Ueber die Grundlagen der Geometrie.

Von

DAVID HILBERT in Göttingen.

Die Untersuchungen von Riemann und Helmholtz über die Grundlagen der Geometrie veranlassten Lie das Problem der axiomatischen Behandlung der Geometrie unter Voranstellung des Gruppenbegriffes in Angriff zu nehmen und führten diesen scharfsinnigen Mathematiker zu einem System von Axiomen, von denen er mittelst seiner Theorie der Transformationsgruppen nachwies, dass sie zum Aufbau der Geometrie hinreichend sind*).

Nun hat Lie bei Begründung seiner Theorie der Transformationsgruppen stets die Annahme gemacht, dass die die Gruppe definirenden Functionen differenzirt werden können, und daher bleibt in den Lie'schen Entwicklungen unerörtert, ob die Annahme der Differenzirbarkeit bei der Frage nach den Axiomen der Geometrie thatsächlich unvermeidlich ist oder ob die Differenzirbarkeit der betreffenden Functionen nicht vielmehr als eine Folge des Gruppenbegriffs und der übrigen geometrischen Axiome erscheint. Auch ist Lie zufolge seines Verfahrens genöthigt, ausdrücklich das Axiom aufzustellen, dass die Gruppe der Bewegungen von infinitesimalen Transformationen erzeugt sei. Diese Forderungen, sowie wesentliche Bestandtheile der übrigen von Lie zu Grunde gelegten Axiome bezüglich der Natur der die Punkte in gleicher Entfernung definirenden Gleichung lassen sich rein geometrisch nur auf recht gezwungene und complicirte Weise zum Ausdruck bringen und scheinen überdies nur durch die von Lie benutzte analytische Methode, nicht durch das Problem selbst bedingt.

Ich habe daher im Folgenden für die ebene Geometrie ein System von Axiomen aufzustellen gesucht, welches, ebenfalls auf dem Begriff der Gruppe beruhend, nur einfache und geometrisch übersichtliche Forderungen enthält und insbesondere die Differenzirbarkeit der die Bewegung vermittelnden Functionen keineswegs voraussetzt. Die Axiome des von mir

*) Lie-Engel, Theorie der Transformationsgruppen Bd. 3 Abtheilung 5.

aufgestellten Systems sind als specielle Bestandtheile in den Lie'schen Axiomen enthalten oder, wie ich glaube, aus ihnen sofort ableitbar.

Meine Beweisführung ist völlig von der Methode Lie's verschieden: ich operire vornehmlich mit den von Cantor ausgebildeten Begriffen der Theorie der Punktmengen und benutze den Satz von C. Jordan, wonach jede ebene stetige geschlossene Curve ohne Doppelpunkte die Ebene in ein inneres und ein äusseres Gebiet theilt.

Gewiss sind auch in dem von mir aufgestellten System noch einzelne Bestandtheile entbehrlich; doch habe ich von einer weiteren Untersuchung dieses Umstandes abgesehen aus Rücksicht auf die einfache Fassung der Axiome und vor Allem, weil ich eine verhältnissmässig zu complicirte und geometrisch nicht übersichtliche Beweisführung vermeiden wollte.

Ich behandle im Folgenden die Axiome nur für die Ebene, obwohl ich meine, dass ein analoges Axiomensystem für den Raum aufgestellt werden kann, das den Aufbau der räumlichen Geometrie in analoger Weise ermöglicht*).

Wir schicken eine Erklärung voran.

Erklärung. Wir verstehen unter der *Zahlenebene* die gewöhnliche Ebene mit einem rechtwinkligen Coordinatensystem x, y .

Eine doppelpunktslose und einschliesslich ihrer Endpunkte stetige Curve in dieser Zahlenebene heisse eine *Jordan'sche Curve*. Ist eine Jordan'sche Curve geschlossen, so heisse das Innere des von derselben begrenzten Gebietes der Zahlenebene ein *Jordan'sches Gebiet*.

Der leichteren Darstellung und Fasslichkeit wegen will ich in der vorliegenden Untersuchung die Definition der Ebene enger fassen, als es meine Beweisführung erfordert**), ich will nämlich annehmen, dass es möglich ist, die sämtlichen Punkte unserer Geometrie zugleich auf die

*) Durch die nachfolgende Untersuchung wird zugleich, wie ich glaube, eine allgemeine die Gruppentheorie betreffende Frage, die ich in meinem Vortrag „Mathematische Probleme“, Göttinger Nachrichten 1900, S. 17 aufgeworfen habe, für den speciellen Fall der Gruppe der Bewegungen in der Ebene beantwortet.

**) Betreffs der weiteren Fassung des Begriffes der Ebene vergleiche man meine Note über die Grundlagen der Geometrie in den Göttinger Nachrichten 1902. Die daselbst S. 234—235 aufgestellten Forderungen enthalten, wie mir scheint, für den Fall zweier Dimensionen die scharfe Definition des Begriffes, den Riemann und Helmholtz als „mehrfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit“ und Lie als „Zahlenmannigfaltigkeit“ bezeichneten und ihren gesammten Untersuchungen zu Grunde legten.

Indem wir die obige engere Definition der Ebene annehmen, wird offenbar die elliptische Geometrie von vornherein ausgeschlossen, da sich deren Punkte nicht in einer mit unseren Axiomen verträglichen Weise auf die im Endlichen gelegenen Punkte der Zahlenebene abbilden lassen. Es ist jedoch nicht schwer die Abänderungen zu erkennen, die in unserer Beweisführung nöthig sind, wenn man die weitere Fassung des Begriffes der Ebene zu Grunde legt.

im Endlichen gelegenen Punkte der Zahlenebene oder auf ein bestimmtes Theilsystem derselben umkehrbar eindeutig abzubilden, so dass dann jeder Punkt unserer Geometrie durch ein bestimmtes Zahlenpaar x, y charakterisirt ist. Wir formuliren diese Fassung des Begriffes der Ebene, wie folgt:

Definition der Ebene. Die Ebene ist ein System von Punkten, die sich umkehrbar eindeutig auf die im Endlichen gelegenen Punkte der Zahlenebene oder auf ein gewisses Theilsystem derselben abbilden lassen.

Zu jedem Punkte A unserer Ebene giebt es Jordan'sche Gebiete, in welchen der Bildpunkt von A liegt und deren sämtliche Punkte ebenfalls Punkte unserer Ebene darstellen. Diese Jordan'schen Gebiete heissen Umgebungen des Punktes A . Jedes in einer Umgebung von A enthaltene Jordan'sche Gebiet, welches den Punkt A einschliesst, ist wiederum eine Umgebung von A . Ist B irgend ein Punkt in einer Umgebung von A , so ist diese Umgebung auch zugleich eine Umgebung von B .

Wenn A und B irgend zwei Punkte unserer Ebene sind, so giebt es stets eine Umgebung, die zugleich eine Umgebung von A und eine Umgebung von B ist.

Wir werden die Bewegung als eine umkehrbar eindeutige Transformation unserer Ebene in sich definiren. Offenbar lassen sich von vornherein zwei Arten von umkehrbar eindeutigen stetigen Transformationen der Zahlenebene in sich unterscheiden. Nehmen wir nämlich irgend eine geschlossene Jordan'sche Curve in der Zahlenebene an und denken uns dieselbe in einem bestimmten Sinn durchlaufen, so geht dieselbe bei einer solchen Transformation wiederum in eine geschlossene Jordan'sche Curve über, die in einem gewissen Sinne umlaufen wird. Wir wollen nun in der gegenwärtigen Untersuchung annehmen, dass dieser Umlaufssinn derselbe ist, wie für die ursprüngliche Jordan'sche Curve, wenn wir eine Transformation der Zahlenebene in sich anwenden, aus der eine Bewegung hervorgeht. Diese Annahme*) bedingt folgende Fassung des Begriffes der Bewegung:

Definition der Bewegung. Eine Bewegung ist eine umkehrbar eindeutige stetige Transformation der Bildpunkte der Zahlenebene in sich von der Art, dass dabei der Umlaufssinn einer geschlossenen Jordan'schen Curve stets derselbe bleibt.

Eine Bewegung, bei welcher der Punkt M ungeändert bleibt, heisst eine Drehung um den Punkt M .

*) Bei Lie ist diese Annahme in der Forderung enthalten, dass die Gruppe der Bewegungen durch infinitesimale Transformationen erzeugt sei. Die entgegengesetzte Annahme würde wesentlich die Beweisführung erleichtern, insofern alsdann die „wahre Gerade“ unmittelbar als der Ort derjenigen Punkte definirt werden kann, welche bei einer den Umlaufssinn ändernden Transformation (Umklappung) fest bleiben.

Nach Festlegung des Begriffes „Ebene“ und „Bewegung“ stellen wir folgende drei Axiome auf:

Axiom I. Werden zwei Bewegungen hintereinander ausgeführt, so ist die dann entstehende Transformation unserer Ebene in sich wiederum eine Bewegung.

Wir sagen kurz:

Axiom I. Die Bewegungen bilden eine Gruppe.

Axiom II. Wenn A und M beliebige von einander verschiedene Punkte der Ebene sind, so kann man den Punkt A durch Drehung um M stets in unendlich viele verschiedene Lagen bringen.

Nennen wir die Gesamtheit derjenigen Punkte, die durch die sämtlichen Drehungen um M aus einem von M verschiedenen Punkte entstehen, einen *wahren Kreis* in unserer ebenen Geometrie, so können wir die Aussage des Axioms II auch so fassen:

Axiom II. Jeder wahre Kreis besteht aus unendlich vielen Punkten.

Dem letzten Axiom schicken wir eine Erklärung voran.

Erklärung. Es sei A ein bestimmter Punkt in unserer Geometrie und $A_1, A_2, A_3, \dots$ irgend ein unendliches System von Punkten; mit den nämlichen Buchstaben mögen auch die Bilder dieser Punkte in der Zahlenebene bezeichnet werden. Wir grenzen um den Punkt A in der Zahlenebene eine beliebig kleine Umgebung α ab; wenn dann jedesmal irgend welche Bildpunkte A_i in die Umgebung α fallen, so sagen wir, dass es in beliebiger Nähe des Punktes A Punkte A_i gäbe.

Es sei AB ein bestimmtes Punktepaaar in unserer Geometrie und $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, \dots$ irgend ein unendliches System von Punktepaaaren; mit den nämlichen Buchstaben mögen auch die Bilder dieser Punktepaaare in der Zahlenebene bezeichnet werden. Wir grenzen um die Punkte A und B in der Zahlenebene je eine beliebig kleine Umgebung α bez. β ab; wenn es dann jedesmal Punktepaaare A_iB_i giebt, so dass A_i in die Umgebung α und zugleich B_i in die Umgebung β fällt, so sagen wir, dass es in beliebiger Nähe des Punktepaaars AB Punktepaaare A_iB_i gäbe.

Es sei ABC ein bestimmtes Punktetripel in unserer Geometrie und $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3, \dots$ irgend ein unendliches System von Punktetripeln; mit den nämlichen Buchstaben mögen auch die Bilder dieser Punktetripel in der Zahlenebene bezeichnet werden. Wir grenzen um die Punkte A, B, C in der Zahlenebene je eine beliebig kleine Umgebung α bez. β bez. γ ab; wenn es dann jedesmal Punktetripel $A_iB_iC_i$ giebt, so dass A_i in die Umgebung α und zugleich B_i in die Umgebung β

und C_i in die Umgebung γ fällt, so sagen wir, dass es in beliebiger Nähe des Punktetripels ABC Punktetripel $A_i B_i C_i$ gäbe.

Beim Gebrauch der Worte „Punktepaar“ und „Punktetripel“ wird nicht angenommen, dass die Punkte des Punktepaares oder des Punktetripels von einander verschieden sind.

Axiom III. Wenn es Bewegungen giebt, durch welche Punktetripel in beliebiger Nähe des Punktetripels ABC in beliebige Nähe des Punktetripels $A'B'C'$ übergeführt werden können, so giebt es stets auch eine solche Bewegung, durch welche das Punktetripel ABC genau in das Punktetripel $A'B'C'$ übergeht).*

Die Aussage dieses Axioms wollen wir kurz so ausdrücken:

Axiom III. Die Bewegungen bilden im Endlichen ein abgeschlossenes System.

Wenn wir in Axiom III gewisse Punkte der Punktetripel zusammenfallen lassen, so ergeben sich leicht einige specielle Fälle des Axioms III, die wir noch besonders hervorheben, wie folgt:

Wenn es Drehungen um einen Punkt M giebt, durch welche Punktepaare in beliebiger Nähe des Punktepaares AB in beliebige Nähe des Punktepaares $A'B'$ übergeführt werden können, so giebt es stets auch eine solche Drehung um M , durch welche das Punktepaar AB genau in das Punktepaar $A'B'$ übergeht.

Wenn es Bewegungen giebt, durch welche Punktepaare in beliebiger Nähe des Punktepaares AB in beliebige Nähe des Punktepaares $A'B'$ übergeführt werden können, so giebt es stets auch eine solche Bewegung, durch welche das Punktepaar AB genau in das Punktepaar $A'B'$ übergeht.

Wenn es Drehungen um den Punkt M giebt, durch welche Punkte in beliebiger Nähe des Punktes A in beliebige Nähe von A' übergeführt werden können, so giebt es stets auch eine solche Drehung um M , durch welche A genau in A' übergeht.

Diesen letzten Specialfall des Axioms III werde ich bei der nachfolgenden Beweisführung oftmals in der Weise anwenden, dass für A der Punkt M eintritt**).

Ich beweise nun folgende Behauptung:

Eine ebene Geometrie, in welcher die Axiome I–III erfüllt

*) Es genügt Axiom III für genügend kleine Umgebungen als erfüllt anzunehmen, wie es ähnlich auch bei Lie geschieht; meine Beweisführung lässt sich so abändern, dass nur diese engere Annahme darin benutzt wird.

**) Eine Folgerung, die ich im mündlichen Vortrage in der Festsitzung zur Jubelfeier der Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1901 als besonderes Axiom aufgeführt habe, ist diese: „Irgend zwei Punkte können durch Bewegung niemals in beliebige Nähe zu einander gerathen“. Es wäre zu untersuchen, mit welchen Forderungen zusammen diese Forderung das oben aufgestellte Axiom III zu ersetzen im Stande ist.

sind, ist entweder die Euklidische oder die Bolyai-Lobatschefsky'sche Ebene Geometrie.

Wollen wir allein die Euklidische Geometrie erhalten, so haben wir nur nöthig, bei Axiom I den Zusatz zu machen, dass die Gruppe der Bewegungen eine invariante Untergruppe besitzen soll. Dieser Zusatz vertritt die Stelle des Parallelenaxioms.

Den Gedankengang meiner Beweisführung möchte ich kurz wie folgt skizziren:

In der Umgebung irgend eines Punktes M wird durch ein besonderes Verfahren ein gewisses Punktgebilde kk und auf diesem ein gewisser Punkt K construirt (§ 1—§ 2) und dann der wahre Kreis κ durch K um M der Untersuchung unterworfen. Es ergibt sich, dass der wahre Kreis κ eine abgeschlossene und in sich dichte, d. h. eine perfecte Punktmenge ist (§ 3).

