t, s) u_i(t) dt = 0, \quad \int_a^b \Gamma_m(t, s) v_i(t) dt = 0$$

e perciò la costante caratteristica propria che abbiamo trovata è diversa da tutte le μ_m .

Indichiamo con $\Delta_1(s, t)$, $\Delta_2(s, t)$, ... le funzioni caratteristiche relative a $K(s, t)$ e $k(s)$ diverse dalle $\Gamma_m(s, t)$ e $\mu'_1, \mu'_2, \dots$ le corrispondenti costanti

caratteristiche. Qualunque siano m ed r si avrà

$$\int_a^b \Gamma_m(v, s) \Delta_r(v, t) dv = 0,$$

quindi

$$\int_a^b K^{(n)}(v, s) \Delta_r(v, t) dv = 0,$$

ma essendo

$$[\mu'_r - k(s)] \Delta_r(s, t) = \int_a^b K(v, s) \Delta_r(v, t) dv$$

sarà

$$[\mu''_r - k''(s)] \Delta_r(s, t) = \int_a^b K^{(n)}(v, s) \Delta_r(v, t) dv$$

cioè

$$[\mu''_r - k''(s)] \Delta_r(s, t) \equiv 0. \quad (9)$$

Ma è anche

$$[\mu'_r - k(s)] \Delta_r(s, t) = \int_a^b \Delta_r(v, s) \Delta_r(v, t) dv, \quad (10)$$

quindi, ponendo

$$\Phi_r(s, t) = \Delta_r(s, t) \sum_{i=0}^{n-1} \mu''_r k^{n-i-1}(t),$$

avremo dalla (9)

$$[\mu''_r - k''(s)] \Phi_r(s, t) \equiv 0$$

e dalla (10)

$$[\mu''_r - k''(s)] \Phi_r(s, t) = \int_a^b \Phi_r(v, s) \Phi_r(v, t) dv,$$

cioè

$$\int_a^b \Phi_r(v, s) \Phi_r(v, t) dv \equiv 0$$

e finalmente

$$\Phi_r(s, t) \equiv 0.$$

Sarà perciò anche

$$\Delta_r(s, t) [\mu'_r + k(t)] \equiv 0.$$

Potremo dunque scrivere

$$K^{(n)}(s, t) \sim \sum_m \Gamma_m(s, t) \sum_{i=0}^{n-1} \mu''_m k^{n-i-1}(t) + \sum_m \Delta_m(s, t) \sum_{i=0}^{n-1} \mu''_m k^{n-i-1}(t),$$

ed allora, ponendo

$$K(s, t) \sim \sum_m \Gamma_m(s, t) + \sum_m \Delta_m(s, t) + Q(s, t),$$

sarà $Q(s, t) \equiv 0$, perchè altrimenti esisterebbe qualche costante caratteristica propria relativa a $K(s, t)$ e $k(s)$ diversa dalle μ_m e dalle μ'_m .

Il teorema enunciato al n.º 1 è così completamente dimostrato.

4. Faremo ora vedere che il metodo esposto permette di calcolare tutte le μ'_m .

Si è trovato che si può porre

$$P(s, t) \sim \sum_i v_i \chi_i(s) \sigma_i(t)$$

dove le $\chi_i(s)$ e le $\sigma_i(s)$ formano due sistemi ortogonali, le v_i sono costanti positive non necessariamente distinte e si ha $[\rho_i - k^2(s)] \chi_i(s) \equiv 0$, essendo le ρ_i costanti positive.

Uno almeno dei due valori $\pm \sqrt{\rho_i}$ è costante caratteristica propria relativa a $K(s, t)$ e $k(s)$.

Facciamo vedere che relativamente a $K(s, t)$ e $k(s)$ non esiste nessuna costante caratteristica propria diversa dalle μ_m e dalle $\pm \sqrt{\rho_i}$.

