DISTRIBUZIONE DELLE QUANTITÀ DI ELETTRICITÀ NEI RETICOLATI.

Nota di F. IACOVIELLO.

1. Tra i più recenti autori, che hanno trattato il problema della distribuzione delle correnti in un reticolato durante il regime permanente, trovo il Raynaud ¹⁾ ed il Maxwell ²⁾. Quest'ultimo s'è servito di un metodo più semplice e simmetrico: l'uno e l'altro hanno trovata la condizione necessaria perchè la corrente in un filo di un reticolato sia indipendente dal valore della f. e. m. attiva agente in un altro filo. Il Mascart ed il Joubert ³⁾ ripetendo il ragionamento del Raynaud, trovano la stessa condizione, senonchè poi ⁴⁾ affermano gratuitamente che questa condizione valga non solo qualunque sia il valore della f. e. m., ma anche il valore della resistenza. Pochi anni fa c'è stato fra i nostri elettrotecnici chi ha trattato il problema con metodo non privo di eleganza; ma la dimostrazione che la stessa condizione valga per l'indipendenza non solo della f. e. m. ma anche dalla resistenza, mi ha poco persuaso.

Qui tratterò un caso più generale: troverò la condizione necessaria e sufficiente, perchè l'intensità della corrente in un filo durante il regime permanente sia indipendente dalla differenza di potenziale di due nodi del reticolato, e quindi anche sia dalla f. e. m., sia dalla resistenza di un filo qualsiasi, che fa capo a questi due nodi. Dipoi troverò una condizione analoga per la quantità di elettricità durante il regime variabile. La soluzione di questa seconda parte del problema sarà molto utile per la misura delle resistenze elettrolitiche, come mostrerò in una prossima nota.

1) Journal de Physique, série 1, T. II, p. 161.

2) Maxwell. — Traité d'Électricité, T. I, pag. 458.

3) Mascart et Joubert — Leçons sur l'électricité et le magnétisme, T. II, p. 379.

4) Op. c., pag. 380.

2. Si abbia un reticolato composto di m fili conduttori, nel quale si sia stabilito il regime permanente. L'intensità delle correnti, le resistenze e le f. e. m. attive negli m fili costituiscono un gruppo di $3m$ variabili, le quali per le leggi di Kirchhoff soltanto $2m$ sono indipendenti. Se n sono i nodi, delle m relazioni, che si deducono da queste leggi, $m - (n - 1)$ sono del tipo

$$(1) \quad \sum r_u i_u = \sum e_u ,$$

e $(n - 1)$ del tipo

$$(2) \quad \sum i_u = 0 ,$$

dove r_u , i_u ed e_u indicano rispettivamente la resistenza, l'intensità e la f. e. m. attiva del filo u . L'equazioni del tipo (1) si possono mettere sotto la forma

$$(3) \quad \sum_{u=1}^{u=m} r_{su} i_u = \sum_{u=1}^{u=m} e_{su} ,$$

in cui r_{su} ed e_{su} sono uguali rispettivamente in valore assoluto alla resistenza ed alla f. e. m. attiva del filo u , oppure sono uguali a zero, se la maglia s a cui si riferisce l'equazione (3) non comprende il filo u . Analogamente l'equazione (2) si può mettere sotto la forma

$$(4) \quad \sum_{u=1}^{u=m} a_{tu} i_u = 0 ,$$

in cui a_{tu} è uguale in valore assoluto ad 1, oppure è eguale a zero, se il filo u non appartiene al nodo t , a cui si riferisce l'equazione (4). Se s indica con v_{s_1} la differenza di potenziale dei due nodi a cui fa capo il filo 1, numero col quale si può indicare uno qualsiasi dei fili del reticolato, si ha

$$v_{s_1} = e_{s_1} - r_{s_1} i_1 .$$

Per questa relazione la (3) diventa

$$(5) \quad \sum_{u=2}^{u=m} r_{su} i_u = \sum_{u=2}^{u=m} e_{su} + v_{s_1} ,$$

in cui però $v_{s_1} = 0$ se il filo 1 non fa parte della maglia s .