Das nächste Ziel unserer Entwicklungen besteht darin, zu zeigen, dass der wahre Kreis κ eine geschlossene Jordan'sche Curve ist*). Dies gelingt, indem wir zunächst die Möglichkeit einer Anordnung der Punkte des wahren Kreises κ erkennen (§ 4—§ 5), hieraus eine umkehrbar eindeutige Abbildung der Punkte von κ auf die Punkte eines gewöhnlichen Kreises schliessen (§ 6—§ 7) und endlich beweisen, dass diese Abbildung nothwendig eine stetige sein muss (§ 8). Nunmehr ergibt sich auch, dass das ursprünglich construirte Punktgebilde kk mit dem wahren Kreise κ identisch ist (§ 9). Weiter gilt der Satz, dass jeder wahre Kreis innerhalb κ ebenfalls eine geschlossene Jordan'sche Curve ist (§ 10—12).

Wir wenden uns nun zur Untersuchung der Gruppe der Transformationen, die bei den Drehungen der Ebene um M ein bestimmter wahrer Kreis κ in sich erfährt (§ 13). Diese Gruppe besitzt folgende Eigenschaften: 1) Jede Drehung um M , die einen Punkt von κ festlässt, lässt alle Punkte desselben fest (§ 14). 2) Es giebt stets eine Drehung um M , die irgend einen gegebenen Punkt von κ in irgend einen anderen Punkt von κ überführt (§ 15). 3) Die Gruppe der Drehungen um M ist eine stetige (§ 16). Diese drei Eigenschaften bestimmen vollständig den Bau der Gruppe der Transformationen aller Drehungen des wahren Kreises in sich. Wir stellen nämlich den folgenden Satz auf: Die Gruppe aller Transformationen des wahren Kreises in sich, die Drehungen um M sind, ist holodrisch isomorph mit der Gruppe der gewöhnlichen Drehungen des gewöhnlichen Kreises in sich (§ 17—§ 18).

*) Vgl. hierzu die ein ähnliches Ziel verfolgende interessante Note von A. Schönflies: „Ueber einen grundlegenden Satz der Analysis Situs“ Göttinger Nachrichten. 1902.

Nunmehr untersuchen wir die Gruppe der Bewegungen *aller* Punkte unserer Ebene bei Drehungen um M . Es gilt der Satz, dass es ausser der Identität keine Drehung der Ebene um M giebt, welche jeden Punkt des wahren Kreises κ festlässt (§ 19). Wir erkennen jetzt, dass *jeder* wahre Kreis eine geschlossene Jordan'sche Curve ist, und gewinnen Formeln für die Transformationen jener Gruppe aller Drehungen um M (§ 20—§ 21). Endlich folgen leicht die Sätze: Wenn irgend zwei Punkte bei einer Bewegung der Ebene festbleiben, so bleiben alle Punkte fest, d. h. die Bewegung ist die Identität. Jeder Punkt der Ebene lässt sich durch eine geeignete Bewegung in jeden anderen Punkt der Ebene überführen (§ 22).

Unser wichtigstes weiteres Ziel besteht darin, den Begriff der wahren Geraden in unserer Geometrie zu definiren und die für den Aufbau der Geometrie nothwendigen Eigenschaften dieses Begriffes zu entwickeln. Zunächst werden die Begriffe Halbdrehung und Mitte einer Strecke definirt (§ 23). Eine Strecke hat höchstens eine Mitte (§ 24) und wenn man von einer Strecke ihre Mitte kennt, so folgt, dass auch jede kleinere Strecke eine Mitte besitzt (§ 25—26).

Um die Lage der Streckenmitten zu beurtheilen, haben wir einige Sätze über sich berührende wahre Kreise nöthig, und zwar kommt es vor Allem darauf an, zwei zu einander congruente Kreise zu construiren, die sich einander von aussen in einem und nur in einem Punkte berühren (§ 27). Wir leiten ferner einen allgemeinen Satz über Kreise, die sich von Innen berühren, ab (§ 28) und sodann einen Satz über den besonderen Fall, dass der von Innen berührende Kreis durch den Mittelpunkt des berührten Kreises geht (§ 29).

Nunmehr wird eine bestimmte genügend kleine Strecke als Einheitsstrecke zu Grunde gelegt und aus dieser durch fortgesetzte Halbierung und Halbdrehung ein System von Punkten von der Art construirt, dass jedem Punkte dieses Systems eine bestimmte Zahl a zugeordnet erscheint, die rational ist und nur eine Potenz von 2 als Nenner hat (§ 30). Nach Aufstellung eines Gesetzes über diese Zuordnung (§ 31) werden die Punkte des gewonnenen Punktsystems untereinander angeordnet, wobei die früheren Sätze über sich berührende Kreise zur Geltung kommen (§ 32). Jetzt gelingt der Nachweis, dass die den Zahlen $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ entsprechenden Punkte gegen den Punkt 0 convergiren (§ 33). Dieser Satz wird schrittweise verallgemeinert, bis wir schliesslich erkennen, dass eine jede Punktreihe unseres Systems convergirt, sobald die entsprechende Zahlenreihe convergirt (§ 34—35).

Nach diesen Vorbereitungen gelingt die Definition der wahren Geraden als eines Systems von Punkten, die aus zwei zu Grunde gelegten Punkten entstehen, wenn man fortgesetzt Halbdrehungen ausführt, die

Mitten nimmt und die Häufungsstellen aller erhaltenen Punkte hinzufügt (§ 36). Sodann können wir beweisen, dass die wahre Gerade eine stetige Curve ist (§ 37), keinen Doppelpunkt besitzt (§ 38) und mit irgend einer anderen wahren Geraden höchstens einen Punkt gemein hat (§ 39). Es ergibt sich ferner, dass die wahre Gerade jeden um einen ihrer Punkte gelegten Kreis schneidet, und hieraus folgt, dass man irgend zwei beliebige Punkte der Ebene stets durch eine wahre Gerade verbinden kann (§ 40). Auch erkennen wir in unserer Geometrie die Congruenzsätze als gültig, wobei sich jedoch zwei Dreiecke nur dann als congruent erweisen, wenn für sie auch der Umlaufssinn der gleiche ist (§ 41).

Hinsichtlich der Lage des Systems aller wahren Geraden gegen einander sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem das Parallelenaxiom gültig ist oder durch jeden Punkt zu einer gegebenen Geraden zwei Gerade existiren, die die schneidenden Geraden von den nicht schneidenden Geraden abgrenzen. Im ersteren Falle gelangen wir zur Euklidischen, im letzteren zur Bolyai-Lobatschewsky'schen Geometrie (§ 42).

§ 1.

Es sei M irgend ein Punkt in unserer Geometrie und zugleich der Bildpunkt in der Zahlenebene x, y . Unser nächstes Ziel ist dann, um M gewisse Punktgebilde zu construiren, die sich schliesslich als die wahren Kreise um M herausstellen werden.

Wir schlagen in der Zahlenebene um M einen „Zahlenkreis“ d. h. einen Kreis $\mathfrak{K}$ im Sinne der gewöhnlichen Maassbestimmung, so klein dass sämtliche Punkte innerhalb und auf diesem Kreise $\mathfrak{K}$ ebenfalls Bildpunkte sind. Dann giebt es gewiss einen zu $\mathfrak{K}$ concentrischen Kreis $\mathfrak{k}$ innerhalb $\mathfrak{K}$ von der Art, dass sämtliche Punkte innerhalb dieses Kreises $\mathfrak{k}$ bei beliebigen Drehungen um M innerhalb des Kreises $\mathfrak{K}$ bleiben.

Um dies zu beweisen, betrachten wir in der Zahlenebene eine unendliche Reihe von concentrischen Zahlenkreisen $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \mathfrak{k}_3, \dots$ mit abnehmenden und gegen 0 convergirenden Radien und nehmen dann im Gegensatz zur Behauptung in jedem dieser Kreise einen Punkt von der Art an, dass derselbe bei einer gewissen Drehung um M an eine ausserhalb des Kreises $\mathfrak{K}$ gelegene Stelle kommt oder auf die Peripherie des Kreises $\mathfrak{K}$ rückt: es sei A_i ein solcher im Kreise $\mathfrak{k}_i$ gelegener Punkt, der bei der Drehung Δ_i in eine ausserhalb des Kreises $\mathfrak{K}$ oder auf demselben gelegene Stelle übergeht. Wir denken uns dann von M nach jedem Punkte A_i den Radius r_i des betreffenden Kreises $\mathfrak{k}_i$ gezogen und fassen die Curve γ_i ins Auge, in welche der Radius r_i bei der Drehung Δ_i übergeht. Da diese Curve γ_i vom Punkte M nach einer gewissen Stelle ausserhalb oder auf dem

Kreise $\mathfrak{R}$ läuft, so muss sie nothwendig die Peripherie des Kreises $\mathfrak{R}$ treffen; es sei B_i einer dieser Treffpunkte und B eine Verdichtungsstelle der Treffpunkte $B_1, B_2, B_3, \dots$. Nun sei allgemein C_i derjenige Punkt auf dem Radius r_i , der bei der Drehung Δ_i in B_i übergeht. Da die Punkte $C_1, C_2, C_3, \dots$ gegen M convergiren, so giebt es nach Axiom III eine Drehung um M , bei welcher der auf der Peripherie des Kreises $\mathfrak{R}$ gelegene Punkt B in den Punkt M übergeht. Dies widerspricht dem vorhin definierten Begriff der Bewegung.

§ 2.

Wie bereits in § 1 festgesetzt, sei $\mathfrak{f}$ ein Zahlenkreis innerhalb $\mathfrak{R}$, der die Bedingungen des in § 1 bewiesenen Satzes erfüllt, so dass sämtliche Punkte innerhalb $\mathfrak{f}$ bei den Drehungen um M innerhalb $\mathfrak{R}$ bleiben; ferner sei k ein Zahlenkreis innerhalb $\mathfrak{f}$, dessen sämtliche Punkte bei den Drehungen um M innerhalb $\mathfrak{f}$ bleiben. Dann bezeichnen wir kurz diejenigen Punkte der Zahlenebene, die bei irgend einer Drehung um M aus Punkten innerhalb oder auf k entstehen, als *bedeckt* und diejenigen Punkte, die bei keiner Drehung um M aus Punkten innerhalb oder auf k entstehen, als *unbedeckt*. Aus Axiom III folgt sofort, dass die bedeckten Punkte eine abgeschlossene Punktmenge bilden. Ferner sei A ein bestimmter Punkt ausserhalb $\mathfrak{R}$, welcher Bildpunkt für einen Punkt unserer Geometrie ist. Wenn sich nun ein unbedeckter Punkt A' durch eine Jordan'sche Curve, die aus lauter unbedeckten Punkten besteht, mit A verbinden lässt, so heisse A' *ausserhalb kk* gelegen. Insbesondere sind alle Punkte ausserhalb des Zahlenkreises $\mathfrak{f}$ gewiss ausserhalb kk gelegene Punkte. Jeder bedeckte Punkt, in dessen beliebiger Nähe sich Punkte ausserhalb kk befinden, heisse ein Punkt *auf kk* . Die Punkte auf kk bilden eine abgeschlossene Punktmenge. Diejenigen Punkte J , die weder Punkte ausserhalb kk noch Punkte auf kk sind, sollen Punkte *innerhalb kk* heissen. Insbesondere sind also alle bedeckten Punkte, zu welchen nicht in beliebiger Nähe unbedeckte Punkte liegen, wie z. B. der Punkt M und die Punkte innerhalb k , sicher innerhalb kk gelegen.

§ 3.

Mit wesentlicher Hilfe unserer Definition der Bewegung, der zufolge die Drehung eine umkehrbare stetige Transformation ist, und indem wir bedenken, dass deshalb A bei den Drehungen um M niemals in das Innere von $\mathfrak{f}$ hineingelangt, erkennen wir, dass bei einer jeden Drehung um M die Punkte ausserhalb kk wieder in Punkte ausserhalb kk , ferner die Punkte auf kk wieder in Punkte auf kk und die Punkte innerhalb kk wiederum in Punkte innerhalb kk übergehen.

Jeder Punkt auf kk ist nach unserer Festsetzung ein bedeckter Punkt, und da wir wissen, dass die Punkte innerhalb k auch innerhalb kk liegen, so schliessen wir hieraus folgende Thatsache:

Zu jedem Punkte K auf kk giebt es gewiss eine Drehung Δ um M , durch welche ein auf der Peripherie von k gelegener Punkt K' nach K

Fig. 1.

gelangt. Der Radius MK' des Zahlenkreises k liefert nach der Drehung Δ um M eine Jordan'sche Curve, welche M mit dem Punkte K auf kk verbindet und die sonst ganz innerhalb kk verläuft.

Zugleich sehen wir, dass mindestens ein Punkt der Peripherie des Zahlenkreises k , nämlich gewiss der Punkt K' , auf kk liegt.

Wir verbinden den ausserhalb kk gelegenen Punkt A durch irgend eine Jordan'sche Curve mit M und bezeichnen jetzt mit K denjenigen Punkt dieser Jordan'schen Curve, der auf kk liegt und von der Art ist, dass alle auf der Jordan'schen Curve zwischen K und A gelegenen Punkte ausserhalb kk liegen. Sodann fassen wir das System aller aus K durch Drehungen um M hervorgehenden Punkte, d. h. den wahren Kreis κ um M durch K ins Auge. Die Punkte dieses wahren Kreises sind sämtlich Punkte auf kk .

Nach Axiom II enthält κ unendlich viele Punkte. Ist K^* eine Verdichtungsstelle von Punkten des wahren Kreises κ , so gehört diese wegen Axiom III ebenfalls zum wahren Kreise κ . Bezeichnet K_1 irgend einen Punkt des wahren Kreises κ , so folgt, wenn wir diejenige Drehung um M

ausführen, welche K^* in K_1 überführt, dass auch K_1 eine Verdichtungsstelle von Punkten des wahren Kreises κ ist. Wir erhalten somit den Satz:

Der wahre Kreis κ ist eine abgeschlossene und in sich dichte d. h. eine perfecte Punktmenge.

§ 4.

Das wichtigste Ziel der nächstfolgenden Entwicklungen besteht darin, zu zeigen, dass der wahre Kreis κ eine geschlossene Jordan'sche Curve ist. Es wird sich ferner herausstellen, dass der wahre Kreis κ mit den Punkten auf kk übereinstimmt.

Zunächst beweisen wir, dass irgend zwei Punkte K_1, K_2 des wahren Kreises κ sich stets untereinander sowohl durch eine Jordan'sche Curve verbinden lassen, die abgesehen von den Endpunkten ganz innerhalb kk verläuft, als durch eine solche Jordan'sche Curve, die abgesehen von den Endpunkten ganz ausserhalb kk verläuft.

In der That, ziehn wir entsprechend den obigen Ausführungen die Jordan'schen Curven MK_1 und MK_2 , welche innerhalb kk den Mittelpunkt M mit K_1 bezüglich K_2 verbinden, und bestimmen auf der Curve MK_1 von M ausgehend den letzten auf MK_2 gelegenen Punkt P , so bildet das Stück PK_1 der ersteren Jordan'schen Curve zusammen mit dem Stück PK_2 der letzteren Jordan'schen Curve eine Verbindungscurve von der zuerst verlangten Art.

