Über einen geometrischen Ort und eine damit zusammenhängende krumme Fläche.

Von Emanuel Czuber in Wien.

Die Untersuchung des geometrischen Ortes eines veränderlichen Punktes in der Ebene, dessen Entfernungen u_1, u_2, u_3 von drei in dieser Ebene liegenden Geraden ein constantes Product bilden, lässt sich naturgemäß verbinden mit der Untersuchung jener Fläche, deren Gleichung $z = u_1 u_2 u_3$ ist, bezogen auf ein Coordinatensystem, welches aus dem Punkte und den Geraden zugrundeliegenden durch Hinzufügung einer dritten Axe hervorgeht, die als die verticale Axe bezeichnet werden möge. Denn die erwähnten Ortscurven sind die Projectionen der Niveaulinien jener krummen Fläche. In diesem Zusammenhange sind die genannten geometrischen Gebilde in den folgenden Blättern dargestellt.

I.

1. Es seien

$$(1) \quad u_i = -(a_i x + b_i y - p_i) = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

die Gleichungen der drei Geraden in der Hesse'schen Normalform, auf ein rechtwinkliges Axensystem bezogen. Vorerst möge angenommen werden, dass die Geraden nicht in Einem Punkte sich schneiden, dass also die Determinante

$$(2) \quad R = (a_1 \ b_2 \ p_3)$$

von Null verschieden sei, und dass sie ein Dreieck $M_1 M_2 M_3$ begrenzen, innerhalb dessen der Ursprung liegt. Damit ist bezüglich des Vorzeichens der Abstände eine bestimmte Wahl getroffen; sind nämlich die p_i positiv, so hat ein Punkt (x, y) von der Geraden u_i einen positiven oder negativen Abstand, jenachdem er mit dem Dreieck $M_1 M_2 M_3$ zur selben Seite dieser Geraden liegt oder nicht. In vier (I—IV) von den sieben Feldern, in welche die drei Geraden die Ebene zerlegen, ist $u_1 u_2 u_3$ positiv, und zwar in dem Dreieck $M_1 M_2 M_3$ (I) und in den Scheitelwinkeln seiner Innenwinkel (II—IV), in den drei übrigen (V—VII) negativ. Die Fläche

$$(3) \quad z = u_1 u_2 u_3$$

befindet sich in (I—IV) oberhalb, in (V—VII) unterhalb der xy -Ebene.

Bezeichnet man die Adjuncten der Elemente von R mit den correspondierenden großen Buchstaben, so sind unter den getroffenen Annahmen die

$$P_i = \sin M_i$$

positive Größen und

$$R = \sum p_i P_i$$

ebenfalls positiv.

2. Die Bedingungen $p = \frac{\partial z}{\partial x} = 0$, $q = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ für ein Maximum oder Minimum von z nehmen, da für $z \geq 0$

$$-\frac{p}{z} = \frac{a_1}{u_1} + \frac{a_2}{u_2} + \frac{a_3}{u_3}$$

$$-\frac{q}{z} = \frac{b_1}{u_1} + \frac{b_2}{u_2} + \frac{b_3}{u_3}$$

ist, die Form an:

$$\frac{a_1}{u_1} + \frac{a_2}{u_2} + \frac{a_3}{u_3} = 0$$

$$\frac{b_1}{u_1} + \frac{b_2}{u_2} + \frac{b_3}{u_3} = 0$$

und führen zu

$$P_1 u_1 = P_2 u_2 = P_3 u_3,$$

so dass sich, wenn man den gemeinsamen Wert dieser drei Producte mit w bezeichnet, zur Bestimmung von x, y die Gleichungen ergeben

$$a_i x + b_i y + \frac{1}{P_i} w = p_i,$$

aus welchen

$$(4) \quad x = \frac{\begin{pmatrix} p_1 & b_2 & \frac{1}{P_3} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} a_1 & b_2 & \frac{1}{P_3} \end{pmatrix}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} p_1 & b_2 & \frac{1}{P_3} \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \left(\frac{A_1}{P_1} + \frac{A_2}{P_2} + \frac{A_3}{P_3} \right)$$

$$y = -\frac{1}{3} \left(\frac{B_1}{P_1} + \frac{B_2}{P_2} + \frac{B_3}{P_3} \right)$$

folgt. Es sind aber $-\frac{A_i}{P_i}$, $-\frac{B_i}{P_i}$ die Coordinaten des Eckpunktes M_i des Dreiecks, folglich der eben gefundene Punkt sein Schwer-

punkt S . Obwohl aus der Natur der Aufgabe zu erkennen ist, dass dieser Punkt zu einem Maximum von z führt, möge doch für spätere Zwecke der Ausdruck $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = rt - s^2$ gebildet werden. Aus

$$(5) \quad \begin{aligned} -p &= a_1 u_2 u_3 + a_2 u_3 u_1 + a_3 u_1 u_2 \\ -q &= b_1 u_2 u_3 + b_2 u_3 u_1 + b_3 u_1 u_2 \end{aligned}$$

ergibt sich durch weiteres Differentiiren

$$(6) \quad \begin{aligned} r &= 2 a_2 a_3 u_1 + 2 a_3 a_1 u_2 + 2 a_1 a_2 u_3 \\ s &= (a_2 b_3 + a_3 b_2) u_1 + (a_3 b_1 + a_1 b_3) u_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) u_3 \\ t &= 2 b_2 b_3 u_1 + 2 b_3 b_1 u_2 + 2 b_1 b_2 u_3 \end{aligned}$$