Infatti, sia μ una tale costante e $\varphi(s)$ una funzione fondamentale propria ad essa corrispondente. Sarà, per qualunque m ,

$$\int_a^b \Gamma_m(t, s) \varphi(t) dt = 0.$$

Inoltre essendo $\varphi(s)$ e $\chi_i(s)$ funzioni fondamentali relative a $K^{(2)}(s, t)$ e $k^2(s)$ corrispondenti alle costanti distinte μ^2 e ρ_i , sarà per qualunque i

$$\int_a^b \chi_i(s) \varphi(s) ds = 0,$$

quindi

$$\int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt = 0,$$

contro l'ipotesi che $\varphi(s)$ sia funzione fondamentale propria.

Le μ'_m si devono dunque cercare tra le $\pm \sqrt{\rho_i}$.

Ora supponiamo che sia

$$\rho_{i_1} = \rho_{i_2} = \dots$$

e che queste siano tutte le ρ_i eguali a ρ_{i_1} .

Se tra le funzioni

$$u_{i_n}(s) = \sqrt{\rho_{i_1}} \chi_{i_n}(s) + k(s) \chi_{i_n}(s) + \nu_{i_n} \sigma_{i_n}(s) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

dove $\sqrt{\rho_{i_1}}$ è presa con un certo segno, non c'è nessuna funzione fondamentale propria relativa a $K(s, t)$ e $k(s)$, se è cioè

$$[\sqrt{\rho_{i_1}} - k(s)] \sigma_{i_n}(s) \equiv 0$$

per qualunque n , allora o $\sqrt{\rho_{i_1}}$ è costante caratteristica impropria relativa a $K(s, t)$ e $k(s)$ o è uguale a qualcuna delle ν_m : in altri termini $\sqrt{\rho_{i_1}}$ non è una ν'_m .

Infatti, si formi un sistema di funzioni ortogonale in (a, b) : $h_1(s), h_2(s), \dots$, equivalente al sistema delle $u_{i_n}(s)$: $h_n(s)$, essendo una combinazione lineare di un numero finito delle $u_{i_n}(s)$, è funzione fondamentale impropria corrispondente alla costante $\sqrt{\rho_{i_1}}$.

Supponiamo che questa sia una costante caratteristica propria e sia $\varphi(s)$ una funzione fondamentale propria ad essa corrispondente: possiamo porre

$$\varphi(s) = \lambda(s) + \psi(s) \quad (11)$$

con

$$\lambda(s) \sim \sum_n a_n h_n(s), \quad a_n = \int_a^b h_n(s) \varphi(s) ds.$$

Sarà

$$\int_a^b K(s, t) \lambda(t) dt = \sum_n a_n \int_a^b K(s, t) h_n(t) dt = \sum_n a_n [\sqrt{\rho_{i_1}} - k(s)] h_n(s),$$

cioè

$$\int_a^b K(s, t) \lambda(t) dt = [\sqrt{\rho_{i_1}} - k(s)] \lambda(s),$$

ma si ha anche

$$\sum_n a_n [\sqrt{\rho_{i_1}} - k(s)] h_n(s) \equiv 0,$$

quindi $\lambda(s)$ è funzione fondamentale impropria e $\psi(s)$ è funzione fondamentale propria.

Ma è chiaro che si avrà, per qualunque i ,

$$\int_a^b \chi_i(s) \psi(s) ds = 0.$$

Ciò risulta dalla posizione (11) se i è uguale a qualche i_n , in caso contrario l'eguaglianza è ancora soddisfatta perchè $\chi_i(s)$ e $\psi(s)$ sono funzioni fondamentali relative a $K^{(2)}(s, t)$ e $k^2(s)$ corrispondenti alle costanti distinte ρ_i e ρ_{i_1} . Sarà perciò

$$\int_a^b P(s, t) \psi(s) ds = 0,$$

quindi per un conveniente m avremo

$$\int_a^b \Gamma_m(s, t) \psi(s) ds \equiv 0$$

e $\sqrt{\rho_{i_1}} = \mu_m$.