Andererseits fassen wir die Drehungen um M ins Auge, bei denen K in K_1 bezüglich in K_2 übergeht; die Punkte A_1 bez. A_2 , die dabei aus A entstehen, sind nach § 3 Punkte ausserhalb kk und lassen sich daher ausserhalb kk mit A verbinden. Aus diesen Verbindungscurven und denjenigen Jordan'schen Curven, die bei jenen Drehungen aus der in § 3 construirten Jordan'schen Curve AK entstehen, können wir leicht eine Jordan'sche Curve zwischen K_1 und K_2 zusammensetzen, die ganz ausserhalb kk verläuft.

§ 5.

Der eben gefundene Satz setzt uns in den Stand, die Punkte des wahren Kreises in bestimmter Weise anzuordnen.

Es seien K_1, K_2, K_3, K_4 irgend vier verschiedene Punkte des wahren Kreises κ . Wir verbinden die Punkte $K_1 K_2$ einerseits durch eine Jordan'sche Curve, die ganz innerhalb kk verläuft, und andererseits durch eine solche, die ganz ausserhalb kk verläuft. Da diese beiden Verbindungscurven einschliesslich ihrer Endpunkte K_1, K_2 stetig sind, so bilden sie zusammen eine geschlossene Jordan'sche Curve. Eine in dieser Weise aus K_1, K_2 hergestellte Curve wollen wir stets mit $\overline{K_1 K_2}$ bezeichnen. Die ganze Zahlenebene zerfällt dann, abgesehen von $\overline{K_1 K_2}$ selbst, nach dem bekannten Jordan'schen Satze in zwei Gebiete, nämlich das Innere und das Aeussere dieser

Curve $\overline{K_1 K_2}$. Betreffs der Lage der Punkte K_3, K_4 sind nun zwei Fälle möglich: erstens die Punkte K_3, K_4 werden durch die Curve $\overline{K_1 K_2}$ nicht getrennt, d. h. sie liegen beide innerhalb oder beide ausserhalb derselben; zweitens die Punkte K_3, K_4 werden durch die Curve $\overline{K_1 K_2}$ getrennt, d. h. es liegt K_3 innerhalb und K_4 ausserhalb der Curve $\overline{K_1 K_2}$ oder umgekehrt.

Verbinden wir die Punkte K_1, K_2 irgend wie anders durch einen innerhalb kk und einen ausserhalb kk verlaufenden Weg, so erkennen wir leicht, dass hinsichtlich der Lage der Punkte K_3, K_4 zu der neu entstehenden geschlossenen Jordan'schen Curve $\overline{K_1 K_2}$ gewiss derselbe Fall eintritt, wie vorhin. In der That, liegt beispielsweise der erste Fall vor, und befinden sich K_3, K_4 beide im Innern von $\overline{K_1 K_2}$, so verbinde man K_3 und K_4 durch einen innerhalb kk verlaufenden Weg W . Sollte derselbe aus dem Inneren der geschlossenen Curve $\overline{K_1 K_2}$ heraustreten, so müsste er im weiteren Verlauf doch schliesslich wieder in dieses Innere zurückführen; es ist daher gewiss möglich den ausserhalb $\overline{K_1 K_2}$ verlaufenden Theil dieses Weges W durch ein nahe an dem betreffenden Stücke von $\overline{K_1 K_2}$ verlaufenden Weg zu ersetzen, welcher ganz innerhalb kk und zugleich innerhalb $\overline{K_1 K_2}$ verläuft, so dass dadurch ein Verbindungsweg W^* zwischen K_3 und K_4 entsteht, welcher ebenfalls ganz innerhalb kk und innerhalb $\overline{K_1 K_2}$ verläuft. Setzen wir aus dem innerhalb kk liegenden Theil der Curve $\overline{K_1 K_2}$ und dem ausserhalb kk liegenden Theil der Curve $\overline{K_1 K_2}$ eine neue geschlossene Jordan'sche Curve $\overline{\overline{K_1 K_2}}$ zusammen, so ist W^* offenbar ein Weg, welcher K_3 und K_4 innerhalb dieser neuen Curve verbindet, ohne die Curve $\overline{\overline{K_1 K_2}}$ zu durchsetzen, d. h. K_3 und K_4 werden durch $\overline{\overline{K_1 K_2}}$ gewiss nicht getrennt. Hieraus folgt nach entsprechender Construction ausserhalb kk , dass K_3 und K_4 auch durch die Curve $\overline{K_1 K_2}$ nicht getrennt werden. Wir dürfen daher im ersten Falle schlechthin sagen: das Punktpaar K_3, K_4 wird durch das Punktpaar K_1, K_2 nicht getrennt. Dann aber folgt auch im zweiten Falle, dass wir schlechthin sagen dürfen: das Punktpaar K_3, K_4 wird durch das Punktpaar K_1, K_2 getrennt.

Wir führen nun irgend eine Drehung um M aus, durch welche die Punkte K_1, K_2, K_3, K_4 in K_1', K_2', K_3', K_4' übergehen. Bedenken wir, dass die Drehung nach der Definition eine stetige und eindeutige umkehrbare Transformation der Zahlenebene ist und die Punkte innerhalb kk in Punkte innerhalb kk , die Punkte ausserhalb kk in Punkte ausserhalb kk überführt, so folgt, dass die Punktpaare K_1', K_2' und K_3', K_4' von einander getrennt oder nicht getrennt liegen, je nachdem die Punktpaare K_1, K_2 und K_3, K_4 sich einander trennen oder nicht, d. h. die gegenseitige Lage der Punkte-

paare K_1, K_2 und K_3, K_4 bleibt bei einer beliebigen Drehung um M unverändert.

Wir leiten in ähnlicher Weise auch die Sätze ab, die den übrigen bekannten Thatsachen hinsichtlich der gegenseitigen Lage der Punktpaare auf der Peripherie eines gewöhnlichen Zahlenkreises entsprechen, nämlich die Sätze:

Wenn K_1, K_2 durch K_3, K_4 getrennt werden, so werden auch K_3, K_4 durch K_1, K_2 getrennt. Wenn K_1, K_4 durch K_2, K_5 und K_2, K_4 durch K_3, K_5 getrennt werden, so wird auch K_1, K_4 durch K_3, K_5 getrennt.

Dadurch sind wir zu dem folgenden Ergebniss gelangt:

Die Punkte des wahren Kreises κ sind cyklisch, d. h. mit Rücksicht auf die gegenseitige Trennung von Punktpaaren wie die Punkte eines gewöhnlichen Zahlenkreises angeordnet. Diese Anordnung ist gegenüber den Drehungen um den Mittelpunkt M des wahren Kreises κ invariant.

§ 6.

Eine weitere wichtige Eigenschaft des wahren Kreises κ sprechen wir wie folgt aus:

Zu irgend einem Punktpaar des wahren Kreises κ giebt es stets ein Punktpaar dieses Kreises κ , welches jenes Punktpaar trennt.

Wir bezeichnen mit K_∞ einen bestimmt gewählten Punkt des wahren Kreises κ und wollen dann von irgend drei anderen Punkten K_1, K_2, K_3 des wahren Kreises κ sagen, es liege K_2 zwischen K_1 und K_3 bez. nicht zwischen K_1 und K_3 , je nachdem das Punktpaar K_1, K_3 durch das Punktpaar K_2, K_∞ getrennt oder nicht getrennt wird.

Wir nehmen im Gegensatz zu der obigen Behauptung an, es seien K und K' zwei Punkte des wahren Kreises κ , die durch kein Punktpaar getrennt werden; dann folgt nach unserer Festsetzung gewiss auch, dass zwischen denselben kein Punkt von κ liegt. Ferner dürfen wir annehmen, es gäbe einen Punkt K_1 von der Art, dass das Punktpaar K_1, K' durch das Punktpaar K, K_∞ getrennt wird; anderenfalls nämlich denken wir uns in der folgenden Entwicklung die Rollen der Punkte K und K' mit einander vertauscht. Sodann wählen wir eine unendliche Reihe R von Punkten des wahren Kreises κ , die gegen den Punkt K convergiren, und verbinden K_1 mit K' sowohl durch eine innerhalb kk verlaufende Curve, wie durch eine ausserhalb kk verlaufende Curve. Durch Zusammensetzung dieser beiden Curven erhalten wir eine geschlossene Jordan'sche Curve $\overline{K_1 K'}$, welche K_∞ von K trennt und daher nothwendig auch von unendlich vielen Punkten der gegen K convergenten Punktreihe R trennen muss. Es sei K_2 einer dieser Punkte der Reihe R . Da K_2 zwischen K_1 und K' liegt und nicht zwischen K und K' liegen darf, so liegt K_2 nothwendig zwischen K_1 und K . Nunmehr verbinden wir analog K_2 mit K' durch

eine geschlossene Jordan'sche Curve $\overline{K_2 K'}$ und gelangen ebenso zu einem Punkte K_3 der Reihe R , der zwischen K_2 und K liegt u. s. f. Auf diese Weise erhalten wir *eine unendliche Reihe von Punkten* $K_1, K_2, K_3, \dots$ *von denen jeder Punkt zwischen dem vorangehenden und* K *gelegen ist, und die gegen den Punkt* K *convergiren.*

Wir führen jetzt eine Drehung um M aus, bei welcher K in einen der Punkte $K_1, K_2, K_3, \dots$, etwa in K_i übergeht; Der Punkt K' gehe bei dieser Drehung in den Punkt K'_i über. Da unserer Annahme zufolge K und K' durch kein Punktepaar getrennt werden, so ist das gleiche mit dem Punktepaar K_i, K'_i der Fall. Infolgedessen muss K'_i entweder mit K_{i-1} oder mit K_{i+1} zusammenfallen oder zwischen K_{i-1} und K_{i+1} liegen; in jedem Falle liegt also K'_i zwischen K_{i-2} und K_{i+2} , so dass auch die unendliche Reihe von Punkten $K_1, K'_3, K_5, K'_7, K_9, K'_{11}, \dots$ gewiss von der Beschaffenheit ist, dass jeder Punkt dieser Reihe zwischen dem vorangehenden Punkte und dem Punkte K gelegen ist.

Wir wollen nun zeigen, dass auch die Punkte $K'_3, K'_7, K'_{11}, \dots$ gegen den Punkt K convergiren müssen. In der That, würden die Punkte $K'_3, K'_7, K'_{11}, \dots$ einen von K verschiedenen Punkt Q zur Verdichtungsstelle haben, so wähle man aus ihnen einen Punkt K'_l aus. Da $K'_{l+4}, K'_{l+8}, K'_{l+12}, \dots$ sämmtlich zwischen K'_l und K liegen, so giebt es eine geschlossene Jordan'sche Curve $\overline{K'_l K}$, die den Punkt K_∞ von den Punkten $K'_{l+4}, K'_{l+8}, K'_{l+12}, \dots$ und daher auch von Q trennt, d. h. Q liegt nothwendig zwischen K'_l und K . Wegen der Anordnung der Punkte K_i zu den Punkten K'_i folgt hieraus, dass Q auch zwischen den sämmtlichen Punkten $K_1, K_5, K_9, \dots$ einerseits und K andererseits liegt. Die geschlossene Jordan'sche Curve $\overline{Q K_\infty}$ müsste mithin sämmtliche Punkte $K_1, K_5, K_9, \dots$ von K trennen; dann könnten aber die Punkte $K_1, K_5, K_9, \dots$ nicht gegen K convergiren, wie es sein sollte.

Nunmehr betrachten wir die gegen K convergirenden Punkte $K_3, K_7, K_{11}, \dots$ und die Punkte $K'_3, K'_7, K'_{11}, \dots$, die nach dem eben Bewiesenen ebenfalls gegen K convergiren. Da mittelst einer Drehung um M der Punkt K in K_i und zugleich K' in K'_i übergeht, so müsste es nach Axiom III auch eine Drehung geben, welche K und zugleich K' in die gemeinsame Convergenzstelle K überführt. Dies ist aber ein Widerspruch gegen die Definition der Drehung. Somit ist durch Widerlegung unserer Annahme der zu Anfang dieses § 6 aufgestellte Satz vollständig bewiesen.

§ 7.

Mit Rücksicht auf die Festsetzungen zu Beginn des § 6 fassen wir den wahren Kreis κ unter Ausschluss des Punktes K_∞ als eine geordnete

Punktmenge im Sinne Cantor's auf: *dann besitzt diese Punktmenge den Ordnungstypus des Linearcontinuuums.*

Zum Beweise hierfür benutzen wir wesentlich die Schlussweisen, die Cantor in seinen „Beiträgen zur Begründung der transfiniten Mengenlehre“*) entwickelt hat. Zunächst bestimmen wir eine abzählbare Menge S von Punkten des wahren Kreises κ , deren Verdichtungsstellen den wahren Kreis κ selbst ausmachen. Eine solche Menge S besitzt nach Cantor den Ordnungstypus des Systems aller rationalen Zahlen in ihrer natürlichen Rangordnung**) d. h. es ist möglich, den Punkten des Systems S derart die rationalen Zahlen zuzuordnen, dass wenn A, B, C irgend drei Punkte in S sind, von denen B zwischen A und C liegt, von den drei zugeordneten rationalen Zahlen bez. a, b, c allemal die Zahl b ihrem Werthe nach zwischen a und c liegt.

Es sei nun K irgend ein Punkt des wahren Kreises κ , welcher nicht dem System S angehört; sind dann A, B Punkte von S , so nennen wir A, B auf verschiedenen Seiten oder auf derselben Seite von K gelegen, je nachdem K zwischen A und B oder nicht zwischen A und B liegt. Uebertragen wir diese Festsetzung von den Punkten des Systems S auf die denselben zugeordneten rationalen Zahlen, so erhalten wir unter Vermittlung des Punktes K einen bestimmten Schnitt im Sinne Dedekind's durch das System der rationalen Zahlen: wir ordnen dem Punkte K die durch diesen Schnitt definirte irrationale Zahl zu.

Es kann nicht zwei verschiedene Punkte K und K' auf κ geben, denen die gleiche irrationale Zahl zugeordnet erscheint. In der That, construiren wir eine geschlossene Jordan'sche Curve $\overline{KK'}$ und sei H irgend ein zwischen K und K' und folglich innerhalb $\overline{KK'}$ gelegener Punkt von κ , so muss es, da H eine Verdichtungsstelle von Punkten des Systems S ist, gewiss auch einen Punkt A in S geben, der innerhalb $\overline{KK'}$ und daher auch zwischen K und K' liegt. Die zu A gehörige rationale Zahl a bedingt daher jedenfalls eine Verschiedenheit der Schnitte, die unter Vermittlung der Punkte K und K' entstanden sind.

Wir wollen endlich zeigen, dass es auch umgekehrt zu jeder irrationalen Zahl α einen Punkt K auf κ giebt, dem diese zugeordnet erscheint. Zu dem Zwecke sei $a_1, a_2, \dots$ eine Reihe zunehmender und $b_1, b_2, b_3, \dots$ eine Reihe abnehmender Zahlen, deren jede gegen α convergirt. Man construire die diesen Zahlen zugehörigen Punkte $A_1, A_2, A_3, \dots$ bez. $B_1, B_2, B_3, \dots$ und bezeichne mit K irgend eine Verdichtungsstelle dieser Punkte $A_1, A_2, A_3, \dots, B_1, B_2, B_3, \dots$. Der Punkt K gehört dann nothwendig

*) Diese Annalen Bd. 46, vgl. insbesondere § 11.