und daraus nach einiger Reduction

$$(7) \quad \begin{aligned} &rt - s^2 \\ &= -P_1^2 u_1^2 - P_2^2 u_2^2 - P_3^2 u_3^2 + 2 P_2 P_3 u_2 u_3 + 2 P_3 P_1 u_3 u_1 + 2 P_1 P_2 u_1 u_2; \end{aligned}$$

für den Punkt S ist aber, wie man nach einfacher Rechnung findet,

$$u_i^{(0)} = \frac{R}{3P_i},$$

daher

$$rt - s^2 = \frac{R^2}{3},$$

also positiv; ferner

$$r = \frac{2R}{3P_1 P_2 P_3} (a_2 a_3 P_2 P_3 + a_3 a_1 P_3 P_1 + a_1 a_2 P_1 P_2)$$

oder wegen $a_1 P_1 + a_2 P_2 + a_3 P_3 = 0$

$$r = -\frac{R}{3P_1 P_2 P_3} (a_1^2 P_1^2 + a_2^2 P_2^2 + a_3^2 P_3^2),$$

also negativ, wodurch das Maximum charakterisiert ist. Sein Wert ist

$$z^{(0)} = u_1^{(0)} u_2^{(0)} u_3^{(0)} = \frac{R^3}{27 P_1 P_2 P_3};$$

bemerkt man, dass

$$F = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{A_1}{P_1} & \frac{B_1}{P_1} & 1 \\ \frac{A_2}{P_2} & \frac{B_2}{P_2} & 1 \\ \frac{A_3}{P_3} & \frac{B_3}{P_3} & 1 \end{vmatrix} = \frac{R^2}{2P_1P_2P_3}$$

die Fläche des Dreieckes $M_1 M_2 M_3$ ist, so kann auch

$$(8) \quad z^{(0)} = \frac{2}{27} FR$$

geschrieben werden. Auf Grund dieser Resultate kann folgendes ausgesagt werden:

Die Curven, für deren Punkte $u_1 u_2 u_3 = x$ ist, sind Curven dritter Ordnung, welche die drei Geraden $u_i = 0$ zu Asymptoten haben. Sie verlaufen für $x < 0$ in den Feldern (V—VII), haben für $0 < x < z^{(0)}$ in den Räumen (II—IV) unendliche Äste und in (I) ein Oval, für $x > z^{(0)}$ unendliche Äste in den Räumen (II—IV); für $x = 0$ zerfällt die Ortscurve in die drei Geraden $u_i = 0$; für $x = z^{(1)}$ besteht sie aus drei unendlichen Ästen in (II—IV) und einem conjugierten Punkt in (I), welcher mit dem Schwerpunkt S von $M_1 M_2 M_3$ zusammenfällt.

3. Die zur xy -Ebene normale Ebene

$$(9) \quad u_2 - \lambda u_3 = 0,$$

deren Spur durch M_1 geht, ergibt mit der Fläche (3) einen Schnitt, dessen Projection auf der zx -Ebene die Gleichung hat

$$(10) \quad z = \frac{\lambda^2}{(b_2 - \lambda b_3)^3} (P_1 x + A_1)^3 [(P_3 + \lambda P_2)x + A_3 + \lambda A_2].$$

Die durch diese Gleichung dargestellte Curve dritter Ordnung schneidet die x -Axe in dem Punkte

$$x_1 = -\frac{A_3 + \lambda A_2}{P_3 + \lambda P_2},$$

welcher dem Schnittpunkt des Originals mit der Seite $u_1 = 0$ entspricht, und berührt sie in dem Punkte

$$x_2 = -\frac{A_1}{P_1},$$

welcher dem Punkte M_1 des Originals entspricht; zwischen den beiden genannten Punkten, an der Stelle

$$\xi = -\frac{2A_1}{3P_1} - \frac{A_3 + \lambda A_2}{3(P_3 + \lambda P_2)} = \frac{x_1 + 2x_2}{3}$$

besitzt sie einen Wendepunkt, welchem auch ein Wendepunkt des Originals zugeordnet ist; ξ aber bestimmt den an M_1 liegenden Drittpunkt der in (9) enthaltenen Transversale des Dreieckes $M_1 M_2 M_3$.

Ähnliche Resultate ergeben sich für die Verticalschnitte durch M_2 und M_3 .

Die Wendepunkte der durch die Ecken M_i gelegten Verticalschnitte der Fläche (3) projicieren sich demnach auf der xy -Ebene in drei Gerade $v_i = 0$, welche ein Dreieck $N_1 N_2 N_3$ begrenzen, das $M_1 M_2 M_3$ congruent ist, mit ihm den Schwerpunkt S gemein hat und um 180° gegen dasselbe in der Ebene gedreht ist.

4. Mit der zur xy -Ebene normalen Ebene

$$(11) \quad u_1 = \pi_1,$$

deren Spur der Geraden $u_1 = 0$ parallel ist, ergibt die Fläche (3) einen Schnitt, dessen Projection auf der zx -Ebene die Gleichung

$$(12) \quad z = -\frac{\pi_1}{b_1^2} (P_2 x + A_2 - b_3 \pi_1) (P_3 x + A_3 + b_2 \pi_1)$$

zukommt; dieser Schnitt ist demnach eine Parabel, deren Axe zur xy -Ebene normal und nach abwärts oder aufwärts gerichtet ist, jenachdem π_1 positiv oder negativ, d. h. jenachdem die Gerade (11) mit M_1 auf derselben Seite von $u_1 = 0$ oder auf der entgegengesetzten liegt. Der Scheitel der Parabel projiciert sich in die durch M_1 gehende Schwerlinie von $M_1 M_2 M_3$.