Dal sistema delle m equazioni lineari del tipo 4 e 5 possiamo facilmente dedurre i valori delle intensità delle correnti in funzione delle altre $2m - 1$ variabili. Per l'intensità i_u avremo quindi ponendo

$$m - (n - 1) = p .$$

$$n - 1 = q ,$$

$$D = \begin{vmatrix} 0 & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1u-1} & r_{1u} & r_{1u+1} & \dots & r_{1m} \\ 0 & r_{22} & r_{23} & \dots & r_{2u-1} & r_{2u} & r_{2u+1} & \dots & r_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & r_{p2} & r_{p3} & \dots & r_{pu-1} & r_{pu} & r_{pu+1} & \dots & r_{pm} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1u-1} & a_{1u} & a_{1u+1} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2u-1} & a_{2u} & a_{2u+1} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{q1} & a_{q2} & a_{q3} & \dots & a_{qu-1} & a_{qu} & a_{qu+1} & \dots & a_{qm} \end{vmatrix} ,$$

$$(6) \quad D_u = \begin{vmatrix} 0 & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1u-1} & v_{11} + \sum_{u=2}^{u=m} e_{1u} r_{1u+1} & \dots & r_{1m} \\ 0 & r_{22} & r_{23} & \dots & r_{2u+1} & v_{21} + \sum_{u=2}^{u=m} e_{2u} r_{2u+1} & \dots & r_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & r_{p2} & r_{p3} & \dots & r_{pu-1} & v_{p1} + \sum_{n=2}^{u=m} e_{pu} r_{pu+1} & \dots & r_{pm} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1u-1} & 0 & a_{1u+1} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2u-1} & 0 & a_{2u+1} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{q1} & a_{q2} & a_{q3} & \dots & a_{qu-1} & 0 & a_{qu+1} & \dots & a_{qm} \end{vmatrix} ,$$

$$(7) \quad i_u = \frac{D_u}{D} .$$

Indichiamo con Δ il determinante del sistema delle equazioni (3) e (4). Il determinante D si ottiene dal determinante Δ , sostituendo zero alla resistenza r_1 del filo 1. Ora il determinante Δ ha un valore finito diverso da zero, perchè è uguale alla somma di più termini che hanno tutti lo stesso se-

gno ¹⁾. Ciascuno di questi termini è un prodotto di p fattori, uguali a p resistenze di p fili diversi, in modo che, sopprimendo questi p fili, non rimanga del reticolato alcuna figura chiusa, e ne rimanga una sola, sopprimendone $p - 1$. Ora facendo uguale a zero nel determinante Δ la resistenza r_1 , si sopprimono tutti i prodotti, in cui entra come fattore la detta resistenza. Ma il determinante Δ è composto oltre che di questi prodotti almeno di un altro, in cui non entri come fattore la resistenza del filo 1. Infatti consideriamo un prodotto, in cui entri la resistenza del filo 1 come fattore, e sopprimiamo nel reticolato i $p - 1$ fili diversi da 1, le cui resistenze costituiscono gli altri $p - 1$ fattori di questo prodotto. Del reticolato rimarrà allora una sola maglia, nella quale oltre il filo 1 dovrà trovarsi almeno un altro filo diverso dai $p - 1$ considerati. Sopprimendo quest'altro filo, non rimarrà del reticolato alcuna figura chiusa, e quindi la resistenza di questo filo insieme con quelle dei $p - 1$ fili diversi da 1 costituiscono un prodotto di p fattori, appartenente al determinante Δ . Ora questo prodotto non viene soppresso, quando si fa uguale a zero nell'espressione di Δ la resistenza del filo 1, e perciò anche il determinante D ha un valore finito diverso da zero.