**) Cantor l. c. § 9.

der Zahl α zu. Denn wenn wir allgemein eine geschlossene Jordan'sche Curve $\overline{A_i B_i}$ construiren, so liegen die Punkte $A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots, B_{i+1}, B_{i+2}, B_{i+3}, \dots$ und folglich auch der Verdichtungspunkt K innerhalb $\overline{A_i B_i}$ d. h. zwischen den Punkten A_i, B_i . Der unter Vermittlung von K entstehende Schnitt ist mithin kein anderer als derjenige, der die Zahl α bestimmt.

Betrachten wir nun die Punkte auf der Peripherie eines gewöhnlichen Zahlenkreises mit dem Radius 1 und ordnen einem dieser Punkte das Zeichen $\pm \infty$ und den Punkt K_∞ zu, den übrigen Punkten dagegen in stetiger Folge die sämtlichen reellen Zahlen und diesen wiederum die entsprechenden Punkte des wahren Kreises κ , so gelangen wir zu folgendem Resultat: *Die Punkte des wahren Kreises κ lassen sich unter Erhaltung ihrer Anordnung umkehrbar eindeutig auf die Punkte der Peripherie eines gewöhnlichen Zahlenkreises mit dem Radius 1 abbilden.*

§ 8.

Um das in § 4 bezeichnete Ziel zu erreichen, bleibt nur noch die Stetigkeit der gewonnenen Abbildung d. h. die Lückenlosigkeit des wahren Kreises κ zu zeigen übrig. Zu dem Zwecke denken wir uns die Punkte des wahren Kreises κ durch die Coordinaten x, y der Zahlenebene und andererseits die Punkte des Zahlenkreises, mit dem Radius 1 durch den Bogen t von einem bestimmten Anfangspunkte an bestimmt: dann haben wir zu beweisen, dass x, y stetige Functionen von t sind.

Es seien nun $t_1, t_2, t_3, \dots$ irgend eine Reihe gegen t convergirender entweder sämtlich wachsender oder sämtlich abnehmender Werthe und $K_1, K_2, K_3, \dots$ seien bez. die diesen Parameterwerthen zugeordneten Punkte des wahren Kreises κ , während der Werth t einem Punkte K auf κ entsprechen möge. Es sei ferner Q eine Verdichtungsstelle der Punkte $K_1, K_2, K_3, \dots$. Construiren wir allgemein eine geschlossene Jordan'sche Curve $\overline{K_i K}$, so liegen nothwendig die Punkte $K_{i+1}, K_{i+2}, K_{i+3}, \dots$ und folglich auch deren Verdichtungsstelle Q innerhalb $\overline{K_i K}$ d. h. es liegt auch der Punkt Q zwischen K_i und K ; demnach muss sich auch der zu Q gehörige Werth des Parameters t allgemein zwischen t_i und t befinden. Der letztere Widerspruch löst sich nur, wenn Q und K zusammenfällt; mithin convergiren die Punkte $K_1, K_2, K_3, \dots$ gegen den Punkt K . Damit ist die Stetigkeit der Function x, y vom Parameter t völlig bewiesen und es folgt eine Thatsache, die wir in § 4 als das erste wichtige Ziel unserer Entwicklung hingestellt haben, nämlich der folgende Satz:

Der wahre Kreis κ ist in der Zahlenebene eine geschlossene Jordan'sche Curve.

§ 9.

Wir wissen, dass die Punkte des wahren Kreises κ sämtlich zu den Punkten auf kk gehören; es wird sich auch zeigen, dass diese sämtlich auf κ liegen, so dass der weitergehende Satz gilt:

Der wahre Kreis κ ist identisch mit den Punkten auf kk ; die innerhalb κ liegenden Punkte sind zugleich die Punkte innerhalb kk und die ausserhalb κ liegenden Punkte sind zugleich die Punkte ausserhalb kk .

Um diesen Satz zu erkennen, zeigen wir zunächst, dass der Punkt M , der „Mittelpunkt“ des wahren Kreises κ mit jedem Punkte J innerhalb κ durch eine stetige Curve verbunden werden kann, ohne dass dabei der wahre Kreis κ überschritten wird.

In der That, ziehen wir durch J irgend eine gewöhnliche Gerade in der Zahlenebene, eine sogenannte „Zahlengerade“, so seien K_1 und K_2 die ersten Punkte dieser Zahlengeraden, die auf κ liegen, nach den beiden Richtungen hin von J aus gerechnet. Da K_1 und K_2 auch Punkte auf kk sind, so können sie mit M durch je eine Jordan'sche Curve MK_1 bez. MK_2 verbunden werden, die ganz innerhalb kk verlaufen und daher gewiss nicht den wahren Kreis κ überschreiten. Trifft eine dieser Jordan'schen Curven das Geradenstück K_1K_2 etwa im Punkte B , so bildet das Curvenstück MB mit dem Geradenstück JB zusammen den gesuchten Verbindungsweg. Im entgegengesetzten Falle bilden MK_1 und MK_2 zusammen mit dem Geradenstück K_1K_2 eine geschlossene Jordan'sche Curve γ . Da diese Curve γ ganz innerhalb des Zahlenkreises $\mathfrak{k}$ liegt, so lässt sich der ausserhalb des Zahlenkreises $\mathfrak{K}$ gelegene Punkt A gewiss nicht mit einem Punkte innerhalb γ verbinden, ohne dass dabei ein Punkt der Curve γ überschritten wird. Die Curve γ besteht nun aus Punkten innerhalb kk , aus Punkten auf kk und aus Punkten innerhalb κ . Da die letzteren Punkte von A aus nur durch Ueberschreitung eines Punktes auf κ , der ebenfalls ein Punkt auf kk ist, erreicht werden kann, so liegt das ganze innerhalb γ gelegene Gebiet nothwendig auch innerhalb kk . Verbinden wir also M mit J durch einen stetigen innerhalb γ verlaufenden Weg, so überschreitet dieser Weg den wahren Kreis κ sicher nicht und ist mithin von der gewünschten Art.

Wir schliessen daraus zunächst, dass M innerhalb κ liegt, d. h. *der Mittelpunkt M des wahren Kreises κ liegt innerhalb desselben.*

Da ferner alle Punkte auf kk mit M durch eine Jordan'sche Curve verbunden werden können, die ganz innerhalb kk verläuft und also κ gewiss nicht trifft, so liegen alle Punkte auf kk nothwendig auf κ oder innerhalb κ . Gäbe es einen Punkt P auf kk , der innerhalb κ liegt, so könnte der ausserhalb $\mathfrak{K}$ gelegene Punkt A nicht mit Punkten in beliebiger

Nähe von P verbunden werden, ohne dass dabei ein Punkt von κ überschritten wird; da aber jeder Punkt von κ zu den bedeckten gehört, so könnte P nicht ein Punkt auf kk sein; dies ist ein Widerspruch. Alle Punkte auf kk liegen also zugleich auf κ , womit die obige Behauptung völlig erwiesen ist.

§ 10.

Das Punktgebilde kk ist in § 2 durch eine gewisse Construction aus dem Zahlenkreise k hervorgegangen. Da der Zahlenkreis k , wie in § 3 gezeigt worden ist, mindestens einen Punkt auf kk enthält und ganz auf oder innerhalb kk liegt und die Punkte auf kk nach § 9 nichts anderes als der wahre Kreis κ sind, so haben wir in der obigen Construction zugleich ein Mittel, um aus dem Zahlenkreise k einen wahren Kreis κ zu construiren, welcher eine geschlossene Jordan'sche Curve ist und den Zahlenkreis k umschliesst, diesen von aussen berührend.

Durch eine geringe Abänderung des früheren Verfahrens, nämlich durch eine Vertauschung der Rollen, die den Punkten innerhalb und ausserhalb k zugetheilt worden sind, können wir aus dem Zahlenkreise k noch einen anderen wahren Kreis construiren: wir bezeichnen kurz diejenigen Punkte der Zahlenebene, die bei irgend einer Drehung um M aus Punkten ausserhalb oder auf k entstehen, als *bedeckt*; alle andern Punkte dagegen als *unbedeckt*. Wenn nun ein unbedeckter Punkt sich durch eine Jordan'sche Curve, die aus lauter unbedeckten Punkten besteht, mit M verbinden lässt, so heisse dieser Punkt *innerhalb* kkk . Die Grenzpunkte dieser Punkte innerhalb kkk heissen Punkte *auf* kkk und alle übrigen Punkte heissen *ausserhalb* kkk . Wir zeigen dann ähnlich wie in § 3—§ 9, dass die Punkte auf kkk einen wahren Kreis um M bilden, der eine geschlossene Jordan'sche Curve ist, den Mittelpunkt M umschliesst und innerhalb des Zahlenkreises k verläuft, diesen von innen berührend.

§ 11.

An Stelle des Zahlenkreises k kann man nun eine beliebige geschlossene innerhalb k verlaufende Jordan'sche Curve z wählen, die den Punkt M im Innern enthält: durch Anwendung der nämlichen Construction erhalten wir dann zu dieser Curve z sowohl einen bestimmten sie umschliessenden wahren Kreis um M , der eine geschlossene Jordan'sche Curve ist und z von aussen berührt, als auch einen bestimmten innerhalb z verlaufenden wahren Kreis um M , der eine geschlossene Jordan'sche Curve ist und z von innen berührt.

Wir bemerken noch, dass jeder solche aus einer Jordan'schen Curve z construirte wahre Kreis auch aus einem Zahlenkreise erzeugt werden kann:

man braucht nur denjenigen Zahlenkreis zu wählen, der innerhalb des vorgelegten wahren Kreises ihn von innen berührend verläuft bez. ihn von aussen berührend umschliesst; denn zwei wahre Kreise, die geschlossene Jordan'sche Curven sind und denselben Zahlenkreis sei es umschliessend, sei es ganz innerhalb verlaufend berühren, müssten gewiss einen Punkt gemein haben und wären folglich überhaupt mit einander identisch.

§ 12.

Nunmehr können wir ohne erhebliche Schwierigkeit die wichtige Thatsache beweisen, dass jeder durch irgend einen Punkt P innerhalb κ bestimmte wahre Kreis um M ebenso wie die in § 11 construirten wahren Kreise eine geschlossene Jordan'sche Curve ist, die M im Innern enthält.

Zum Beweise fassen wir einerseits alle wahren Kreise um M ins Auge, die geschlossene Jordan'sche Curven sind und P ausschliessen: sie mögen wahre Kreise *erster* Art heissen; und andererseits alle diejenigen, die geschlossene Jordan'sche Curven sind und P einschliessen: sie mögen wahre Kreise *zweiter* Art heissen.

Wir denken uns zunächst aus jedem Zahlenkreise mit dem Mittelpunkt M den umschliessenden wahren Kreis erzeugt und fassen dann diejenigen Zahlenkreise ins Auge, aus denen wahre Kreise entspringen, die erster Art sind. Sodann suchen wir für diese Zahlenkreise den Grenzkreis g , d. h. den kleinsten Zahlenkreis, der sie sämmtlich enthält. Alle Zahlenkreise, die kleiner als g sind, liefern dann wahre Kreise erster Art. Der aus dem Zahlenkreise g entspringende wahre Kreis γ müsste, wenn er nicht durch P geht, diesen Punkt ebenfalls ausschliessen. Denn läge P innerhalb γ , so ziehe man eine ganz innerhalb γ verlaufende, die Punkte M und P umschliessende geschlossene Jordan'sche Curve und erzeuge aus dieser den wahren Kreis, der sie umschliesst. Dieser wahre Kreis liesse sich, da er ja gewiss in das Innere des Zahlenkreises g hineintritt, durch einen Zahlenkreis erzeugen, der kleiner als g ist; er umschliesst ferner den Punkt P , was nicht möglich ist. Da, wie erwähnt, alle wahren Kreise um M , die geschlossene Jordan'sche Curven sind, auch aus Zahlenkreisen um M entspringen, so ist offenbar der aus g entspringende wahre Kreis ein solcher Kreis erster Art, welcher alle anderen wahren Kreise erster Art umschliesst.

Indem wir andererseits aus jedem Zahlenkreise mit dem Mittelpunkt M denjenigen wahren Kreis erzeugt denken, der jenen Zahlenkreis ausschliesst, beweisen wir auf ähnlichem Wege die Existenz eines wahren Kreises zweiter Art, welcher von allen anderen wahren Kreisen zweiter Art umschlossen wird.

Würden nun die gefundenen wahren Grenzkreise beide nicht durch P gehen, so könnte man eine Jordan'sche Curve in dem zwischen ihnen gelegenen ringförmigen Gebiete ziehen, welche sicher durch unser Verfahren einen wahren Kreis liefern würde, der weder von der ersten noch von der zweiten Art wäre; dies ist ein Widerspruch und damit haben wir die zu Anfang von § 12 aufgestellte Behauptung bewiesen.

§ 13.

Nachdem wir im Vorstehenden die wichtigsten Eigenschaften der wahren Kreise um M gefunden haben, die durch Punkte innerhalb κ laufen, wenden wir uns nun zur *Untersuchung der Gruppe aller Bewegungen, die bei den Drehungen der Ebene um M ein bestimmter wahrer Kreis in sich erfährt.*

Es seien den Entwicklungen in § 8 gemäss die Punkte des wahren Kreises κ auf die Punkte t der Peripherie eines Zahlenkreises mit dem Radius 1 unter Erhaltung ihrer Anordnung abgebildet: dann entspricht einer jeden Drehung Δ unserer Ebene um M eine bestimmte umkehrbar eindeutige stetige Transformation der Punkte t des Einheitskreises in sich, da ja nach § 5 bei einer Drehung die Anordnung der Punkte auf dem wahren Kreise und daher mit Rücksicht auf § 7 auch die Anordnung der Parameterwerthe t ungeändert bleibt. Diese Transformation lässt sich durch eine Formel von der Gestalt

$$t' = \Delta(t)$$

darstellen, wo $\Delta(t)$ eine stetige Function ist, die mit wachsendem t entweder stets wächst oder stets abnimmt und die bei Vermehrung des Arguments t um 2π sich ebenfalls um den Betrag 2π ändert.

Diejenigen Functionen $\Delta(t)$, die bei wachsendem Argument t abnehmen, entsprechen Transformationen, die den Umlaufssinn auf dem wahren Kreise ändern, und da zufolge unserer Fassung des Begriffes der Bewegung bei einer Bewegung der Umlaufssinn stets derselbe bleiben soll, so ergibt sich, dass die Function $\Delta(t)$ bei wachsendem Argument t stets wachsen muss.

§ 14.

Wir fragen zunächst, ob es in dieser Gruppe aller Drehungen um M eine Drehung geben kann, bei welcher ein Punkt A des wahren Kreises κ ungeändert bleibt. Es sei $t = a$ der Parameterwerth für einen solchen Punkt A und dieser bleibe bei der eigentlichen Drehung Δ fest, die durch die Formel

$$t' = \Delta(t)$$

dargestellt wird. Ferner sei B irgend ein Punkt des wahren Kreises mit dem Parameterwerth $t = b$, der bei der Drehung Δ seine Lage verändere; wir machen etwa die Annahme $b < a$, worin keine Einschränkung liegt.