Dunque: *condizione necessaria e sufficiente perchè $\sqrt{\rho_i}$, presa con un certo segno, sia una μ'_m , è che si possa trovare un intero n ($= 0 \neq i$) tale da avere $\rho_n = \rho_i$ e $[\sqrt{\rho_i} - k(s)] \sigma_n(s) \equiv 0$.*

Conosciute le $\mu'_1, \mu'_2, \dots$ si possono determinare le $\Delta_1(s, t), \Delta_2(s, t), \dots$ (*).

5. Dal teorema del n.º 1 discende (**) che *se la funzione $k(s)$ prende un numero finito di valori, fatta eventualmente eccezione per valori presi complessivamente in un insieme di punti di misura nulla, la successione delle somme parziali della serie formata con le funzioni caratteristiche relative a $\tilde{K}(s, t)$ e $k(s)$ converge in media verso $K(s, t)$.*

Chiamando $\Gamma_1(s, t), \Gamma_2(s, t), \dots$ queste funzioni caratteristiche, si ha cioè

$$K(s, t) \sim \sum_m \Gamma_m(s, t). \quad (12)$$

Ma una funzione caratteristica $\Gamma_m(s, t)$ soddisfa all'eguaglianza

$$[\mu_m - k(s)] \Gamma_m(s, t) = \int_a^b \Gamma_m(v, s) \Gamma_m(v, t) dv$$

e quindi si può porre

$$\Gamma_m(s, t) \sim \sum_n [\mu_m - k(s)] \varphi_n^{(m)}(s) \varphi_n^{(m)}(t) \quad (***)$$

dove le $\varphi_n^{(m)}(s)$ al variare di n formano un sistema ortogonale in (a, b) e sono funzioni fondamentali proprie relative a $K(s, t)$ e $k(s)$, corrispondenti

(*) l. c., pag. 238. Nota III.

(**) l. c., pag. 238. Nota I.

(***) l. c., pag. 244.

alla costante μ_n . Ne viene che facendo variare tanto n che m le $\varphi_n^{(m)}(s)$ formano un sistema ortogonale in (a, b) .

Tutte le volte che vale la (12) si può quindi porre

$$K(s, t) \sim \sum_n [\lambda_n - k(s)] \psi_n(s) \psi_n(t), \quad (13)$$

dove le λ_n sono costanti non necessariamente distinte e le $\psi_n(s)$ formano un sistema ortogonale in (a, b) .

Se vale la (13) ed inoltre per ogni funzione $h(s)$ soddisfacente alle condizioni

$$\int_a^b h(s) \psi_n(s) ds = 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

si ha $k(s) h(s) \equiv 0$ (il che avviene in particolare quando è $k(s) \equiv 0$ o quando $K(s, t)$ è un nucleo chiuso, cioè quando non esiste nessuna funzione $h(s)$ per cui è $\int_a^b K(s, t) h(t) dt \equiv 0$) per ogni funzione $f(s)$ a quadrato sommabile in (a, b) sarà

$$k(s) f(s) + \int_a^b K(s, t) f(t) dt \sim \sum_n \lambda_n \alpha_n \psi_n(s) \quad (14)$$

con

$$\alpha_n = \int_a^b f(s) \psi_n(s) ds.$$

La (14) generalizza lo sviluppo in serie di funzioni fondamentali secondo FREDHOLM dell'integrale $\int_a^b K(s, t) f(t) dt$.

Il fatto che la (14) è valida in condizioni molto larghe quando $k(s)$ prende un numero finito di valori, fa presumere che allora essa sia un caso particolare di una relazione più generale che valga in condizioni meno restrittive per la $k(s)$.