Ähnliche Resultate ergeben sich für die Vertikalschnitte parallel zu den Geraden $u_2 = 0$ und $u_3 = 0$.

Die Fläche (3) ist demnach dreifach symmetrisch und zwar in Bezug auf die Verticalebenen, welche die Schwerlinien des Dreieckes $M_1 M_2 M_3$ zu Spuren haben; die Ortscurve $u_1 u_2 u_3 = x$ ist also symmetrisch in Bezug auf die Schwerlinien selbst; die zugeordneten Seiten bezeichnen die Richtung der Symmetrie.

5. Der Ausdruck $rt - s^2$ erleidet zufolge (7) einen Zeichenwechsel in jenen Punkten der Fläche, für welche

$$(13) \quad P_1^2 u_1^2 + P_2^2 u_2^2 + P_3^2 u_3^2 - 2P_2 P_3 u_2 u_3 - 2P_3 P_1 u_3 u_1 - 2P_1 P_2 u_1 u_2 = 0$$

ist. Diese Gleichung stellt einen Kegelschnitt dar; in ihrer normalen Form

$$a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + 2a_{12} xy + 2a_{13} x + 2a_{23} y + a_{33} = 0$$

haben die Coefficienten a_{11} , a_{12} , a_{22} die Werte

$$(14) \quad \begin{aligned} a_{11} &= 2(P_1^2 a_1^2 + P_2^2 a_2^2 + P_3^2 a_3^2) \\ a_{12} &= 2(P_1^2 a_1 b_1 + P_2^2 a_2 b_2 + P_3^2 a_3 b_3) \\ a_{22} &= 2(P_1^2 b_1^2 + P_2^2 b_2^2 + P_3^2 b_3^2) \end{aligned}$$

wie man mit Hilfe der Bemerkung, dass $\sum a_i P_i = 0$ und $\sum b_i P_i = 0$, leicht findet; mithin ist

$$a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = 3 P_1^2 P_2^2 P_3^2$$

positiv, der Kegelschnitt eine Ellipse. Um die Punkte zu finden, welche sie mit den Geraden $u_i = 0$ gemein hat, verbinde man (13) mit $u_1 = 0$; die daraus entspringende Gleichung

$$(P_2 u_2 - P_3 u_3)^2 = 0$$

zeigt, dass die Ellipse (13) die Seite $u_1 = 0$ in ihrem Schnittpunkte mit der Geraden

$$P_2 u_2 - P_3 u_3 = 0$$

berührt; diese Gerade ist aber die durch M_1 gehende Schwerlinie, wie man sich überzeugt, indem man λ in (9) auf Grund der Forderung bestimmt, dass letztere Gerade durch den Schwerpunkt S gehen soll. Mithin berührt die Ellipse (13) die Seiten des Dreiecks $M_1 M_2 M_3$ in ihren Mittelpunkten. Dies führt zu folgendem Resultate:

Das Gebiet der elliptischen Punkte auf der Fläche (3) wird von dem Gebiet der hyperbolischen Punkte getrennt durch eine Raumcurve sechster Ordnung mit parabolischen Punkten, welche sich auf die Ebene der drei Geraden $u_i = 0$ in eine Ellipse projiziert, die den gemeinsamen Schwerpunkt S der Dreiecke $M_1 M_2 M_3$ und $N_1 N_2 N_3$ zum Centrum hat und ihre Seiten in den Mitten berührt.

6. Bezüglich der weiteren Krümmungsverhältnisse weist die Fläche einige bemerkenswerte Eigenschaften auf, die nun entwickelt werden sollen.

In den Punkten M_1, M_2, M_3 fallen die Inflexionstangenten der Fläche mit den daselbst sich schneidenden Geraden $u_i = 0$ zusammen, die Haupttangenten halbieren also die Innen- und Außenwinkel des Dreiecks. Insbesondere ist in dem Punkte M_1

$$u_2 = 0, u_3 = 0, u_1 = \frac{R}{P_1}, p = 0, q = 0$$

ferner laut (6)

$$\begin{aligned} r &= 2 a_2 a_3 \frac{R}{P_1} \\ s &= (a_2 b_3 + a_3 b_2) \frac{R}{P_1}, \\ t &= 2 b_2 b_3 \frac{R}{P_1}; \end{aligned}$$

die Gleichung zur Bestimmung der Hauptkrümmungsradien ρ_1, ρ_2 lautet demnach

$$R^2 \rho^2 + \frac{2R}{P_1} (a_2 a_3 + b_2 b_3) \rho - 1 = 0.$$

Hieraus schließt man einmal, dass die mittlere Krümmung in M_1 gleich ist

$$(15) \quad \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) = - \frac{R}{P_1} (a_2 a_3 + b_2 b_3) = R \cotg M_1,$$

weil $P_1 = \sin M_1$ und $a_2 a_3 + b_2 b_3 = -\cos M_1$; analog in M_2 gleich $R \cotg M_2$ und in M_3 gleich $R \cotg M_3$ — sie verschwindet also in M_i und die beiden Krümmungsradien werden entgegengesetzt gleich, wenn das Dreieck dort rechtwinklig ist, wie dies auch aus der Orthogonalität der Inflexionstangenten hervorgeht; ferner dass das Gauß'sche Krümmungsmaß

$$(16) \quad \frac{1}{\rho_1 \rho_2} = - R^2$$

in allen drei Ecken des Dreiecks $M_1 M_2 M_3$ dasselbe ist.