Sowohl $\Delta(t)$ als auch die umgekehrte Function $\Delta^{-1}(t)$ sind von der Art, dass sie bei zunehmendem Argument zunehmen. Wegen $\Delta(a) = a$ schliessen wir hieraus der Reihe nach, dass sämmtliche Grössen, die durch die symbolischen Potenzen

$$\Delta(b), \Delta\Delta(b) = \Delta^2(b), \Delta^3(b), \dots, \Delta^{-1}(b), \Delta^{-2}(b), \Delta^{-3}(b), \dots$$

dargestellt werden, unterhalb a liegen. Nun bilden, falls $\Delta(b) > b$ ausfällt, die Grössen

$$\Delta(b), \Delta^2(b), \Delta^3(b), \dots$$

eine Reihe beständig zunehmender Werthe; im Falle $\Delta(b) < b$ gilt das Gleiche von der Grössenreihe

$$\Delta^{-1}(b), \Delta^{-2}(b), \Delta^{-3}(b), \dots$$

Aus diesen Thatsachen entnehmen wir, dass im ersteren Falle die directen Wiederholungen der Drehung Δ auf b angewandt, im letzteren die symbolischen Potenzen von $\Delta(b)$ mit negativen Exponenten sich einem Grenzwert g nähern müssen, der zwischen a und b liegt oder mit a übereinstimmt. Entspricht der Grenzzahl g etwa der Punkt G auf dem wahren Kreise κ , so bilden die Potenzen von Δ mit positiven bez. negativen Exponenten Bewegungen, so dass durch sie der Punkt B in beliebige Nähe von G übergeht und zugleich durch sie Punkte in beliebiger Nähe von G in beliebiger Nähe von G bleiben. Nach Axiom III müsste es demnach eine Bewegung geben, welche B in G überführt und zugleich G ungeändert lässt; dies widerspräche dem Begriffe der Bewegung. *Es ist demnach die Drehung Δ , welche den Punkt A festlässt, nothwendig eine solche, die alle Punkte des Kreises festlässt, d. h. für diesen Kreis die Identität ist.*

§ 15.

Aus der Definition des wahren Kreises leuchtet unmittelbar die folgende Thatsache ein:

Es giebt stets eine Drehung um M , welche den gegebenen Punkt O des wahren Kreises in einen anderen gegebenen Punkt S desselben überführt.

§ 16.

Wir leiten jetzt eine weitere Eigenschaft für die Gruppe der Bewegungen eines wahren Kreises in sich ab.

Es seien O, S, T, Z vier solche Punkte auf dem wahren Kreise κ , dass diejenige Drehung um M , vermöge welcher O in S übergeht, den Punkt

T nach Z bewegt, so dass die Lage von Z eindeutig durch die Punkte O, S, T mitbestimmt ist. Halten wir O fest und bewegen S und T auf dem wahren Kreise, so erfolgt bei stetiger Aenderung von S und T auch die Aenderung von Z stetig.

Um dies zu beweisen, wählen wir eine unendliche Reihe von Punkten $S_1, S_2, S_3, \dots$, die gegen den Punkt S convergiren, und eine unendliche Reihe von Punkten $T_1, T_2, T_3, \dots$, die gegen den Punkt T convergiren. Die Drehungen um M , vermöge deren O in $S_1, S_2, S_3, \dots$ übergeht, bezeichnen wir bez. mit $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots$ und die durch diese Drehungen bez. aus $T_1, T_2, T_3, \dots$ entspringenden Punkte seien $Z_1, Z_2, Z_3, \dots$; dann haben wir zu zeigen, dass die Punkte $Z_1, Z_2, Z_3, \dots$ gegen Z convergiren. Es sei Z^* eine Verdichtungsstelle der Punkte $Z_1, Z_2, Z_3, \dots$. Nach Axiom III giebt es dann eine Drehung um M , vermöge deren O in S und zugleich T in Z^* übergeht. Hierdurch erweist sich aber Z^* als eindeutig bestimmt und mit Z identisch.

§ 17.

In § 14—§ 16 haben wir erkannt, dass die Gruppe aller Drehungen eines wahren Kreises κ in sich die folgenden Eigenschaften besitzt:

1. Es giebt ausser der Identität keine Drehung um M , welche einen Punkt des wahren Kreises festlässt.

2. Wenn O, S irgend zwei beliebige Punkte des wahren Kreises sind, so giebt es gewiss eine Drehung um M , welche O und S überführt.

3. Bei einer Drehung um M , die O nach S bewegt, gehe zugleich T in Z über; der somit durch O, S, T eindeutig bestimmte Punkt Z erfährt auf κ eine stetige Aenderung, wenn S und T auf κ stetig ihre Lage ändern.

Diese drei Eigenschaften bestimmen vollständig den Bau der Gruppe der Transformationen $\Delta(t)$, die den Bewegungen des wahren Kreises in sich entsprechen. Wir stellen nämlich den folgenden Satz auf:

Die Gruppe aller Bewegungen des wahren Kreises in sich, die Drehungen um M sind, ist holodrisch-isomorph mit der Gruppe der gewöhnlichen Drehungen des Zahlenkreises um M in sich.

§ 18.

Wenn wir uns diejenige Drehung um M , die den Punkt O des wahren Kreises mit dem Parameterwerth 0 in den Punkt S mit dem Parameterwerth s überführt, durch die Transformationsformel

$$t' = \Delta(t, s)$$

dargestellt denken, wobei wir den Functionswerth $\Delta(0, 0) = 0$ nehmen, so

erkennen wir auf Grund der gefundenen Eigenschaften der Drehungsgruppe, dass die Function $\Delta(t, s)$ eindeutig und stetig für alle Werthe der beiden Veränderlichen t, s ist. Auch folgt, da s bis auf Vielfache von 2π eindeutig durch zwei zusammengehörige Werte t und t' bestimmt ist, dass die Function $\Delta(t, s)$ bei constantem t mit wachsendem s nur entweder beständig wächst oder abnimmt, und da sie für $t = 0$ in s übergeht, so tritt nothwendig der erstere Fall ein. Nun ist

$$\Delta(t, t) > \Delta(0, t), \quad \Delta(0, t) = t; \quad (t > 0)$$

und wegen

$$\Delta(2\pi, s) = 2\pi + \Delta(0, s) = 2\pi + s$$

folgt

$$\Delta(2\pi, 2\pi) = 4\pi.$$

Mithin hat die Function $\Delta(t, t) (> t)$ der einen Veränderlichen t die Eigenschaft, beständig von 0 bis 4π zu wachsen, während das Argument t von 0 bis 2π wächst. Aus diesem Umstande schliessen wir sofort folgende Thatsache:

Wenn irgend eine positive Zahl $t' \leq 2\pi$ vorgelegt ist, so giebt es stets eine und nur eine positive Zahl t , so dass

$$\Delta(t, t) = t'$$

wird; es ist $t < t'$. Der Parameterwerth t liefert einen Punkt des wahren Kreises von der Art, dass bei einer gewissen Drehung um M der Punkt $t = 0$ sich nach t und zugleich der Punkt t nach t' bewegt.

Wir bezeichnen nun denjenigen Werth von t , für welchen

$$\Delta(t, t) = 2\pi$$

wird, mit $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$, denjenigen, für welchen

$$\Delta(t, t) = \varphi\left(\frac{1}{2}\right)$$

wird, mit $\varphi\left(\frac{1}{2^2}\right)$, denjenigen, für welchen

$$\Delta(t, t) = \varphi\left(\frac{1}{2^2}\right)$$

wird, mit $\varphi\left(\frac{1}{2^3}\right) \dots$; ferner setzen wir allgemein

$$\Delta\left(\varphi\left(\frac{a}{2^n}\right), \varphi\left(\frac{1}{2^n}\right)\right) = \varphi\left(\frac{a+1}{2^n}\right),$$

wo $2a$ eine gerade ganze Zahl bedeutet, und ferner setzen wir

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 2\pi.$$

Damit ist die Function φ für alle rationalen Argumente, deren Nenner eine Potenz von 2 ist, widerspruchlos definirt.

Ist nun σ ein beliebiges positives Argument < 1 , so entwickeln wir σ in einen Dualbruch von der Form

$$\sigma = \frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{2^2} + \frac{z_3}{2^3} + \cdots,$$

wo z_1, z_2, z_3 lauter Ziffern 0, 1 bedeuten. Da die Zahlen der Reihe

$$\varphi\left(\frac{z_1}{2}\right), \varphi\left(\frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{2^2}\right), \varphi\left(\frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{2^2} + \frac{z_3}{2^3}\right), \cdots$$

gewiss niemals abnehmen und sämmtlich $\leq \varphi(1)$ bleiben, so nähern sie sich einem Grenzwert; diesen bezeichnen wir mit $\varphi(\sigma)$. Die Function $\varphi(\sigma)$ ist eine Function, die mit wachsendem Argument stets wächst; wir wollen beweisen, dass sie auch stetig ist. In der That wäre sie an einer Stelle

$$\sigma = \frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{2^2} + \frac{z_3}{2^3} + \cdots = L \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{2^n} = L \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 1}{2^n},$$

$$\left(\frac{a_n}{2^n} = \frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{2^2} + \cdots + \frac{z_n}{2^n} \right)$$

nicht stetig, so müssten die beiden Grenzwerte

$$L \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi\left(\frac{a_n}{2^n}\right) \quad \text{und} \quad L \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi\left(\frac{a_n + 1}{2^n}\right)$$

von einander verschieden ausfallen und mithin die unendliche Reihe von Punkten, die den Parametern

$$t = \varphi\left(\frac{a_1}{2}\right), \quad t = \varphi\left(\frac{a_2}{2^2}\right), \quad t = \varphi\left(\frac{a_3}{2^3}\right), \cdots$$

entsprechen, gegen einen anderen Punkt convergiren als die unendliche Reihe von Punkten, die den Parametern

$$t = \varphi\left(\frac{a_1 + 1}{2}\right), \quad t = \varphi\left(\frac{a_2 + 1}{2^2}\right), \quad t = \varphi\left(\frac{a_3 + 1}{2^3}\right), \cdots$$

entsprechen. Nun führt dieselbe Drehung, vermöge deren der Punkt $t = \varphi\left(\frac{a_n}{2^n}\right)$ in den Punkt $t = \varphi\left(\frac{a_n + 1}{2^n}\right)$ übergeht, auch zugleich den Punkt $t = \varphi\left(\frac{1}{2^n}\right)$ in den Punkt $t = \varphi\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)$ über, und da die Zahlen $\varphi\left(\frac{1}{2}\right), \varphi\left(\frac{1}{2^2}\right), \varphi\left(\frac{1}{2^3}\right), \cdots$ beständig abnehmen und die diesen Parameterwerthen entsprechenden Punkte daher jedenfalls gegen eine gewisse Stelle A convergiren müssen, so convergiren mit Rücksicht auf Axiom III einer oft angewandten Schlussweise zufolge auch die vorhin genannten unendlichen Reihen von Punkten beide gegen denselben Punkt.

Die Function $\varphi(\sigma)$ gestattet, da sie stets wächst und stetig ist, auch eine eindeutige und stetige Umkehrung.

Die Drehung um M , durch welche der Punkt $t = 0$ in den Punkt $t = \varphi\left(\frac{a_n}{2^n}\right)$ übergeht, führt zugleich den Punkt $t = \varphi\left(\frac{b_m}{2^m}\right)$ in $t = \varphi\left(\frac{b_m}{2^m} + \frac{a_n}{2^n}\right)$ über, unter b_m irgend eine ganze Zahl verstanden. Da für $n = \infty$ die Werthe $\varphi\left(\frac{a_n}{2^n}\right)$ gegen $\varphi(\sigma)$ und zugleich die Zahlen $\varphi\left(\frac{b_m}{2^m} + \frac{a_n}{2^n}\right)$ gegen $\varphi\left(\frac{b_m}{2^m} + \sigma\right)$ convergiren, so giebt es nach Axiom III eine Drehung, welche den Punkt $t = 0$ nach $t = \varphi(\sigma)$ und zugleich den Punkt $t = \varphi\left(\frac{b_m}{2^m}\right)$ nach $t = \varphi\left(\frac{b_m}{2^m} + \sigma\right)$ bewegt, d. h. es ist

$$\Delta\left(\varphi\left(\frac{b_m}{2^m}, \varphi(\sigma)\right)\right) = \varphi\left(\frac{b_m}{2^m} + \sigma\right)$$

und, da σ eine stetige Function ist, so folgt hieraus allgemein für beliebige Parameterwerthe τ, σ

$$\Delta(\varphi(\tau), \varphi(\sigma)) = \varphi(\tau + \sigma).$$

Damit ist bewiesen, dass, wenn wir in der Transformationsformel

$$t' = \Delta(t, s)$$

mittelt einer gewissen umkehrbar eindeutigen Function φ an Stelle von t, t', s neue Parameter τ, τ', σ gemäss

$$t = \varphi(\tau), \quad t' = \varphi(\tau'), \quad s = \varphi(\sigma)$$

eingeführen, sich die Drehung in den neuen Parametern durch die Formel

$$\tau' = \tau + \sigma$$

ausdrückt. Dieser Satz lehrt die Richtigkeit der in § 17 aufgestellten Behauptung.

Wir setzen noch an Stelle des Parameters σ den Parameter $\omega = 2\pi\sigma$, und nennen diesen Parameterwerth ω *den Winkel* oder *die Bogenlänge* zwischen den Punkten O ($\sigma = 0$) und S (d. h. σ) auf dem wahren Kreise κ ; die Drehung, bei welcher der Punkt O ($\sigma = 0$) in den Punkt S (d. h. σ) übergeht, heisse *eine Drehung* $\Delta[\omega]$ *des wahren Kreises in sich um den Winkel* ω .

§ 19.

Durch diesen Beweis des Satzes in § 17 haben wir die Untersuchung der Drehungen eines einzelnen wahren Kreises in sich beendet und wenden uns nun zu den Eigenschaften der Gruppe der Transformationen *aller* Punkte bei den Drehungen der Ebene um den festen Punkt M .

Zum Zweck dieser Untersuchung beweisen wir der Reihe nach folgende Sätze:

Es sei von einem wahren Kreise κ um M bekannt, dass er eine geschlossene Jordan'sche Curve ist, in deren Innerem M liegt: dann giebt es ausser der Identität keine Drehung der Ebene um M , welche jeden Punkt des wahren Kreises κ festlässt.

Zum Beweise bezeichnen wir eine Drehung um M , die jeden Punkt auf κ festlässt, mit K und nehmen dann *erstens* im Gegensatz zur Behauptung an, es gäbe auf κ einen Punkt A , in dessen beliebiger Nähe Punkte liegen, die ihre Lage bei einer Drehung K verändern. Um A schlagen wir, was nach § 12 gewiss möglich ist, einen wahren Kreis α , der durch einen gegenüber K veränderlichen Punkt gehe. Es sei B ein Schnittpunkt dieses Kreises mit κ ; dann charakterisirt sich die Bewegung K zugleich als eine Drehung des Kreises α in sich, bei der B festbleibt. Bei einer solchen Drehung bleiben aber nach § 14 alle Punkte auf α fest, was nicht der Fall ist; unsere erstere Annahme erweist sich demnach als unzulässig.