Questo determinante inoltre non dipende dalla differenza di potenziale v_1 . Quindi perchè i_u sia indipendente da v_1 , si dovrà avere

$$\frac{\partial D_u}{\partial v_1} = 0 ,$$

ossia

$$(8) \quad \begin{vmatrix} 0 & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1u-1} & b_{11} & r_{1u+1} & \dots & r_{1m} \\ 0 & r_{22} & r_{23} & \dots & r_{2u-1} & b_{21} & r_{2u+1} & \dots & r_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & r_{p2} & r_{p3} & \dots & r_{pu-1} & b_{p1} & r_{pu+1} & \dots & r_{pm} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1u-1} & 0 & a_{1u+1} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2u-1} & 0 & a_{2u+1} & \dots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{q1} & a_{q2} & a_{q3} & \dots & a_{qu-1} & 0 & a_{qu+1} & \dots & a_{qm} \end{vmatrix} = 0 ,$$

1) Vedi Raynaud op. c., pag. 166 e 167.

dove b_{s1} è uguale in valore assoluto ad 1, oppure a zero, se il filo 1 non appartiene alla maglia s . Questa equazione stabilisce una relazione tra $m - 2$ resistenze del reticolato, nelle quali non sono comprese nè quella del filo 1 nè quella del filo u ; essa quindi permette di determinare una delle altre $m - 2$ resistenze, quando sono note le rimanenti. Possiamo dunque concludere: *la condizione necessaria e sufficiente perchè l'intensità in un filo appartenente ad un reticolato resti costante, comunque si faccia variare la differenza di potenziale di due punti del reticolato* (e quindi sia la f. e. m. attiva, sia la resistenza di un filo che fa capo a questi due punti), *è espressa analiticamente dalla relazione (8).*

Caso particolare di questa proposizione, che io non so se finora sia stata dimostrata in modo così generale, è la condizione dell'equilibrio in un ponte di Wheatstone. Faccio notare che la condizione (8) è identica a quella trovata dagli autori anzidetti per l'indipendenza della sola f. e. m. Infatti si può passare dalla prima alla seconda, aggiungendo agli elementi della prima colonna quelli della u esima moltiplicati per la resistenza r_1 del filo 1.

3. Supponiamo che, oltre le f. e. m. costanti e_{su} , agiscano nel reticolato delle f. e. m. variabili.

Indichiamo con j_u l'aumento che subisce l'intensità i_u per queste f. e. m. variabili, con M_{zsu} il coefficiente di induzione tra il filo u e z , e con ϵ_{su} la f. e. m. variabile. Durante lo stato variabile le relazioni, che esprimono le leggi di Kirchhoff, saranno

$$\sum_{u=1}^{u=m} r_{su} (i_u + j_u) + \sum_{u=1}^{u=m} \sum_{z=1}^{z=m} M_{zsu} \frac{dj_z}{dt} = \sum_{u=1}^{u=m} e_{su} + \sum_{u=1}^{u=m} \epsilon_{su} ,$$

$$\sum_{u=1}^{u=m} a_{tu} (i_u + j_u) = 0 ;$$

e per le (3) e (4)

$$\sum_{u=1}^{u=m} r_{su} j_u + \sum_{u=1}^{u=m} \sum_{z=1}^{z=m} M_{zsu} \frac{dj_z}{dt} = \sum_{u=1}^{u=m} \epsilon_{su} ,$$

$$\sum_{u=1}^{u=m} a_{tu} j_u = 0$$

Ora supponiamo che le f. e. m. variabili durino dal tempo t_1 a t_2 , e che tanto i coefficienti di induzione quanto le resistenze rimangano costanti durante questo tempo ¹⁾. Avremo allora

$$\int_{t_1}^{t_2} M_{su} \frac{dj_z}{dt} dt = M_{su} \int_{t_1}^{t_2} di_z = 0 .$$

Quindi moltiplicando le due equazioni precedenti per dt , ponendo

$$j_u dt = dq_u ,$$

ed integrando, si ottengono le due relazioni

$$(9) \quad \sum_{u=1}^{u=m} r_{su} q_u = \sum_{u=1}^{u=m} \int_{t_1}^{t_2} \epsilon_{su} dt ,$$

$$(10) \quad \sum_{u=1}^{u=m} a_{su} q_u = 0 .$$

Alla (9), ponendo

$$w_{s_1} = \int_{t_1}^{t_2} \epsilon_{s_1} dt - a_{s_1} q_1 ,$$

possiamo sostituire l'altra

$$(11) \quad \sum_{u=2}^{u=m} r_{su} q_u = \sum_{u=2}^{u=m} \int_{t_1}^{t_2} \epsilon_{su} dt + w_{s_1} .$$