In dem Punkte, welcher dem Maximum von z entspricht und auf der xy -Ebene in den Schwerpunkt S des Dreiecks sich projiziert, ist

$$P_1 u_1 = P_2 u_2 = P_3 u_3, \quad p = 0, \quad q = 0,$$

ferner vermöge der Gleichungen (6)

$$\begin{aligned} r &= \frac{2R}{3} \left(\frac{a_2 a_3}{P_1} + \frac{a_3 a_1}{P_2} + \frac{a_1 a_2}{P_3} \right) = - \frac{R}{3 P_1 P_2 P_3} \sum a_i^2 P_i^2 \\ s &= \frac{R}{3} \left(\frac{a_2 b_3 + a_3 b_2}{P_1} + \frac{a_3 b_1 + a_1 b_3}{P_2} + \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{P_3} \right) = - \frac{R}{3 P_1 P_2 P_3} \sum a_i b_i P_i^2 \\ t &= \frac{2R}{3} \left(\frac{b_2 b_3}{P_1} + \frac{b_3 b_1}{P_2} + \frac{b_1 b_2}{P_3} \right) = - \frac{R}{3 P_1 P_2 P_3} \sum b_i^2 P_i^2; \end{aligned}$$

mittelst dieser Werte lässt sich die zur Bestimmung des Haupttangentenrichtungen führende Gleichung aufstellen, sie lautet

$$(17) \quad \operatorname{tg}^2 \theta \sum a_i b_i P_i^2 + \operatorname{tg} \theta \sum P_i^2 (a_i^2 - b_i^2) - \sum a_i b_i P_i^2 = 0;$$

wenn man aber darauf ausgeht, für die Ellipse (13) die Axenrichtungen zu bestimmen, so findet man, dass die hierzu dienliche Gleichung

$$a_{12} \operatorname{tg}^2 \vartheta + (a_{11} - a_{22}) \operatorname{tg} \vartheta - a_{12} = 0,$$

wenn man sie mittelst der in (14) zusammengestellten Werte von a_{11} , a_{22} , a_{12} ausführt, mit (17) übereinstimmt.

Es projectiren sich also die Haupttangenten im Culminationspunkt der Fläche (3) in die Axen der Ellipse, welche die Seiten des Dreiecks $M_1 M_2 M_3$ in ihren Mittelpunkten berührt.

Hieraus folgt, dass der Culminationspunkt ein Nabelpunkt ist, wenn die Geraden $u_i = 0$ ein gleichseitiges Dreieck begrenzen.

Die Hauptkrümmungsradien ρ_1 , ρ_2 sind als die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$(18) \quad \frac{R^2}{3} \rho^2 - \frac{2R}{3} \left(\frac{a_2 a_3 + b_2 b_3}{P_1} + \frac{a_3 a_1 + b_3 b_1}{P_2} + \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{P_3} \right) \rho + 1 = 0$$

zu bestimmen, welche auch in der Form

$$\frac{R^2}{3} \rho^2 + \frac{R}{3 P_1 P_2 P_3} (P_1^2 + P_2^2 + P_3^2) \rho + 1 = 0$$

geschrieben werden kann. Hieraus folgt, dass die mittlere Krümmung im Culminationspunkte

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) \\ &= \frac{R}{3} \left(\frac{a_2 a_3 + b_2 b_3}{P_1} + \frac{a_3 a_1 + b_3 b_1}{P_2} + \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{P_3} \right) \\ (19) \quad &= -\frac{R}{3} (\cotg M_1 + \cotg M_2 + \cotg M_3) \\ &= -\frac{R}{6 P_1 P_2 P_3} (P_1^2 + P_2^2 + P_3^2) = -\frac{R}{6} \frac{\sin^2 M_1 + \sin^2 M_2 + \sin^2 M_3}{\sin M_1 \sin M_2 \sin M_3} \end{aligned}$$

gleichkommt dem arithmetischen Mittel der mittleren Krümmungen in M_1 , M_2 , M_3 , mit entgegengesetztem Vorzeichen genommen, und dass das Krümmungsmaß daselbst

$$(20) \quad \frac{1}{\rho_1 \rho_2} = \frac{1}{3} R^2$$

dem absoluten Werte nach ein Drittel von jenem in den Ecken ist.