Wir construiren nunmehr ein System von geschlossenen Jordan'schen Curven um M , zu denen κ gehört und von denen jede die andere entweder ganz ein- oder ganz umschliesst, so dass durch jeden Punkt der Zahlenebene eine und nur eine Curve des Systems hindurchgeht. Dann nehmen wir *zweitens* im Gegensatz zur obigen Behauptung an, es sei λ eine Curve dieses Systems innerhalb κ bez. ausserhalb κ , so dass alle Punkte in dem ringförmigen Gebiete zwischen κ und λ bei jeder Drehung K festbleiben, während in beliebiger Nähe der Curve λ solche Punkte vorhanden sind, die nicht bei jeder Drehung K festbleiben.

Es sei A ein Punkt auf λ , in dessen beliebiger Nähe bei K bewegliche Punkte liegen; dann schlagen wir um A einen wahren Kreis, der durch einen dieser beweglichen Punkte läuft. Da dieser Kreis bei genügender Kleinheit jedenfalls durch einen Theil des ringförmigen bei den Bewegungen K festbleibenden Gebietes hindurchläuft, so charakterisirt sich die Bewegung K zugleich als eine Drehung des Kreises α in sich, bei welcher unendlich viele Punkte von α festbleiben. Bei K müssten daher nach § 14 alle Punkte von α festbleiben, was nicht der Fall ist. Damit ist gezeigt, dass bei den Drehungen K alle Punkte der Ebene festbleiben.

§ 20.

Wir stellen nun folgende wichtige Behauptungen auf:

Jeder wahre Kreis ist eine geschlossene Jordan'sche Curve: das System aller wahren Kreise um irgend einen Punkt M erfüllt lückenlos unsere Ebene, so dass jeder wahre Kreis um M jeden anderen solchen Kreis ein- oder umschliesst.

Die sämtlichen Drehungen $\Delta[\omega]$ unserer Ebene um M werden durch Transformationsformeln von der Gestalt

$$\begin{aligned}x' &= f(x, y; \omega), \\ y' &= g(x, y; \omega)\end{aligned}$$

ausgedrückt; darin bedeuten x, y bez. x', y' die Coordinaten in der Zahlenebene und f, g eindeutige stetige Functionen in den drei Veränderlichen x, y, ω . Ferner haben für jeden Punkt x, y die Functionen f, g hinsichtlich des Argumentes ω die Zahl 2π zur kleinsten simultanen Periode, d. h. man erhält jeden Punkt des wahren Kreises durch den Punkt (x, y) je einmal und nur einmal, wenn man ω die Werthe von 0 bis 2π durchlaufen lässt. Endlich gilt für die Zusammensetzung zweier Drehungen um die Winkel ω, ω' die Formel

$$\Delta[\omega] \Delta[\omega'] = \Delta[\omega + \omega'].$$

§ 21.

Zum Beweise der aufgestellten Behauptungen construiren wir irgend einen wahren Kreis κ um M , der eine geschlossene Jordan'sche Curve ist, und betrachten zunächst die Drehungen dieses wahren Kreises κ in sich. Nach § 18 führen wir den Winkel ω ein, so dass durch die Angabe eines Werthes von ω zwischen 0 und 2π eine Bewegung des wahren Kreises κ in sich eindeutig bestimmt ist. Nun entspricht aber einer jeden Drehung des wahren Kreises in sich nur eine bestimmte Drehung der Ebene um M , da ja nach § 19 bei Festhaltung aller Punkte auf κ überhaupt alle Punkte der Ebene festbleiben. Daraus folgt, dass in den in § 20 aufgestellten Formeln für die Drehung der Ebene um M die Functionen f, g für alle x, y, ω eindeutige Functionen sind, die hinsichtlich ω die Periode 2π besitzen.

Wir beweisen nun, dass f, g stetige Functionen in x, y, ω sind. Zu dem Zwecke sei O irgend ein Punkt auf κ , ferner $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ eine unendliche Reihe von Werthen, die gegen einen bestimmten Werth ω convergiren, und $T_1, T_2, T_3, \dots$ eine unendliche Reihe von Punkten unserer Ebene, die gegen irgend einen Punkt T convergiren. Diejenigen Punkte, die aus O bez. bei Anwendung der Drehungen um den Winkel $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ hervorgehen, bezeichnen wir mit $S_1, S_2, S_3, \dots$ und die Punkte, die aus $T_1, T_2, T_3, \dots$ bez. bei den Drehungen $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ entstehen, mögen $Z_1, Z_2, Z_3, \dots$ heissen. Endlich mögen die Punkte, die aus O bez. T durch eine Drehung um den Winkel ω hervorgehen, bez. mit S, Z bezeichnet werden. Es kommt darauf an zu zeigen, dass die Punkte $Z_1, Z_2, Z_3, \dots$ gegen Z convergiren.

Da die Punkte $T_1, T_2, T_3, \dots$ gegen T convergiren, so können wir ein Jordan'sches Gebiet G bestimmen, in dessen Innerem die sämtlichen

Punkte $M, T, T_1, T_2, T_3, \dots$ liegen. Auf dieses Jordan'sche Gebiet wenden wir dann diejenige Drehung um M an, welche O nach S bewegt. Das so aus G entstehende Jordan'sche Gebiet heisse H ; dasselbe enthält gewiss die Punkte M und Z . Endlich construiren wir eine geschlossene Jordan'sche Curve α , die das Gebiet H ganz umschliesst, ohne H zu berühren.

Wir wollen nun beweisen, dass von den Punkten $Z_1, Z_2, Z_3, \dots$ gewiss nur eine endliche Anzahl ausserhalb der Curve α liegen. In der That, würden unendlichviele von ihnen, etwa die Punkte $Z_{i_1}, Z_{i_2}, Z_{i_3}, \dots$ ausserhalb α liegen, so denke man sich allgemein M mit T_{i_h} durch eine Jordan'sche innerhalb G verlaufende Curve γ_h verbunden und dann mit γ_h die Drehung um den Winkel ω_{i_h} ausgeführt. Die so entstehende Curve verbindet M mit Z_{i_h} und schneidet folglich die Curve α gewiss in einem Punkte, etwa B_h ; es sei A_h der Punkt auf γ_h , der bei der Drehung um den Winkel ω_{i_h} in B_h übergeht. Da die Punkte $A_1, A_2, A_3, \dots$ sämtlich innerhalb G und die Punkte $B_1, B_2, B_3, \dots$ sämtlich auf α bleiben, so giebt es gewiss eine unendliche Reihe von Indices $h_1, h_2, h_3, \dots$ von der Art, dass $A_{h_1}, A_{h_2}, A_{h_3}, \dots$ gegen einen Punkt A innerhalb G oder auf der Grenze von G und zugleich $B_{h_1}, B_{h_2}, B_{h_3}, \dots$ gegen einen Punkt B auf α convergiren. Nun wissen wir, dass die Punkte $S_1, S_2, S_3, \dots$ gegen S convergiren; mit Rücksicht auf Axiom III müsste es demnach eine Drehung um M geben, die O nach S und zugleich A nach B bewegt; dies ist aber nicht möglich. Denn bei dieser Drehung müsste A in einen Punkt innerhalb H oder auf der Grenze von H übergehen; dagegen ist B ein Punkt auf der Curve α , die das Gebiet H umschliesst, ohne H zu berühren.

Damit haben wir erkannt, dass das Punktsystem $Z_1, Z_2, Z_3, \dots$ ganz innerhalb eines gewissen Jordan'schen Gebietes liegen muss.

Es sei nun Z^* eine Verdichtungsstelle der Punkte $Z_1, Z_2, Z_3, \dots$. Da die Punkte $S_1, S_2, S_3, \dots$ gegen S convergiren, so giebt es nach Axiom III eine Drehung um M , bei welcher O in S und zugleich T in Z^* übergeht. Da aber bei derjenigen Drehung um M , welche O in S überführt, T in Z übergehen sollte, so folgt wegen der vorhin bewiesenen Eindeutigkeit der Functionen f, g nothwendig $Z^* = Z$, d. h. die Punkte $Z_1, Z_2, Z_3, \dots$ verdichten sich nur an einer Stelle, nämlich an der Stelle Z . Damit ist die Stetigkeit der Functionen f, g in x, y, ω bewiesen.

Wir setzen jetzt in f, g für x, y die Coordinaten irgend eines Punktes P unserer Ebene ein, der innerhalb oder ausserhalb des Kreises κ liegt. Die dann entstehenden Functionen $f(\omega), g(\omega)$ in der Veränderlichen ω allein dürfen nicht beliebig kleine simultane Perioden haben. Denn da sie stetige Functionen von ω sind, so wären sie in diesem Falle Constante; dann aber würde der Punkt P bei allen Drehungen der Ebene um M festbleiben,

was Axiom II widerspräche. Die kleinste simultane Periode jener beiden Functionen $f(\omega)$, $g(\omega)$ muss demnach von der Form $\frac{2\pi}{n}$ sein, wo n eine ganze positive Zahl bedeutet. Hieraus folgt, dass der durch P gehende wahre Kreis erhalten wird, wenn man in den Formeln

$$x = f(\omega), \quad y = g(\omega)$$

den Werth ω von 0 bis $\frac{2\pi}{n}$ laufen lässt. Diese Curve ist geschlossen und ohne Doppelpunkte; sie stellt daher den durch P gehenden wahren Kreis um M dar. Wenden wir nunmehr auf die Ebene eine Drehung um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ an, so bleiben dabei alle Punkte dieses durch P gelegten wahren Kreises fest, und daher müssten nach § 19 alle Punkte der Ebene fest bleiben; die Punkte auf dem wahren Kreise κ bleiben aber bei jener Drehung nur fest, wenn $n = 1$ ist, und damit haben wir die Aussagen des in § 20 aufgestellten Satzes in allen Theilen bewiesen.

§ 22.

Wir erkennen jetzt leicht auch die Richtigkeit der folgenden That-
sachen:

Wenn irgend zwei Punkte bei einer Bewegung der Ebene festbleiben, so bleiben alle Punkte fest, d. h. die Bewegung ist die Identität.

Jeder Punkt der Ebene lässt sich durch eine Bewegung gewiss in jeden anderen Punkt der Ebene überführen.

Die erstere Thatsache folgt sofort mit Rücksicht auf den Satz in § 20; die letztere, wenn wir um jeden der Punkte den wahren Kreis durch den anderen legen, wobei diese Kreise sich nothwendig treffen müssen.

§ 23.

Unser wichtigstes weiteres Ziel besteht darin, den Begriff der wahren Geraden in unserer Geometrie einzuführen und die für den Aufbau der Geometrie nothwendigen Eigenschaften dieses Begriffes zu entwickeln.

Zu dem Zwecke setzen wir zunächst folgende Benennungen fest: Wenn A, B und A', B' zwei Punktepaare von der Art sind, dass sich vermöge einer Bewegung A in A' und zugleich B in B' überführen lässt, so sagen wir, die (wahre) Strecke AB sei congruent (in Zeichen $\equiv$) der (wahren) Strecke $A'B'$. Ferner nennen wir zwei wahre Kreise congruent, wenn es eine Bewegung giebt, welche ihre Mittelpunkte und zugleich sie selbst ineinander überführt.

Unter einer Halbdrehung H um einen Punkt M verstehen wir eine Drehung um den Winkel π d. h. eine Drehung, die noch einmal

ausgeführt die Identität ergibt. Wenn A, B, C drei Punkte sind, so dass A bei einer Halbdrehung um B in C und demnach auch zugleich C bei dieser Halbdrehung in A übergeht, so heisse B die *Mitte der Strecke* AC .

Wenn C ein Punkt innerhalb bez. ausserhalb des um A durch B geschlagenen wahren Kreises ist, so nennen wir die Strecke AC *kleiner* bez. *grösser* als die Strecke AB . Um in analoger Weise die Begriffe „kleiner“ und „grösser“ für beliebige Strecken bez. für beliebige Kreise zu definieren, führe man Bewegungen aus, vermöge welcher die Anfangspunkte der Strecken bez. die Mittelpunkte der Kreise in den nämlichen Punkt fallen.

§ 24.

Eine wahre Strecke AC hat höchstens *eine* Mitte; gäbe es nämlich für AC zwei Mitten und bezeichnen wir die Halbdrehungen um diese Mitten mit H_1 und H_2 , so würde die zusammengesetzte Substitution $H_1 H_2^{-1}$ eine Bewegung darstellen, welche jeden der Punkte A und C festliesse, und somit entnehmen wir nach § 22 symbolisch

$$H_1 H_2^{-1} = 1 \quad \text{d. h.} \quad H_1 = H_2;$$

mithin stimmen auch die Mitten selbst überein. Insbesondere folgern wir hieraus die weitere Thatsache:

Wenn zwei Strecken einander congruent sind, so sind auch ihre Hälften einander congruent.

§ 25.

Für die weiteren Entwicklungen brauchen wir folgenden Hilfssatz:

Es mögen die Punkte $A_1, A_2, A_3, \dots$ gegen den Punkt A und die Punkte $M_1, M_2, M_3, \dots$ gegen den Punkt M convergiren; wenn dann allgemein bei Ausführung der Halbdrehung um M_i der Punkt A_i in B_i übergeht, so convergiren die Punkte $B_1, B_2, B_3, \dots$ ebenfalls und zwar gegen denjenigen Punkt B , der durch die Halbdrehung um M aus A entsteht.

Zunächst lässt sich gewiss ein Jordan'sches Gebiet finden, innerhalb dessen das Punktsystem $B_1, B_2, B_3, \dots$ gelegen ist. Davon überzeugen wir uns durch das nämliche Schlussverfahren, welches in § 21 auf das Punktsystem $Z_1, Z_2, Z_3, \dots$ angewandt worden ist.

Wir bezeichnen nun mit B^* eine Verdichtungsstelle der Punkte $B_1, B_2, B_3, \dots$. Auf Grund des Axioms III muss es dann eine Bewegung geben, welche die Punkte A, M, B^* bez. in die Punkte B^*, M, A überführt; d. h. B^* geht aus A durch die Halbdrehung um M hervor. Da aber auch B aus A durch die Halbdrehung um M hervorgeht, so folgt $B^* = B$ und damit ist der gewünschte Nachweis erbracht.

§ 26.

Es sei M die Mitte einer gewissen Strecke AB ; dann wollen wir zeigen, dass jede Strecke AC , die kleiner als AB ist, ebenfalls eine Mitte N besitzt.

Zu dem Zwecke ziehen wir irgend eine stetige Curve γ von A bis M und suchen zu jedem Punkte M' dieser Curve γ den Punkt B' , so dass M' die Mitte von AB' wird; dann ist der Ort der Punkte B' , wie wir aus dem in § 25 bewiesenen Hilfssatze schliessen, eine stetige Curve γ' . Diese Curve γ' mündet gewiss in A , wenn der Punkt M' auf der Curve γ nach A hin läuft. Denn im anderen Falle nehmen wir an, es sei $M_1, M_2, M_3, \dots$ eine unendliche Reihe von Punkten auf γ , die gegen A convergiren, und $B_1, B_2, B_3, \dots$ die entsprechenden Punkte auf der Curve γ' . Würden nun $B_1, B_2, B_3, \dots$ eine von A verschiedene Verdichtungsstelle A^* besitzen, so entnehmen wir daraus, dass es eine Bewegung giebt, welche gewisse Punkte in beliebiger Nähe von A in beliebiger Nähe von A lässt und zugleich den Punkt A in beliebige Nähe von A^* bringt. Dann müsste also auf Grund des Axioms III bei einer gewissen Bewegung A fest bleiben und zugleich in A^* übergehen, was unmöglich ist.