Le relazioni (10) ed (11) sono analoghe alle (4) e (5). Esse ne differiscono, perchè le quantità di elettricità q_u fanno le veci delle intensità delle correnti i_u , gl' integrali delle f. e. m. variabili le veci delle f. e. m. costanti, e l' integrale della differenza di potenziale variabile agli estremi del filo 1 le veci

1) La costanza dei coefficienti d' induzione e delle resistenze è confermata dall'esperienza sempre che non si tratti di correnti oscillanti di alta frequenza, e che inoltre per i coefficienti d' induzione non vari la permeabilità del mezzo con l' intensità del campo. Con queste restrizioni saranno valide le conseguenze, a cui si giunge in questo e nei successivi paragrafi.

della differenza di potenziale costante agli estremi di questo filo. Risolvendo perciò il sistema di equazioni (10) ed (11) rispetto alle q_u , i valori di queste differiscono da quelli delle i_u semplicemente perchè gl'integrali delle f. e. m. variabili tengono il luogo delle f. e. m. costanti. Quindi la derivata $\frac{dq_u}{dv_{s_1}}$ è identica a $\frac{di_u}{dv_{s_1}}$, e se ne deduce che *la condizione necessaria e sufficiente perchè la somma algebrica delle quantità di elettricità, che attraversino un filo di un reticolato a causa di f. e. m. variabili, sia indipendente dall'integrale della differenza di potenziale variabile di due punti del reticolato, è espressa dalla relazione (8)*

Nel caso particolare che non esista alcuna f. e. m. costante o variabile in tutti i fili diversi del filo 1, tanto l'intensità della corrente per lo stato permanente, quanto la somma algebrica delle quantità di elettricità durante lo stato variabile hanno un valore nullo nel filo u , quando sia soddisfatta la relazione (8), qualunque sia la differenza di potenziale costante o l'integrale della differenza di potenziale variabile agli estremi del filo 1.

Queste conseguenze restano valide, anche quando s'inseriscano dei condensatori nei fili del reticolato. Infatti per questa introduzione bisogna aggiungere nel 2° membro dell'equazione (9) gl'integrali delle differenze di potenziale tra le armature dei condensatori. Considerando queste differenze di potenziale come delle f. e. m. attive, l'equazioni (10) ed (11) continuano a sussistere con tutte le conseguenze, che ne abbiamo dedotte. In particolare se esiste soltanto un condensatore nel filo 1, la scarica di questo condensatore, oppure la variazione di potenziale, a cui esso può andar soggetto per le correnti nel filo 1, non apportano alcuna variazione alla somma algebrica delle quantità di elettricità che attraversino il filo u , nel caso che sia soddisfatta la relazione (8).

4. È interessante il caso, in cui per ogni maglia il rapporto tra la somma algebrica degli integrali delle f. e. m. variabili e quella delle f. e. m. costanti sia sempre il medesimo; caso che si avvera sempre quando le f. e. m. costanti

e variabili non esistono che in un solo filo. Questo caso è espresso analiticamente dalla relazione

$$(12) \quad \sum_{u=1}^{u=m} \int_{t_1}^{t_2} \epsilon_{su} dt : \sum_{u=1}^{u=m} e_{su} = K = \text{costante} ,$$

qualunque sia s . Avremo allora per due fili t ed u

$$(13) \quad \frac{q_t}{q_u} = \frac{i_t}{i_u} .$$

Infatti l'intensità

$$(14) \quad i_u = \left[A_{1u} \sum_{u=1}^{u=m} e_{1u} + A_{2u} \sum_{u=1}^{u=m} e_{2u} + \dots + A_{pu} \sum_{u=1}^{u=m} e_{pu} \right] \frac{1}{\Delta} ,$$

dove A_{su} è il complemento algebrico dell'elemento r_{su} del determinante Δ . Analogamente si ha

$$q_u = \left[A_{1u} \sum_{u=1}^{u=m} \int_{t_1}^{t_2} \epsilon_{1u} dt + A_{2u} \sum_{u=1}^{u=m} \int_{t_1}^{t_2} \epsilon_{2u} dt + \dots + A_{pu} \sum_{u=1}^{u=m} \int_{t_1}^{t_2} \epsilon_{pu} dt \right] \frac{1}{\Delta} ,$$

e per la (12)

$$q_u = \left[A_{1u} \sum_{u=1}^{u=m} e_{1u} + A_{2u} \sum_{u=1}^{u=m} e_{2u} + \dots + A_{pu} \sum_{u=1}^{u=m} e_{pu} \right] \frac{K}{\Delta} .$$