7. Wenn von der Ortscurve $u_1 u_2 u_3 = z$ ein Punkt A gegeben ist, so lassen sich die beiden anderen, welche mit ihm und mit einer Ecke, z. B. M_1 , auf einer Geraden liegen, durch einfache Construction finden; sie mögen mit V, W bezeichnet werden. Ist nämlich U_1 der Schnittpunkt des Strahls $M_1 A$ mit $u_1 = 0$, setzt man $M_1 A = \alpha$, $A U_1 = 2\beta$, $M_1 W = w$ und nennt die Lothe, welche aus A auf die drei Geraden gefällt werden, u_1, u_2, u_3 , so haben die aus W gefällten Lothe, wenn man, um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, annimmt, dass die Strecken $M_1 A, M_1 W, M_1 U_1$ gleich gerichtet sind, die Längen

$$u'_1 = u_1 \frac{\alpha + 2\beta - w}{2\beta}$$

$$u'_2 = u_2 \frac{w}{\alpha}$$

$$u'_3 = u_3 \frac{w}{\alpha};$$

soll nun $u'_1 u'_2 u'_3 = u_1 u_2 u_3$ sein, so muss

$$\frac{w^2}{\alpha^2} \frac{\alpha + 2\beta - w}{2\beta} = 1$$

werden, und diese in Bezug auf w cubische Gleichung gibt außer der bekannten Wurzel $w = \alpha$ noch die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$w^2 - 2\beta w - 2\alpha\beta = 0,$$

d. i.

$$w = \beta \pm \sqrt{\beta^2 + 2\alpha\beta}$$

oder wenn man das geometrische Mittel aus α und 2β mit γ bezeichnet,

$$w = \beta \pm \sqrt{\beta^2 + \gamma^2};$$

die positive dieser leicht zu construierenden Strecken ist von M_1 in der Richtung gegen U_1 , die negative in der entgegengesetzten Richtung aufzutragen; erstere bestimmt W , letztere V .

Die beiden Punkte A und W fallen in einen zusammen, der Strahl $M_1 U_1$ wird also zur Tangente an die Ortscurve, wenn

$$\alpha = \beta + \sqrt{\beta^2 + 2\alpha\beta};$$

dann ist das Verhältniss

$$\frac{\alpha}{2\beta} = \frac{M_1 A}{A U_1} = 2;$$

es fallen also die Berührungspunkte der aus M_1 an die Ortscurven $u_1 u_2 u_3 = x$ gezogenen Tangenten in die Gerade, welche durch den Schwerpunkt S parallel zu $u_1 = 0$ gezogen wird. Daher:

Die aus den Ecken M_1, M_2, M_3 an die Ortscurven $u_1 u_2 u_3 = x$ geführten Tangenten berühren diese dort, wo sie von den durch den Schwerpunkt zu $u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 0$ beziehungsweise gezogenen Parallelen getroffen werden, während vermöge der Symmetrie die zu den Geraden $u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 0$ parallelen Tangenten sie in den Punkten der durch M_1, M_2, M_3 respective laufenden Schwerlinien berühren.

II.

8. Es möge nun der besondere Fall in Betracht gezogen werden, dass zwei der Geraden $u_i = 0$, z. B. $u_2 = 0$ und $u_3 = 0$ parallel sind; die Untersuchung gestaltet sich am einfachsten, wenn man die dritte Seite $u_1 = 0$ zur Abscissenaxe und den Mittelpunkt der in ihr gelegenen endlichen Seite $M_2 M_3$ des Dreiecks $M_1 M_2 M_3$ zum Ursprung macht; es sind dann

$$\begin{aligned} u_1 &\equiv -(-y) = 0 \\ (21) \quad u_2 &\equiv -(a_2 x + b_2 y - p_2) = 0 \\ u_3 &\equiv -(-a_2 x - b_2 y - p_2) = 0 \end{aligned}$$

die Gleichungen der drei Geraden und

$$(22) \quad z = -y [(a_2 x + b_2 y)^2 - p_2^2]$$

die Gleichung der Fläche, welche der Fläche (3) des allgemeinen Falles entspricht.

Die xy -Ebene zerfällt nun durch die drei Geraden in sechs Felder; in drei derselben, welche in den Ecken M_2, M_3 zusammenstoßen, ist das Product $u_1 u_2 u_3$ positiv, in den drei andern negativ; daraus ergibt sich auch die Anordnung der Fläche (22) in Bezug auf die genannte Ebene.

9. Die Verticalebene

$$(23) \quad u_2 - \lambda u_1 = 0,$$

welche durch M_3 geht, ergibt mit (22) einen Schnitt, welcher sich auf der zx -Ebene in die Curve dritter Ordnung

$$(24) \quad z = \frac{\lambda}{(b_2 + \lambda)^3} (a_2 x - p_2)^2 [(a_2 x + p_2)\lambda + 2b_2 p_2]$$

projiciert, die die x -Axe in dem Punkte

$$x_1 = -\frac{p_2 \lambda + 2b_2 p_2}{a_2 \lambda}$$

schneidet und in dem Punkte

$$x_2 = \frac{p_2}{a_2}$$

berührt — der erste Punkt entspricht dem Schnittpunkte des Originals mit $u_3 = 0$, der zweite M_3 ; zwischen beiden Punkten an der Stelle

$$\xi = \frac{p_2 \lambda - 2b_2 p_2}{3a_2 \lambda} = \frac{x_1 + 2x_2}{3}$$

hat die Curve einen Wendepunkt; ξ aber entspricht im Original dem an M_3 näher liegenden Drittpunkt der in (23) enthaltenen Transversale von $M_1 M_2 M_3$.

Ein ähnliches Resultat ergibt sich für die durch M_2 gelegten Verticalschnitte.

Es projicieren sich also die Wendepunkte der durch M_2, M_3 gelegten Verticalschnitte in die Geraden $v_2 = 0, v_3 = 0$ beziehungsweise, welche den von den parallelen Geraden $u_2 = 0, u_3 = 0$ begrenzten Streifen in der durch die Buchstaben angedeuteten Reihenfolge in drei gleiche Theile theilen.