Il secondo membro della (14) è una serie di FOURIER generalizzata: per ulteriori ricerche, che faremo conoscere in seguito, riteniamo si debba arrivare a concludere che sotto determinate condizioni, del resto molto larghe, il primo membro della (14) si possa mettere sotto forma della somma di una serie di FOURIER generalizzata e di una serie in cui ogni termine è un integrale di FOURIER generalizzato.

Una via per arrivare a questo risultato potrà trovarsi nella teoria delle forme quadratiche con infinite variabili. All'operazione funzionale rappresentata dal primo membro della (14) è legata la forma quadratica $\sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$ con

$$a_{ij} = \int_a^b k(s) \varphi_i(s) \varphi_j(s) ds + \int_a^b \int_a^b K(s, t) \varphi_i(t) \varphi_j(s) dt ds$$

dove $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \dots$ è un sistema di funzioni ortogonali in (a, b) e chiuso.

Per $k(s) \equiv 0$ si ritrova la forma quadratica della quale si sono serviti l'HILBERT ed i suoi allievi per lo studio dell'equazione di FREDHOLM di seconda specie a nucleo simmetrico, anche nel caso di singolarità.

Di tutto ciò intendiamo occuparci in altro lavoro (*).

6. Passeremo ora alla risoluzione dell'equazione funzionale

$$K^{(n)}(s, t) \equiv 0.$$

Risulta dai precedenti numeri che tale equazione può essere soddisfatta solo per n pari e quando è soddisfatta per un valore pari di n lo è per qualunque altro valore pari. Ci riduciamo quindi a risolvere la seguente equazione:

$$[k(s) + k(t)] K(s, t) + \int_a^b K(v, s) K(v, t) dv \equiv 0. \quad (15)$$

Se questa è soddisfatta risulta dal n.º 3 che si potrà porre

$$K(s, t) \sim \sum_n \lambda_n \varphi_n(s) \varphi_n(t)$$

dove le λ_n sono costanti, le $\varphi_n(s)$ costituiscono un sistema ortogonale in (a, b) e si ha

$$[\rho_n - k^2(s)] \varphi_n(s) \equiv 0 \quad (16)$$

essendo le ρ_n costanti positive.

Se è $\lambda_n + \lambda_m \neq 0$ ed $n \neq m$ si ha

$$\int_a^b k(s) \varphi_n(s) \varphi_m(s) ds = 0. \quad (17)$$

Ciò risulta subito dalla (15) moltiplicandola per $\varphi_n(s) \varphi_m(t)$ ed integrando nel quadrato $a \leq s \leq b, a \leq t \leq b$.

(*) Mentre correggo le bozze di stampa della presente Memoria, posso aggiungere che il lavoro è stato già pubblicato nel tomo XLIII dei *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*.

Si è già visto che si possono dare due casi: o $\varphi_n(s)$ è funzione fondamentale propria relativa a $K(s, t)$ e $k(s)$ corrispondente alla costante $\sqrt{\rho_n}$, presa questa con segno conveniente, ovvero le due funzioni

$$\left. \begin{aligned} u_n(s) &= [\lambda_n + \sqrt{\rho_n} + k(s)] \varphi_n(s), \\ v_n(s) &= [\lambda_n - \sqrt{\rho_n} + k(s)] \varphi_n(s) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

sono fondamentali, corrispondenti rispettivamente alle costanti $\sqrt{\rho_n}$ e $-\sqrt{\rho_n}$ ed una almeno è propria. Ma nel caso che stiamo esaminando possiamo dire di più: $u_n(s)$ e $v_n(s)$ se sono entrambe non nulle sono entrambe proprie.