Da nun unserer Annahme zufolge AC kleiner als AB ist, so muss der um A durch C geschlagene wahre Kreis die A mit B verbindende stetige Curve γ' in irgend einem Punkte B' treffen. Der diesem Punkte entsprechende Punkt M' auf γ ist die Mitte der wahren Strecke AB' und da $AC \equiv AB'$ ist, so findet man durch eine geeignete Drehung um A aus M' auch die gesuchte Mitte N von AC .

Da die Strecke AC durch die Halbdrehung um ihre Mitte N in die Strecke CA übergeht, so folgt aus unserem eben bewiesenen Satze:

Die Strecke AC ist stets der Strecke CA congruent — vorausgesetzt, dass die Strecke AC kleiner als die bestimmte am Anfange dieses § 26 zu Grunde gelegte Strecke AB ist.

Zugleich erkennen wir, dass, wenn die Punkte $C_1, C_2, C_3, \dots$ gegen den Punkt A convergiren, stets auch die Mitten $N_1, N_2, N_3, \dots$ der Strecken bez. $AC_1, AC_2, AC_3, \dots$ gegen A convergiren.

§ 27.

Für unsere weiteren Entwicklungen haben wir einige Sätze über sich berührende wahre Kreise nöthig und zwar kommt es vor Allem darauf an, zwei zu einander congruente Kreise zu construiren, die sich einander von aussen in einem und nur in einem Punkte berühren.

Zu dem Zwecke wählen wir einen Kreis κ' so klein, dass innerhalb desselben keine Strecke liegt, die der bestimmten in § 26 zu Grunde

gelegten Strecke AB congruent wird; der Satz in § 20 zeigt, dass dies gewiss möglich ist, da sich sonst die Punkte A und B gleichzeitig beliebig nahe an M bewegen liessen. Sodann sei κ ein innerhalb κ' liegender Kreis um denselben Mittelpunkt wie κ' . Wir nehmen nun auf dem Kreise κ irgend

Fig. 2.

zwei Punkte an und schlagen um diese zu einander congruente Kreise α und β so klein, dass irgend zwei Punkte auf κ , die innerhalb α liegen, niemals von irgend zwei Punkten auf κ , die innerhalb β liegen, im Sinne der Anordnung der Punkte auf κ getrennt liegen können. Ausserdem seien die Kreise α , β so klein gewählt, dass sie ganz innerhalb des Kreises κ' liegen. Dann nehme man einen Punkt P' an,

der innerhalb α und ausserhalb κ liegt und einen Punkt R' an, der innerhalb β und innerhalb κ liegt, und schlage dann um P' und R' zu einander congruente Kreise π' bez. ρ' so klein, dass π' ganz innerhalb α und ausserhalb κ und ferner ρ' ganz innerhalb β und innerhalb κ fällt. Nun führe man eine Drehung um den Mittelpunkt von α aus, so dass der Kreis π' in einen Kreis π'' übergeht, der den Kreis κ von aussen berührt: die Berührungspunkte bilden ein Punktsystem, welches mit S bezeichnet werden möge. Sodann führe man eine Drehung um den Mittelpunkt von β aus, so dass der Kreis ρ' in einen Kreis ρ übergeht, der den Kreis κ von innen berührt. Die Berührungspunkte bilden ein Punktsystem, welches mit T bezeichnet werden möge.

Da wegen der Wahl der Kreise α , β keine zwei Punkte des Systems S durch ein Punktepaar des Systems T auf κ getrennt werden, so ist es gewiss möglich, durch eine Drehung der Ebene um den Mittelpunkt des Kreises κ einen der äussersten Punkte von S auf κ mit einem der äussersten Punkte von T auf κ derart zur Deckung zu bringen, dass die übrigen Punkte von S in Punkte übergehen, die von den Punkten des Systems T

durchweg verschieden sind. Bei dieser Drehung gelangt der Kreis π'' mit dem Kreise ρ in Berührung in der Weise, dass der Punkt C , in dem das Zusammenfallen stattfindet, der einzige Berührungspunkt wird. Wir bezeichnen den Kreis π'' in seiner neuen Lage mit π und die Mittelpunkte von π und ρ bez. mit P und R .

Wir wollen nun beweisen, dass der Berührungspunkt C nothwendig die Mitte zwischen den beiden Mittelpunkten P, R ist. In der That wegen unserer Wahl von π' ist die Strecke PR nothwendig kleiner als die bestimmte Strecke AB und besitzt daher nach § 26 gewiss eine Mitte; dieselbe heisse C^* . Dann geht jeder der beiden Kreise π, ρ durch eine Halbdrehung um C^* in den andern über und daher wird aus jedem Punkte des einen Kreises ein Punkt des andern. Da der Punkt C beiden Kreisen π, ρ gemeinsam ist, so muss er bei einer solchen Halbdrehung ebenfalls in einen den Kreisen π, ρ gemeinsamen Punkt übergehen, er muss folglich bei dieser Halbdrehung ungeändert bleiben und stimmt mithin nothwendig mit dem Punkte C^* überein, um welchen die Halbdrehung ausgeführt wurde.

Aus der eben bewiesenen Thatsache erkennen wir zugleich folgende Thatsache:

Aus dem Kreise π entsteht durch Halbdrehung um den Punkt C auf π der Kreis ρ , der π in C von aussen berührt; es giebt ausser ρ keinen anderen Kreis, der mit dem Kreise π congruent ist und ihn im Punkte C und nur in diesem einen Punkte von aussen berührt.

§ 28.

Ferner gilt der Satz:

Wenn irgend ein Kreis ι von dem Kreise π umschlossen und berührt wird, so findet diese Berührung nur in einem Punkte statt.

Zum Beweise nehmen wir an, es seien Q, Q' zwei von einander verschiedene Berührungspunkte der Kreise ι und π . Dann führen wir eine Halbdrehung um Q' aus; durch diese geht π in einen Kreis π' über, der π nur im Punkte Q' berührt, und ι geht in einen Kreis ι' über, der innerhalb π' und daher gewiss ganz ausserhalb π verläuft, beide Kreise π, π' nur in Q berührend. Führen wir jetzt diejenige Drehung um den Mittelpunkt des Kreises π aus, durch welche Q in Q' übergeht, so entsteht aus ι ein Kreis ι'' , welcher ganz innerhalb π und daher gewiss auch ausserhalb ι' liegt, diesen nur in Q' berührend. Damit haben wir zwei Kreise ι, ι'' die beide den

Fig. 3.

congruenten Kreis ι' in Q' und nur in diesem Punkte von aussen berühren, und dieser Umstand widerspricht dem Satze in § 27.

Die in § 27 und § 28 gefundenen Thatsachen bleiben gültig, wenn wir statt π , ρ kleinere Kreise nehmen.

§ 29.

Es sei P der Mittelpunkt des in § 27 construirten Kreises π und Q ein Punkt auf π , ferner sei O ein beliebiger Punkt. Dann können wir unter Heranziehung der Bemerkung am Schluss von § 26 und wie in § 27, auf Grund des Satzes in § 20 gewiss einen Punkt E in solcher Nähe von O angeben, dass innerhalb des Kreises ι , der um die Mitte M der Strecke OE durch O und E gelegt wird, keine zu PQ congruente Strecke existirt und das Gleiche auch für jeden Punkt E' und den entsprechenden Kreis ι' gilt, wenn E' noch näher als E an dem Punkte O gelegen ist.

Alsdann gilt der Satz:

Der um die Mitte M (bez. M') von OE (bez. OE') durch O gelegte Kreis ι (bez. ι') wird von dem Kreise um O durch E (bez. E') ganz umschlossen und nur in E (bez. E') berührt.

Zum Beweise construiren wir zunächst denjenigen Kreis ω um O , der den Kreis ι umschliesst und zugleich berührt. Dieser Kreis ω ist nothwendig kleiner als der Kreis π ; denn im anderen Falle würde der um O gelegte zu π congruente Kreis in's Innere des Kreises ι eintreten und

Fig. 4.

dann müsste innerhalb ι eine zu PQ congruente Strecke existiren, was nicht der Fall sein sollte. Nach dem in § 28 bewiesenen Satze kann dieser Kreis ω mit ι nur einen Berührungspunkt haben; derselbe sei E_1 . Wäre nun E_1 verschieden von E , so führe man um M diejenige Drehung aus, durch welche E_1 nach O gelangt; bei dieser Drehung gelangt dann O in einen Punkt E_2 des Kreises ι , der von E_1 verschieden sein müsste. Da die Strecke OE_1 der

Strecke E_2O und also auch OE_2 congruent wird, so müsste E_2 ebenfalls ein Punkt des Kreises ω sein, dies widerspräche dem Umstande, dass E_1 der einzige den Kreisen ω und ι gemeinsame Punkt sein sollte; d. h. der Kreis ω läuft durch E und damit ist unsere Behauptung bewiesen.

§ 30.

Bei den folgenden Entwicklungen legen wir die zu Beginn des § 29 construirte Strecke OE zu Grunde und ertheilen den Punkten O, E die Zahlenwerthe 0 bez. 1; sodann construiren wir die Mitte von OE und

ertheilen dieser Mitte den Zahlenwerth $\frac{1}{2}$, ferner ertheilen wir den Mitten der Strecken $(0, \frac{1}{2})$ bez. $(\frac{1}{2}, 1)$ die Werthe $\frac{1}{4}$ bez. $\frac{3}{4}$ und dann den Mitten der Strecke $(0, \frac{1}{4})$ bez. $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$, $(\frac{3}{4}, 1)$ die Werthe $\frac{1}{8}$ bez. $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{8}$; und so fort. Ferner führen wir mit der ganzen Strecke $(0, 1)$ um den Punkt 0 eine Halbdrehung aus und ertheilen allgemein demjenigen Punkte, der aus dem zur Zahl a gehörigen Punkte hervorgeht, den Zahlenwerth $-a$; sodann führen wir um den Punkt 1 eine Halbdrehung aus und ertheilen allgemein demjenigen Punkte, der aus dem zur Zahl a gehörigen Punkte hervorgeht, den Zahlenwerth $2 - a$ und so fort denken wir uns abwechselnd Halbdrehungen um O und um E ausgeführt und die neu entstehenden Punkte entsprechend benannt, bis schliesslich jede Zahl a einem bestimmten Punkte zugeordnet erscheint, wenn a eine rationale Zahl bedeutet, deren Nenner eine Potenz von 2 ist.

§ 31.

Wir erkennen für diese Zuordnung leicht folgendes Gesetz:

Durch eine Halbdrehung um den zur Zahl a gehörigen Punkt geht jeder Punkt x in den Punkt $2a - x$ über. Wenn wir mithin erst eine Halbdrehung um den Punkt $O = 0$ und dann eine solche um den Punkt a ausführen, so wird jeder Punkt x in den Punkt $x + 2a$ verwandelt.

§ 32.

Um die Punkte, denen Zahlen zugehören, unter einander anzuordnen und die von ihnen begrenzten Strecken mit einander zu vergleichen, benutzen wir den in § 29 aufgestellten Satz über sich berührende Kreise in folgender Weise:

Der Kreis um den Punkt 0 durch den Punkt $\frac{1}{2}$ umschliesst ganz den Kreis um $\frac{1}{4}$ durch $\frac{1}{2}$, und da dieser die Kreise um $\frac{1}{8}$ durch $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ und um $\frac{3}{8}$ durch $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ umschliesst, die letzteren wiederum die Kreise um $\frac{1}{16}$ durch $\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$, um $\frac{3}{16}$ durch $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$, um

Fig. 5.

$\frac{5}{16}$ durch $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$, um $\frac{7}{16}$ durch $\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$, u. s. f., so erkennen wir, dass die Strecke $(0, \frac{1}{2})$ grösser als alle Strecken $(0, a)$ ist, wenn a eine positive rationale Zahl bedeutet, deren Nenner eine Potenz von 2 ist und deren Werth unterhalb $\frac{1}{2}$ liegt.

Ferner umschliesst der Kreis um 0 durch $\frac{1}{4}$ den Kreis um $\frac{1}{8}$ durch $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$. Der zweite umschlossene Kreis umschliesst seinerseits die Kreise um $\frac{1}{16}$ durch $\frac{2}{16}$ und um $\frac{3}{16}$ durch $\frac{4}{16}$, diese umschliessen wiederum die kleineren Kreise um $\frac{1}{32}$, $\frac{3}{32}$, $\frac{5}{32}$, $\frac{7}{32}$ u. s. f.; daraus erkennen wir, dass die Strecke $(0, \frac{1}{4})$ grösser ist als alle Strecken $(0, a)$, wenn a eine positive rationale Zahl bedeutet, deren Nenner eine Potenz von 2 ist und deren Werth unterhalb $\frac{1}{4}$ liegt.

Weiter betrachten wir den Kreis um 0 durch $\frac{1}{8}$; derselbe umschliesst den Kreis um $\frac{1}{16}$ durch $\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$ und dieser wiederum umschliesst die kleineren Kreise um $\frac{1}{32}$ durch $\frac{2}{32}$ u. s. f.; daraus erkennen wir, dass die Strecke $(0, \frac{1}{8})$ grösser als alle Strecken $(0, a)$ ist, wenn a eine positive rationale Zahl bedeutet, deren Nenner eine Potenz von 2 ist und deren Werth unterhalb $\frac{1}{8}$ liegt. Durch Fortsetzung dieses Schlussverfahrens finden wir das allgemeine Resultat:

Ist a eine positive rationale Zahl, deren Nenner eine Potenz von 2 ist und deren Werth unterhalb $\frac{1}{2^m}$ liegt, so ist die Strecke $(0, a)$ stets kleiner als die Strecke $(0, \frac{1}{2^m})$.

§ 33.

Nunmehr sind wir im Stande, der Reihe nach folgende Hilfssätze zu beweisen:

Die Punkte, die den Zahlen $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$ entsprechen, convergiren gegen den Punkt 0.

Denn im entgegengesetzten Falle müssten, da die Strecken $(0, \frac{1}{2})$, $(0, \frac{1}{4})$, $(0, \frac{1}{8})$, $(0, \frac{1}{16})$, $\dots$ beständig kleiner werden, die Punkte $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$ ihre Verdichtungsstellen auf einem bestimmten wahren Kreise κ

um den Punkt 0 haben. Es sei etwa $\frac{1}{2^{n_1}}, \frac{1}{2^{n_2}}, \frac{1}{2^{n_3}}, \dots$ eine Reihe von Punkten, die gegen einen Punkt K auf κ convergiren: dann mögen die Punkte

$$\frac{1}{2^{n_1+1}}, \frac{1}{2^{n_2+1}}, \frac{1}{2^{n_3+1}}, \dots$$

im Punkte K^* eine Verdichtungsstelle haben. Aus dem Satze in § 25 geht hervor, dass dann K^* die Mitte der Strecke OK sein müsste; dies widerspricht unter Hinzuziehung der am Schlusse von § 27 gefundenen Thatsache dem Umstande, dass K^* ebenfalls auf dem Kreise κ liegt.

§ 34.