10. Die Verticalebene

$$(25) \quad u_1 = \pi_1$$

gibt mit der Fläche einen Durchschnitt, der sich auf der zx -Ebene in die Parabel

$$(26) \quad z = -\pi_1 (a_2^2 x^2 + 2a_2 b_2 \pi_1 x + b_2^2 \pi_1^2 - p_2^2)$$

projiciert, also selbst eine Parabel ist, deren verticale Axe sich nach abwärts oder aufwärts wendet, jenachdem π_1 positiv oder negativ ist. Die Scheitel all dieser Parabeln projicieren sich in die Mittellinie des von $u_2 = 0$ und $u_3 = 0$ begrenzten Streifens.

Die Fläche (22) wird hiernach durch Verticalebenen parallel zu $u_1 = 0$ nach Parabeln mit verticaler, nach abwärts oder aufwärts gerichteter Axe geschnitten, jenachdem die schneidende Ebene auf Seite der positiven oder negativen y liegt. Hieraus folgt, dass die Fläche symmetrisch ist in Bezug auf die Verticalebene, welche die Mittellinie des von $u_2 = 0$ und $u_3 = 0$ begrenzten Streifens zur Spur hat, während die Ortscurven $u_1 u_2 u_3 = x$, Curven dritter Ordnung mit den Asymptoten $u_i = 0$, in Bezug auf die Mittellinie selbst symmetrisch sind; $u_1 = 0$ gibt die Richtung der Symmetrie an.

11. Die zu $u_2 = 0$ und $u_3 = 0$ parallele Verticalebene

$$(27) \quad a_2 x + b_2 y = \pi_2$$

ergibt mit der Fläche einen Schnitt, der sich auf der zy -Ebene in die Gerade

$$(28) \quad z = -(\pi_2^2 - p_2^2)y$$

projiciert, also selbst eine die x -Axe schneidende Gerade ist.

Da hiernach die Fläche (22) durch alle zu $u_2 = 0$ und $u_3 = 0$ parallelen Verticalebenen nach Geraden geschnitten wird, so ist sie eine Regelfläche dritten Grades, und zwar ein besonderer Fall des parabolischen Conoids. Als Leitcurve zu ihrer Erzeugung kann eine beliebige der in Art. 10 betrachteten Parabeln dienen; Leitgerade ist die x -Axe, Richtebene die Verticalebene $a_2 x + b_2 y = 0$. Die Erzeugende, welche sich in die Mittellinie des von $u_2 = 0$ und $u_3 = 0$ begrenzten Streifens projiciert und der Ort der Scheitel aller parabolischen Schnitte der Fläche ist, ist zugleich der Ort ihrer parabolischen Punkte, die sogenannte Kante; in allen andern Punkten hat die Fläche negative Krümmung.

Es geht dies aus (22) hervor, da

$$r = 2a_2^2 y$$

$$s = 2a_2^2 x + 4a_2 b_2 y$$

$$t = 4a_2 b_2 x + 6b_2^2 y,$$

folglich

$$rt - s^2 = -(a_2 x + b_2 y)^2$$

wesentlich negativ und nur für Punkte der erwähnten Geraden Null ist.

12. Das der Gleichung (22) zu Grunde liegende Coordinatensystem führt zu verschiedenen Darstellungsformen der Fläche; während bei orthogonaler Projection auf der xy -Ebene die Erzeugenden in ein Parallelstrahlenbüschel sich abbilden, geben sie bei ebensolcher Projectiionsweise auf der yz -Ebene ein centrales Strahlenbüschel; auf der zx -Ebene bilden sie sich bei jeder Richtung des Projectiionsstrahls in das Tangentensystem einer Curve vierter Ordnung ab, welche den scheinbaren Umriss dieser Projection darstellt.

Es sei nämlich

$$(29) \quad (\xi - m)^2 = 2q(\zeta - n)$$

die in irgend einer Richtung gebildete Parallelprojection der Leitparabel P , von welcher also angenommen wird, dass ihre Axe die Richtung der positiven z -Axe habe; m, n sind die Coordinaten des

Scheitels; dann ist die Projection der Erzeugenden, welche durch den dem Punkte (ζ, ξ) zugeordneten Punkt von P geht, dargestellt durch die Gleichung

$$x - \xi = \frac{m}{\zeta} (z - \zeta)$$

oder, in anderer Form geschrieben,

$$(30) \quad \zeta x = m z + (\xi - m) \zeta.$$

Es handelt sich nun um die Einhüllende der Geraden (30), deren Parameter ζ, ξ an die Gleichung (29) gebunden sind. Eliminiert man zu diesem Zwecke zwischen (29), (30) und den beiden durch Differentiation in Bezug auf ζ daraus hervorgehenden Gleichungen ζ und $\frac{d\xi}{d\zeta}$, so kommt es schließlich darauf an, die Resultante des Gleichungspaares

$$\begin{aligned} (\xi - m)^3 - x(\xi - m)^2 + 2nq(\xi - m) + 2q(mz - nx) &= 0 \\ 3(\xi - m)^2 - 2x(\xi - m) + 2nq &= 0 \end{aligned}$$

in Bezug auf $\xi - m$ aufzustellen; dadurch ergibt sich die Gleichung der Einhüllenden

$$(31) \quad 2nx^4 - 2mzx^3 + 8n^2q^2x^2 - 36mnqzx + 27m^2q^2z^2 + 8n^3q^2 = 0.$$