Infatti si ha

$$[\sqrt{\rho_n} - k(s)] u_n(s) = \lambda_n [\sqrt{\rho_n} - k(s)] \varphi_n(s),$$

quindi se $u_n(s)$ fosse impropria si avrebbe $k(s) \varphi_n(s) = \sqrt{\rho_n} \varphi_n(s)$ e l'egualianza

$$\lambda_n \varphi_n(s) = \int_a^b K(s, t) \varphi_n(t) dt$$

si potrebbe scrivere

$$(\lambda_n + \sqrt{\rho_n}) \varphi_n(s) = k(s) \varphi_n(s) + \int_a^b K(s, t) \varphi_n(t) dt,$$

cioè $\varphi_n(s)$ sarebbe funzione fondamentale, il che non può avvenire quando $u_n(s)$ e $v_n(s)$ sono entrambe non nulle.

Definite le $u_n(s)$ e $v_n(s)$ per mezzo delle (18) si ha

$$\int_a^b u_n(s) v_n(s) ds = 0$$

ed essendo $u_n(s) v_n(s) = \lambda_n [\lambda_n + 2k(s)] \varphi_n^2(s)$ avremo

$$\int_a^b k(s) \varphi_n^2(s) ds = -\frac{\lambda_n}{2}. \quad (19)$$

Abbiamo poi

$$\int_a^b u_n^2(s) ds = 2\rho_n + \lambda_n \sqrt{\rho_n}, \quad \int_a^b v_n^2(s) ds = 2\rho_n - \lambda_n \sqrt{\rho_n},$$

quindi

$$4\rho_n \geq \lambda_n^2$$

e l'uguaglianza si presenta quando una delle due funzioni $u_n(s)$, $v_n(s)$ è identicamente nulla, cioè quando $\varphi_n(s)$ è funzione fondamentale relativamente a $K(s, t)$ e $k(s)$.

La condizione $4\rho_n = \lambda_n^2$ è dunque necessaria e sufficiente perchè $\varphi_n(s)$ sia fondamentale relativamente a $K(s, t)$ e $k(s)$: quando essa è soddisfatta $\varphi_n(s)$ corrisponde alla costante caratteristica $\frac{\lambda_n}{2}$.

7. Supponiamo che per un certo valore di n sia $4\rho_n > \lambda_n^2$.
Poniamo

$$a_n = \frac{2}{\sqrt{4\rho_n - \lambda_n^2}}$$

prendendo, per esempio, per il radicale la determinazione positiva: faremo vedere che il nucleo $K(s, t)$ ammette come funzione fondamentale nel senso di FREDHOLM la funzione $\varphi'_n(s)$ definita dall'eguaglianza

$$\varphi'_n(s) = a_n \left[\frac{\lambda_n}{2} + k(s) \right] \varphi_n(s).$$

Essa corrisponde alla costante caratteristica, nel senso di FREDHOLM, $-\lambda_n$ e si ha

$$\int_a^b \varphi_n'^2(s) ds = 1, \quad [\rho_n - k^2(s)] \varphi_n(s) \equiv 0. \quad (20)$$

Infatti la (15) ci dà

$$\int_a^b K(s, t) k(t) \varphi_n(t) dt = -\lambda_n [\lambda_n + k(s)] \varphi_n(s)$$

e per mezzo di questa si trova facilmente

$$\int_a^b K(s, t) \varphi'_n(t) dt = -\lambda_n \varphi'_n(s).$$

Tenendo poi conto della (19) si trova la prima delle (20) e la seconda discende subito dalla definizione di $\varphi'_n(s)$ e dalla (16).

$\varphi'_n(s)$ è funzione fondamentale relativamente a $K^{(2)}(s, t)$ e $k^2(s)$, ma non lo è relativamente a $K(s, t)$ e $k(s)$, perchè è $4\rho_n > \lambda_n^2$.