Es mögen $a_1, a_2, a_3, \dots$ positive rationale Zahlen bedeuten, deren Nenner Potenzen von 2 sind. Wenn dann die unendliche Zahlenreihe $a_1, a_2, a_3, \dots$ gegen 0 convergirt, so convergirt auch die diesen Zahlen entsprechende Punktreihe gegen den Punkt 0.

Zum Beweise wählen wir die ganzen Exponenten $n_1, n_2, n_3, \dots$ derart dass

$$a_1 < \frac{1}{2^{n_1}}, a_2 < \frac{1}{2^{n_2}}, a_3 < \frac{1}{2^{n_3}}, \dots$$

wird, und die Reihe $\frac{1}{2^{n_1}}, \frac{1}{2^{n_2}}, \frac{1}{2^{n_3}}, \dots$ ebenfalls gegen 0 convergirt. Da zufolge des Satzes in § 32 allgemein der Punkt a_i innerhalb des Kreises um 0 durch $\frac{1}{2^{n_i}}$ liegt und nach dem in § 33 bewiesenen Hilfssatze die Kreise um 0 durch $\frac{1}{2^{n_1}}, \frac{1}{2^{n_2}}, \frac{1}{2^{n_3}}, \dots$ gegen 0 convergiren, so folgt sofort auch die zu beweisende Behauptung.

§ 35.

Endlich gilt der folgende Satz:

Es seien $a_1, a_2, a_3, \dots$ eine unendliche Reihe von rationalen Zahlen, deren Nenner Potenzen von 2 sind und die gegen irgend eine reelle Zahl a convergiren: dann convergiren die entsprechenden Punkte $a_1, a_2, a_3, \dots$ ebenfalls gegen einen bestimmten Punkt.

Zum Beweise nehmen wir das Gegentheil an: es seien etwa V' und V'' zwei von einander verschiedene Verdichtungsstellen der Punkte $a_1, a_2, a_3, \dots$ und zwar mögen die Punkte $a_1, a_2, a_3, \dots$ gegen V' und $a_{1''}, a_{2''}, a_{3''}, \dots$ gegen V'' convergiren. Nach den Bemerkungen in § 31 giebt es für jeden Punkt a_k eine aus zwei Halbdrehungen zusammengesetzte Bewegung, die allgemein den Punkt a_i in den Punkt $a_i - a_k$ und zugleich

den Punkt $a_{i''}$ in den Punkt $a_{i''} - a_k$ überführt, und da sowohl die Zahlenwerthe $a_{i'} - a_k$ als auch die Zahlenwerthe $a_{i''} - a_k$ mit wachsenden Indices beliebig nahe an 0 kommen, so erkennen wir mit Rücksicht auf den Satz in § 34, dass es Bewegungen giebt, die einen Punkt in beliebiger Nähe von V' und zugleich einen Punkt in beliebiger Nähe von V'' in beliebige Nähe des Punktes 0 bringen. Dies ist im Hinblick auf Axiom III einer oft angewandten Schlussweise zufolge nicht möglich.

§ 36.

Ertheilen wir nun dem Punkte, gegen den die Punkte $a_1, a_2, a_3, \dots$ convergiren, den Zahlenwerth a , so ist damit überhaupt jedem reellen Zahlenwerthe ein bestimmter Punkt unserer Ebene zugeordnet; wir nennen das System aller dieser Punkte eine *wahre Gerade*, so dass also *die wahre Gerade dasjenige System von Punkten ist, die aus den Punkten 0, E entstehen, wenn man fortgesetzt die Mitten nimmt, Halbdrehungen ausführt und die Häufungsstellen aller erhaltenen Punkte hinzufügt. Sämmtliche durch Bewegung aus dieser wahren Geraden entstehenden Punktsysteme sind wiederum wahre Gerade. Die Gerade zerfällt vom Punkte 0 aus in zwei Halbgerade.*

§ 37.

Mit Benutzung des Hilfssatzes in § 25 erkennen wir leicht, dass bei der Halbdrehung um einen beliebigen Punkt a unserer wahren Geraden allgemein der Punkt x in den Punkt $2a - x$ übergeht; bei der Ausführung zweier Halbdrehungen um die Punkte 0 und a geht also allgemein x in $x + 2a$ über.

Aus dem Satze in § 35 folgern wir leicht, dass auch dann, wenn $a_1, a_2, a_3, \dots$ beliebige gegen a convergente Zahlen sind, die entsprechenden Punkte $a_1, a_2, a_3, \dots$ stets gegen den entsprechenden Punkt a convergiren; d. h. *die wahre Gerade ist eine stetige Curve.*

§ 38.

Versuchen wir die Annahme, dass es zwei Zahlenwerthe a und b gäbe, die auf der wahren Geraden den nämlichen Punkt P der Ebene darstellen. Der Punkt $\frac{a+b}{2}$ ist die Mitte der Strecke (a, b) ; derselbe müsste daher mit dem Punkte P übereinstimmen. Das Gleiche müsste dann von den Mitten der Strecken $(a, \frac{a+b}{2})$ und $(\frac{a+b}{2}, b)$ d. h. den Punkten $\frac{3a+b}{4}$ und $\frac{a+3b}{4}$ gelten. Indem wir fortgesetzt die Mitten nehmen, erkennen wir, dass sämmtliche Punkte $\frac{A_n a + B_n b}{2^n}$, wo A_n, B_n positive ganze Zahlen

mit der Summe 2^n bedeuten, mit P identisch sein müssten, und hieraus folgt nach § 37, dass überhaupt allen zwischen a und b gelegenen reellen Zahlen der nämliche Punkt P der Geraden entsprechen müsste. Dieser Widerspruch zeigt, dass *die wahre Gerade keinen Doppelpunkt besitzt*. Ebenso erkennen wir, dass *die wahre Gerade nicht in sich selbst zurücklaufen kann*.

§ 39.

Zwei Gerade haben höchstens einen Punkt gemein.

In der That, hätten sie die zwei Punkte A und B gemein und entsprächen diesen Punkten auf der einen Geraden die Zahlenwerthe a, b und auf der andern Geraden die Zahlenwerthe a', b' , so müssten nach § 24 auch die Mitten $\frac{a+b}{2}$ und $\frac{a'+b'}{2}$ mit einander übereinstimmen. Indem wir fortgesetzt wie in § 38 die Mitten nehmen, schliessen wir in ähnlicher Weise, dass sämtliche zwischen a und b bez. a' und b' gelegenen Punkte auf beiden Geraden und mithin diese Geraden selbst mit einander identisch sind.

§ 40.

Unsere wahre Gerade schneidet jeden um einen ihrer Punkte, etwa um den Punkt 0 gelegten Kreis.

In der That, bei der entgegengesetzten Annahme sind nur zwei Fälle möglich: entweder es giebt einen bestimmten Kreis κ um den Punkt 0, der von der wahren Geraden g noch getroffen wird, während die den Kreis κ umschliessenden Kreise um 0 von g nicht mehr getroffen werden; oder es giebt einen bestimmten Kreis κ , der von g nicht getroffen wird, während alle innerhalb κ verlaufenden Kreise um den Punkt 0 von g getroffen werden.

Da die Gerade g ihrer Construction gemäss über jeden ihrer Punkte hinaus stets fortgesetzt werden kann und, wie in § 38 gezeigt worden ist, keinen Doppelpunkt besitzen darf, so müsste es im *ersten* Falle gewiss einen innerhalb κ verlaufenden Kreis um den Punkt 0 geben, den sie auf derselben Seite von 0 an zwei Stellen A, B träfe. Führt man nun eine Drehung um den Punkt 0 aus, durch welche A in B übergeht, so würde dabei unsere Gerade g in eine andere übergehen, welche g ausser in 0 noch in B schneide; dies ist dem in § 39 bewiesenen Satze zufolge unmöglich.

Im *zweiten* Falle bezeichne K einen Punkt des Kreises κ , in dessen beliebige Nähe die wahre Gerade g gelangt. Man schlage dann um K einen wahren Kreis π^* , der kleiner als κ ist und g etwa im Punkte M treffe. Sodann schlage man um M einen Kreis π , der grösser als π^* und kleiner als κ ist. Dieser Kreis π enthält, da er grösser als π^* ist, den

Punkt K im Inneren und da er kleiner als κ ist, so ergibt unsere Annahme in Verbindung mit dem vorhin Bewiesenen, dass die durch M gehende Gerade g stetig innerhalb π verläuft, nach der einen oder anderen Richtung hin verlängert je durch einen Punkt auf π aus dem Kreise π heraustritt und dann nicht mehr in den Kreis π zurückläuft. Da die Gerade g andererseits dem innerhalb π gelegenen Punkte K beliebig nahe kommen soll, so enthält sie nothwendig den Punkt K selbst; hierin liegt ein Widerspruch mit unserer gegenwärtigen Annahme.

Da das System aller Kreise um einen Punkt die ganze Ebene lückenlos bedeckt, so folgt zugleich aus dem Vorigen, dass *irgend zwei Punkte in unserer ebenen Geometrie stets durch eine wahre Gerade verbunden werden können.*

§ 41.

Wir haben nun zu zeigen, dass *die Congruenzaxiome in unserer ebenen Geometrie gültig sind.*

Zu dem Zwecke wählen wir einen bestimmten wahren Kreis κ aus und führen für die Punkte desselben nach § 18 die Parameterdarstellung durch den Winkel ω ein: dann wird, wenn ω die Werthe 0 bis 2π erhält, der wahre Kreis in einem bestimmten Sinne durchlaufen. Aus dieser Einführung folgt für jeden anderen mit κ congruenten Kreis ebenfalls ein bestimmter Umlaufssinn, nämlich derjenige, der sich ergibt, wenn wir den Mittelpunkt des Kreises κ nach § 22 durch zwei hintereinander angewandte Drehungen mit dem Mittelpunkt des vorgelegten Kreises zur Deckung bringen. Da es im Hinblick auf den zu Anfang dieser Abhandlung definirten Begriff der Bewegung nicht möglich ist, den ursprünglichen Kreis κ mit sich selbst im umgekehrten Umlaufssinn zur Deckung zu bringen, so existirt in der That für jeden Kreis ein bestimmter Umlaufssinn.

Jetzt nehmen wir zwei von einem Punkte M ausgehende Halbgeraden, die nicht beide zusammen eine wahre Gerade ausmachen, schlagen um M einen zu κ congruenten Kreis und fixiren dasjenige von den Halbgeraden ausgeschnittene Stück dieses Kreises, welches einem unterhalb der Zahl π liegenden Parameterintervall entspricht. Der festgesetzte Umlaufssinn führt dann innerhalb des fixirten Kreisbogenstückes von einer der beiden Halbgeraden zu der anderen Halbgeraden: wir bezeichnen die erstere Halbgerade als den rechten, die letztere Halbgerade als den linken Schenkel des Winkels zwischen beiden Halbgeraden, während das Parameterintervall ($< \pi$) selbst das Mass für diesen Winkel abgibt. Aus unserem Begriffe der Bewegung folgt dann der erste Congruenzsatz für zwei Dreiecke in folgender Gestalt:

Wenn für zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ die Congruenzen

$$AB \equiv A'B', AC \equiv A'C' \not\equiv BAC \equiv \not\equiv B'A'C'$$

gelten, wenn ferner AB bez. $A'B'$ die rechten, AC bez. $A'C'$ die linken Schenkel der Winkel BAC bez. $B'A'C'$ sind, so gelten stets auch die Congruenzen

$$\not\equiv ABC \equiv \not\equiv A'B'C' \quad \text{und} \quad \not\equiv ACB \equiv \not\equiv A'C'B', \\ BC \equiv B'C'.$$

§ 42.

Nachdem in § 30—§ 40 die wahre Gerade definirt und ihre Eigenschaften abgeleitet worden sind, haben wir zwei Fälle zu unterscheiden:

Erstens nehmen wir an, dass es durch einen Punkt nur *eine* Gerade giebt, die eine gegebene Gerade nicht schneidet (Parallelenaxiom). Für unsere Ebene gelten dann die sämtlichen Axiome, die ich in meiner Abhandlung über die Grundlagen der Geometrie aufgestellt habe, nur dass das Congruenzaxiom IV, 6 dort in der vorhin in § 41 aufgestellten engeren Fassung zu nehmen ist. Auch bei dieser engeren Fassung des letzten Congruenzaxioms folgt mit Nothwendigkeit die Euklidische ebene Geometrie*).

Zweitens nehmen wir an, dass es durch jeden Punkt A zwei Halbgeraden giebt, die nicht zusammen ein und dieselbe Gerade ausmachen, und die eine gegebene Gerade nicht schneiden, während jede in dem durch sie gebildeten Winkelraum gelegene von A ausgehende Halbgerade die gegebene Gerade schneidet.

Mit Hilfe der Stetigkeit folgt dann leicht, dass auch umgekehrt zu irgend zwei von einem Punkte A ausgehenden Halbgeraden, die nicht zusammen ein und dieselbe Gerade ausmachen, stets eine bestimmte Gerade g gehört, die jene beiden Halbgeraden nicht schneidet, dagegen von jeder anderen Halbgeraden getroffen wird, die von A ausgeht und in dem Winkelraum zwischen den beiden gegebenen Halbgeraden verläuft. Unter diesen Umständen folgt dann die Bolyai-Lobatschewsky'sche ebene Geometrie, auch wenn wir das Congruenzaxiom IV, 6 in der vorhin aufgestellten engeren Fassung zu Grunde legen**).

Zum Schlusse möchte ich auf den charakteristischen Unterschied hinweisen, der uns entgegentritt, wenn wir die vorstehende Begründung der

*) Vgl. dazu meine demnächst in den Proceedings of the London mathematical society erscheinende Abhandlung „Ueber den Satz von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreiecke“.

**) Vgl. meine Begründung der Bolyai-Lobatschewsky'schen Geometrie, die ich demnächst in diesen Annalen zu veröffentlichen gedenke.

Geometrie mit derjenigen vergleichen, die ich in meiner Festschrift „Grundlagen der Geometrie“*) zu geben versucht habe. In dieser Festschrift ist eine solche Anordnung der Axiome befolgt worden, wobei die Stetigkeit hinter allen übrigen Axiomen an *letzter* Stelle gefordert wird, so dass dann naturgemäss die Frage in den Vordergrund tritt, inwie weit die bekannten Sätze und Schlussweisen der elementaren Geometrie von der Forderung der Stetigkeit unabhängig sind. In der vorstehenden Untersuchung dagegen wird die Stetigkeit vor allen übrigen Axiomen an *erster* Stelle durch die Definitionen der Ebene und der Bewegung gefordert, so dass hier vielmehr die wichtigste Aufgabe darin bestand, das geringste Mass von Forderungen zu ermitteln, um aus demselben unter weitester Benutzung der Stetigkeit die elementaren Gebilde der Geometrie (Kreis und Gerade) und ihre zum Aufbau der Geometrie nothwendigen Eigenschaften gewinnen zu können. In der That hat die vorstehende Untersuchung gezeigt, dass hierzu die in den obigen Axiomen I—III ausgesprochenen Forderungen hinreichend sind.

Göttingen, den 10. Mai 1902.

*) Leipzig 1899. Vergleiche auch die mit Zusätzen versehenen Uebersetzungen ins Französische (Annales de l'école Normale 1900) und Englische (Chicago 1902).