Zunächst ist zu bemerken, dass die Curve die Gerade

$$nx - mz = 0,$$

welche den Ursprung mit dem Scheitel der Projection von P verbindet und die Projection der Kante der Fläche ist, zur Asymptote hat. Ihre verschiedenen Formen lassen sich an der Hand der Discriminante ihrer Gleichung in Bezug auf z auseinanderhalten; diese Discriminante

$$(2mx^3 + 36mnqx)^2 - 108m^2q(2nx^4 + 8n^2qx^2 + 8n^3q^2)$$

reducirt sich nach einfacher Rechnung auf

$$4m^2(x^2 - 6nq)^3.$$

Ist n negativ, so schneidet die Projection von P die x -Axe, also die Leitgerade, und es gehören zu jedem Werte von x zwei reelle Werte von z . Da die linke Seite von (31) sich nicht ändert, wenn man z, x durch $-z, -x$ ersetzt, so besteht die Curve aus zwei in Bezug auf den Ursprung centrsymmetrischen Ästen und hat, wie der Gleichung leicht zu entnehmen ist, die x -Axe zur Doppel- tangente mit den Berührungspunkten $(x = \pm \sqrt{-2nq}, z = 0)$.

Bei positivem n , wenn also die Projection von P die x -Axe nicht schneidet, ist z nur insolange reell, als $|x| \geq \sqrt{6nq}$; für $|x| = \sqrt{6nq}$ fallen die beiden Werte von z zusammen und werden von da ab imaginär. Die Curve besteht in diesem Falle aus zwei in Bezug auf den Ursprung centralsymmetrischen Ästen mit Spitzen in den Punkten

$$(32) \quad x = \mp \sqrt{6nq}, \quad z = \mp \frac{8n}{9m} \sqrt{6nq};$$

denn differentiiert man (31) in Bezug auf z , so entsteht die Gleichung

$$x' [4nx^3 - 3mzx^2 + 8n^2qx - 18mnqz] - mx^3 - 18mnqx + 27m^2qz = 0,$$

welche sich, den singulären Punkt charakterisierend, für die Werte (32) auf $0 \cdot x' + 0 = 0$ reducirt; differentiiert man aufs neue und führt in das Resultat abermals die Werte (32) ein, so ergibt sich die Gleichung

$$(4nx' - 3m)^2 = 0,$$

welche für den Richtungscoefficienten der Tangente in (32) den doppelt zählenden Wert $x' = \frac{3m}{4n}$ liefert; damit sind diese Punkte als Spitzen nachgewiesen.

Es sei endlich $n = 0$, ($m \geq 0$), die Projection von P berühre also die x -Axe. Dieser Fall tritt bei schiefer Projection ein, wenn die Projectionsrichtung der durch die Flächenkante und die Leitgerade bestimmten Ebene parallel ist, und bei orthogonaler Projection kann er sich ergeben, wenn die beiden parallelen Geraden $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ sich zu einer Geraden vereinigen, welche dann mit der Flächenkante identisch ist. In diesen Fällen geht die Gleichung (31) über in

$$(33) \quad z(2x^3 - 27mqz) = 0,$$

die Umrisscurve zerfällt in die x -Axe, welche zugleich Projection der Flächenkante ist, und die cubische Parabel

$$2x^3 - 27mqz = 0;$$

die beiden Spitzen des vorigen Falles sind hier im Ursprung vereinigt und die dort längs der Asymptote sich hinziehenden Äste sind hier zu den beiden Hälften der x -Axe verflacht.

Die Umrisscurve (31) hat mit der Projection (29) der Leitparabel P jene Punkte gemein und wird von ihr berührt, in welchen die Gerade (30) zugleich Tangente an (29) ist; weil dort die Richtungscoefficienten $\frac{q}{\xi - m}$ der Parabeltangente und $\frac{m}{\zeta}$ der Geraden

einander gleich sind, so erhält man diese Punkte, indem man die Gleichung

$$\frac{q}{\xi - m} = \frac{m}{\zeta}$$

mit der Gleichung (29) verbindet; mit anderen Worten, es sind diese Punkte die Schnittpunkte der durch den Punkt $(\zeta=0, \xi=m)$ laufenden Geraden

$$\xi - m = \frac{q}{m} \zeta$$

mit der Parabel (29). Sie sind reell und verschieden oder reell und gleich oder imaginär, je nachdem

$$m^2 - 2nq \gtrless 0.$$

13. Von den bezüglich der Krümmungsverhältnisse für die allgemeine Fläche gefundenen Resultaten sind zwei auf den vorliegenden Fall übertragbar; das Krümmungsmaß ist in den Punkten M_2 und M_3 gleich und $= -R^2$, und die mittleren Krümmungen daselbst sind entgegengesetzt gleich, weil in dem einen gleich $R \cotg M_2$, in dem anderen $R \cotg M_3$ und $M_2 + M_3 = 180^\circ$. Die Determinante R hat hier den Wert $2a_2 p_2$.