In corrispondenza a $\varphi'_n(s)$ si trovano le due funzioni

$$\begin{aligned} u'_n(s) &= [-\lambda_n + \sqrt{\rho_n} + k(s)] \varphi'_n(s) \\ v'_n(s) &= [-\lambda_n - \sqrt{\rho_n} + k(s)] \varphi'_n(s) \end{aligned}$$

fondamentali relativamente a $K(s, t)$ e $k(s)$ e corrispondenti rispettivamente alle costanti $\sqrt{\rho_n}$ e $-\sqrt{\rho_n}$. Esse non sono linearmente indipendenti dalle $u_n(s)$ e $v_n(s)$ perchè si trova facilmente

$$u'_n(s) = b_n u_n(s), \quad v'_n(s) = -\frac{1}{b_n} v_n(s)$$

dove b_n è la radice quadrata positiva di

$$\frac{2\sqrt{\rho_n} - \lambda_n}{2\sqrt{\rho_n} + \lambda_n}.$$

8. Supponiamo ora che sia $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p$ e per $n \leq p$ $4\rho_n > \lambda_n^2$, per $n > p$ o $\lambda_n \neq \lambda_1$ o $4\rho_n = \lambda_n^2$.

Potremo allora formare le funzioni $\varphi'_1(s), \varphi'_2(s), \dots, \varphi'_p(s)$ le quali, per la (17), saranno ortogonali.

Se il nucleo $K(s, t)$ ammette una funzione $\varphi'(s)$ fondamentale nel senso di FREDHOLM, corrispondente alla costante $-\lambda_1$ e soddisfacente ad una condizione della forma $[\rho - k^2(s)]\varphi'(s) \equiv 0$ con $4\rho > \lambda_1^2$, $\varphi'(s)$ è una combinazione lineare delle $\varphi'_1(s), \varphi'_2(s), \dots, \varphi'_p(s)$.

Infatti, se $\varphi'(s)$ è una tale funzione, la $\varphi(s)$ definita dall'eguaglianza

$$\varphi(s) = \left[-\frac{\lambda_1}{2} + k(s) \right] \varphi'(s)$$

è fondamentale nel senso di FREDHOLM e corrisponde alla costante λ_1 , ed è $[\rho - k^2(s)]\varphi(s) \equiv 0$.

Sarà dunque

$$\varphi(s) = \sum_{\lambda_n = \lambda_1} c_n \varphi_n(s),$$

le c_n sono costanti e la somma è estesa ai valori di n che rendono $\lambda_n = \lambda_1$. Ma se n è tale che sia $4\rho_n = \lambda_n^2$ cioè $4\rho_n = \lambda_1^2$, è $\rho_n = \rho$, quindi

$$\int_a^b \varphi(s) \varphi_n(s) ds = 0,$$

come risulta subito dalle due eguaglianze

$$\rho \varphi(s) = k^2(s) \varphi(s), \quad \rho_n \varphi_n(s) = k^2(s) \varphi_n(s),$$

e quindi è $c_n = 0$.

Avremo dunque

$$\varphi(s) = \gamma_1 \varphi_{i_1}(s) + \gamma_2 \varphi_{i_2}(s) + \cdots + \gamma_r \varphi_{i_r}(s) \quad (21)$$

dove $i_1, i_2, \dots, i_r$ sono interi compresi tra i primi p ed è $\rho_{i_1} = \rho_{i_2} = \cdots = \rho_{i_r} = \rho$.

Essendo per $n \leq p$

$$\varphi_n(s) = \alpha_n \left[-\frac{\lambda_n}{2} + k(s) \right] \varphi'_n(s),$$

dove α_n è la costante definita al numero precedente, la (21) si può scrivere

$$\left[-\frac{\lambda_1}{2} + k(s) \right] \left[-\varphi'(s) + \gamma'_1 \varphi'_{i_1}(s) + \gamma'_2 \varphi'_{i_2}(s) + \cdots + \gamma'_r \varphi'_{i_r}(s) \right] \equiv 0$$

dove è $\gamma'_i = \alpha_{i_1} \gamma_i$. Moltiplicando la precedente relazione per $\frac{\lambda_1}{2} + k(s)$ troviamo

$$\left(\rho - \frac{\lambda_1^2}{4} \right) \left[-\varphi'(s) + \gamma'_1 \varphi'_{i_1}(s) + \cdots + \gamma'_r \varphi'_{i_r}(s) \right] \equiv 0,$$

cioè $\varphi'(s)$ è una combinazione lineare delle $\varphi_n(s)$ con $n \leq p$.