Dividendo membro a membro questa relazione per la (14) si ha

$$\frac{q_u}{i_u} = K ,$$

qualunque sia u . Per 2 fili qualsiasi t ed u si ha allora

$$\frac{q_u}{i_u} = \frac{q_t}{i_t} ,$$

donde si deduce la (13).

Se i due fili t ed u fanno capo agli stessi nodi, e le somme algebriche delle f. e. m. costanti e degli integrali delle

f. e. m. variabili sono eguali a zero nella maglia da essi costituita, si avrà dalle relazioni (3) e (9)

$$\frac{i_u}{i_t} = \frac{q_u}{q_t} = \frac{r_t}{r_u}.$$

Questa relazione è stata trovata dal Garbasso¹⁾ nel caso particolare della scarica di un condensatore in n fili in parallelo.

5. La relazione (13) si può sottomettere all'esperienza nel seguente modo. S' inserisca nel filo t un rocchetto e nel filo u l'altro rocchetto di un galvanometro differenziale e balistico. Si faccia poi agire una pila in un filo del reticolato, e si regolino le distanze dei rocchetti dell'ago, e le resistenze dei fili t ed u in modo che l'ago resti nella posizione di riposo. Sostituendo alla corrente costante della pila una scarica di un condensatore o di un rocchetto d' induzione, l'ago dovrebbe continuare a star fermo.

Ho mandato la corrente di un accumulatore in due fili in parallelo, in ciascuno dei quali era stato inserito una coppia di rocchetti di un galvanometro Hartmann, la cui durata di oscillazione semplice era di circa 10 secondi; e nel modo descritto ho ottenuto l'azzeramento dell'ago. Scaricando poi un condensatore attraverso i due fili oppure facendovi agire la corrente indotta di un rocchetto non ho mai osservato alcuna deviazione dell'ago. La sensibilità del galvanometro era tale che $\frac{1}{100}$ di microcoulomb produceva una deviazione di circa 12 mm. sulla scala posta a 5 m. dallo specchietto; ed il condensatore era formato da recipienti cilindrici di vetro ad armature di stagnola, aveva la capacità di circa $\frac{1}{100}$ di microfaraday, e veniva caricato a circa 5000 volta.

Ho sottomesso all'esperienza anche la proposizione dimostrata nel § 3. Con lo stesso galvanometro ho equilibrato un ponte di Wheatstone con le correnti costanti. Questo equilibrio è rimasto sempre inalterato, quando in luogo delle correnti costanti ho mandato nel ponte le scariche del condensatore e

1) Nuovo C. serie V, T. III, p. 380.

del rocchetto d'induzione. Tanto in questa esperienza quanto nella precedente ho inserito in uno dei fili uno o due rocchetti da galvanometro aventi ciascuno circa 100 ohm. di resistenza. L'autoinduzione delle altre resistenze, costituite da fili di manganina avvolti intorno a lastre di mica, era trascurabile rispetto a quella dei rocchetti.

Nel caso delle scariche per osservare l'equilibrio nel ponte ho adoperato anche un elettrometro balistico a quadranti, messo nelle condizioni per far le misure col metodo di Mascart. In questa esperienza uno dei due nodi, fra i quali prima era inserito il galvanometro, era unito al suolo e l'altro all'ago dell'elettrometro. Adoperando questo strumento per l'azzeramento, ho potuto caricare il condensatore fino a circa 30000 volta senza mai osservare alcuna deviazione.

In queste esperienze i valori delle resistenze erano tali da non avere correnti oscillanti nei circuiti. Ritorrò su di esse, quando tratterò dei metodi di misura delle resistenze elettrolitiche per mezzo delle scariche.