14. Die in Art 7 angegebene Construction der in einer Ecktransversale liegenden Punkte der Ortscurve $u_1 u_2 u_3 = x$, wenn einer dieser Punkte gegeben ist, behält auch in dem vorliegenden Falle Geltung und die für die Tangenten der Curve gezogene Schlussfolgerung lautet nun wie folgt: Die Berührungspunkte der Tangenten aus den Eckpunkten M_2, M_3 berühren die Curve dort, wo sie von den Geraden $v_3 = 0, v_2 = 0$ respective getroffen wird, während vermöge der Symmetrie die zu $u_1 = 0$ parallelen Tangenten sie in den Punkten berühren, welche sie mit der Symmetriaxe $a_2 x + b_2 y = 0$ gemein hat.

III.

15. Es bleibt noch der Fall zu erörtern, dass die drei Geraden $u_i = 0$ durch Einen Punkt gehen, dass also die Determinante R der Gleichungen (1) verschwindet. Dann empfiehlt es sich, den gemeinsamen Punkt zum Ursprung zu wählen; die Gleichungen der Geraden lauten bei dieser Annahme

$$(1^*) \quad u_i = -(a_i x + b_i y) = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Dadurch ist auch schon die Wahl der positiven Seite einer jeden Geraden getroffen und die Ebene ist durch die letzteren in

sechs Winkelräume zerlegt, in welchen das Product $u_1 u_2 u_3$ abwechselnd positiv und negativ ist, so dass die Fläche

$$(3^*) \quad z = u_1 u_2 u_3$$

abwechselnd über und unter der xy -Ebene liegt, welche sie längs der drei Geraden (1^{*}) schneidet.

Mit den Ebenen $u_1 = \pi_1$ gibt die Fläche parabolische Schnitte, deren verticale Axen ihre Richtung in die entgegengesetzte ändern, wenn π_1 sein Vorzeichen wechselt, und deren Scheitel sich in den zu $u_1 = 0$ zugeordneten harmonischen Strahl in Bezug auf $u_2 = 0$ und $u_3 = 0$, also in die Gerade $a_3 u_2 + a_2 u_3 = 0$ projicieren. Ähnliche Resultate ergeben sich für die zu den beiden anderen Geraden parallelen Verticalschnitte. Daraus folgt:

Die Fläche (3^{*}) wird durch Ebenen $u_i = \pi_i$ nach Parabeln mit verticaler Axe geschnitten, welche nach abwärts oder aufwärts gerichtet ist, jenachdem π_i positiv oder negativ, ist somit in Bezug auf die drei Verticalebenen, deren Spuren die Gleichungen

$$(34) \quad a_3 u_2 + a_2 u_3 = 0, \quad a_1 u_3 + a_3 u_1 = 0, \quad a_2 u_1 + a_1 u_2 = 0$$

haben, symmetrisch in den durch $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ bezeichneten Richtungen. Für die Ortscurven $u_1 u_2 u_3 = x$, welche aus drei unendlichen Ästen mit den Asymptoten (1^{*}) bestehen und entweder in den drei positiven oder den drei negativen Winkelräumen liegen, jenachdem $x > 0$ oder $x < 0$, sind die Geraden (34) Symmetrieaxen mit den bezeichneten Richtungen der Symmetrie.

Die Schnitte der Fläche mit Verticalebenen von der Gleichungsform

$$(35) \quad ax + by = 0$$

sind cubische Parabeln, deren Projection auf der zx -Ebene die allgemeine Gleichung

$$(36) \quad z = \frac{x^3}{b^3} \prod (a_i b - a b_i)$$

hat; der Ursprung ist Wendepunkt einer jeden solchen Schnittcurve, die Gerade (35) die Wendetangente. Bei stetiger Drehung von (35) um den Ursprung ändern die beiden von hier angehenden Curvenäste ihre Lage gegen die xy -Ebene, so oft (35) eine der Geraden (1^{*}) überschreitet.

Zufolge der Gleichung (7) ist

$$\begin{aligned} r t - s^2 = \\ = -P_1^2 u_1^2 - P_2^2 u_2^2 - P_3^2 u_3^2 + 2 P_2 P_3 u_2 u_3 + 2 P_3 P_1 u_3 u_1 + 2 P_1 P_2 u_1 u_2; \end{aligned}$$

die rechte Seite ist, da gegenwärtig u_i lineare Formen von x, y sind, eine quadratische Form dieser Variablen und kann mittelst der Bemerkung, dass $P_1 u_1 + P_2 u_2 + P_3 u_3 = 0$ durch einen anderen Ausdruck ersetzt werden, da vermöge dieser Relation

$$rt - s^2 = -2(P_1^2 u_1^2 + P_2^2 u_2^2 + P_3^2 u_3^2);$$

es ist also $rt - s^2$ wesentlich negativ, die Fläche besitzt nur hyperbolische Punkte, wie dies aus dem allgemeinen Falle unmittelbar hätte geschlossen werden können.

Da im Ursprung alle durch ihn gelegten Normalschnitte einen Wendepunkt, also einen unendlichen Krümmungsradius haben, so verhält sich dieser Punkt der Fläche ähnlich wie ein Nabelpunkt; jede zwei zu einander senkrechten Normalschnitte können als Hauptnormalschnitte angesehen werden.

Wenn endlich die drei Geraden $u_i = 0$ in Eine zusammenfallen, so wird aus der Fläche $u_1 u_2 u_3 = u^3 = 0$ ein Cylinder, dessen Normalschnitt eine cubische Parabel ist, und die Ortscurven $u_1 u_2 u_3 = u^3 = x$ gehen in ein System paralleler Geraden über.