Indichiamo con $j_1, j_2, \dots, j_m$ gli interi n per i quali è $\lambda_n = -\lambda_1$ e $4\rho_n > \lambda_n^2$: per quanto si è visto si può dire che $\varphi_{j_h}(s)$ ($h = 1, 2, \dots, m$) è una combinazione lineare delle $\varphi'_i(s)$ ($i = 1, 2, \dots, p$).

Viceversa, per una $\varphi'_i(s)$ si ha

$$\varphi'_i(s) = \sum_{\lambda_m = -\lambda_1} c_m \varphi_m(s);$$

ma se m è tale che sia $4\rho_m = \lambda_1^2$ sarà $\rho_m = \rho$, quindi $c_m = 0$, cioè $\varphi'_i(s)$ è una combinazione lineare delle $\varphi_{j_h}(s)$: ne viene che il sistema delle $\varphi_{j_h}(s)$ e quello delle $\varphi'_i(s)$ sono equivalenti, il che porta $m = p$ e

$$\sum_{r=1}^p \varphi_{j_r}(s) \varphi_{j_r}(t) = \sum_{r=1}^p \varphi'_r(s) \varphi'_r(t).$$

Concludendo: se una funzione simmetrica $K(s, t)$ soddisfa alla (15) si potrà porre

$$K(s, t) \sim \sum_i \alpha_i \chi_i(s) \chi_i(t) + \sum_i \beta_i [\psi_i(s) \psi_i(t) - \psi'_i(s) \psi'_i(t)] \quad (22)$$

dove le α_i e le β_i sono costanti tali che le serie $\sum_i \alpha_i^2$ e $\sum_i \beta_i^2$ risultino conver-

genti e le β_i sono positive, le funzioni

$$\chi_1(s), \chi_2(s), \dots, \psi_1(s), \psi_2(s), \dots, \psi'_1(s), \psi'_2(s), \dots,$$

formano un sistema ortogonale ed inoltre si ha

$$\left[k(s) + \frac{\alpha_i}{2} \right] \chi_i(s) \equiv 0, [\mu_i^2 - k^2(s)] \psi_i(s) \equiv 0, [\mu_i^2 - k^2(s)] \psi'_i(s) \equiv 0,$$

μ_i essendo una costante positiva che soddisfa all'ineguaglianza $4\mu_i^2 > \beta_i^2$.

Si ha ancora

$$\left. \begin{aligned} \int_a^b k(s) \psi_i(s) \psi_j(s) ds &= \begin{cases} -\frac{\beta_i}{2} & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \\ \int_a^b k(s) \psi'_i(s) \psi'_j(s) ds &= \begin{cases} \frac{\beta_i}{2} & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \\ \int_a^b k(s) \psi_i(s) \psi'_j(s) ds &= \begin{cases} \frac{(4\mu_i^2 - \beta_i^2)^{\frac{1}{2}}}{2} & (i=j) \\ 0 & (i \neq j). \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Inversamente, se $K(s, t)$ ha la forma (22) e sono soddisfatte tutte le condizioni sopra enunciate, $K(s, t)$ è una funzione simmetrica che soddisfa alla (15).

Infatti, posto

$$P_i(s, t) = \alpha_i \chi_i(s) \chi_i(t); \quad Q_i(s, t) = \beta_i [\psi_i(s) \psi_i(t) - \psi'_i(s) \psi'_i(t)]$$

essendo per $i \neq j$

$$\int_a^b P_i(v, s) P_j(v, t) dv \equiv 0, \quad \int_a^b Q_i(v, s) Q_j(v, t) dv \equiv 0$$

e, qualunque siano i ed j ,

$$\int_a^b P_i(v, s) Q_j(v, t) dv \equiv 0$$

avremo

$$K^{(2)}(s, t) \sim \sum_i P_i^{(2)}(s, t) + \sum_i Q_i^{(2)}(s, t).$$

Ma è

$$P_i^{(2)}(s, t) = \alpha_i [k(s) + k(t) + \alpha_i] \chi_i(s) \chi_i(t),$$

ed essendo $\left[k(s) + \frac{\alpha_i}{2}\right] \chi_i(s) \equiv 0$, $P_i^{(2)}(s, t) \equiv 0$.

Tenendo poi conto delle (23) si trova facilmente

$$\int_a^b \int_a^b [Q_i^{(2)}(s, t)]^2 ds dt = 0,$$

cioè $Q_i^{(2)}(s, t) \equiv 0$ e finalmente $K^{(2)}(s, t) \equiv 0$.

Si trova così il modo di costruire le più generali funzioni $k(s)$ e $K(s, t)$, la seconda simmetrica, soddisfacenti alla (15).

9. Dalla (22), poi si arriva facilmente alla relazione

$$K(s, t) \sim \sum_m \Delta_m(s, t) \quad (24)$$

che esprime $K(s, t)$ per mezzo delle funzioni caratteristiche $\Delta_m(s, t)$ relative ad essa ed a $k(s)$.

Si consideri il seguente sistema di funzioni

$$\chi_1(s), \chi_2(s), \dots, U_1(s), U_2(s), \dots, V_1(s), V_2(s), \dots, \quad (25)$$

dove poniamo

$$U_i(s) = \left[\frac{1}{\mu_i(2\mu_i + \beta_i)} \right]^{\frac{1}{2}} [\beta_i + \mu_i + k(s)] \psi_i(s),$$

$$V_i(s) = \left[\frac{1}{\mu_i(2\mu_i - \beta_i)} \right]^{\frac{1}{2}} [\beta_i - \mu_i + k(s)] \psi_i(s):$$

$\chi_i(s)$, $U_i(s)$, $V_i(s)$ sono funzioni fondamentali relativamente a $K(s, t)$ e $k(s)$ e corrispondono rispettivamente alle costanti $\frac{\alpha_i}{2}$, μ_i , $-\mu_i$.

Le (25) costituiscono un sistema ortogonale.

Si può scrivere

$$P_i(s, t) = \left[\frac{\alpha_i}{2} - k(s) \right] \chi_i(s) \chi_i(t)$$

e facilmente si trova

$$Q_i(s, t) = [\mu_i - k(s)] U_i(s) U_i(t) + [-\mu_i - k(s)] V_i(s) V_i(t),$$

e sostituendo queste espressioni di $P_i(s, t)$ e $Q_i(s, t)$ nella relazione

$$K(s, t) \sim \sum_i P_i(s, t) + \sum_i Q_i(s, t)$$

si trova per $K(s, t)$ una espressione della forma (13) equivalente alla (24).

Possiamo dare facilmente l'espressione di $\Delta_m(s, t)$, funzione caratteristica corrispondente ad una costante μ'_m .

Si ha

$$\Delta_m(s, t) \sim \sum_{\alpha_n = 2\mu'_m} \left[\frac{\alpha_n}{2} - k(s) \right] \chi_i(s) \chi_i(t) + \sum_{\mu_n = \mu'_m} [\mu_n - k(s)] U_i(s) U_i(t)$$

se è $\mu'_m > 0$; per $\mu'_m < 0$ la seconda somma deve essere sostituita da

$$\sum_{-\mu_n = \mu'_m} [-\mu_n - k(s)] V_i(s) V_i(t).$$

In entrambi i casi la prima somma contiene un numero finito di termini mentre la seconda ne può contenere infiniti.

Novembre 1918.