22.

Note sur la convergence de la série de Taylor.

(Par Mr. P. Tchebicheff à Moscou.)

D'après la règle de Mr. *Cauchy* la série

$$fa + \frac{z}{1} f'a + \frac{z^2}{1.2} f''a + \frac{z^3}{1.2.3} f'''a + \dots + \frac{z^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)} f^{(n-1)}a + \frac{z^n}{1.2.3\dots(n-1)n} f^{(n)}a + \dots$$

sera convergente toutes les fois que

$$\lim. \left[\text{mod.} \frac{z^n}{1.2.3\dots n} f^{(n)}a \right]_{n=\infty}^{\frac{1}{n}} < 1,$$

ou, ce qui est le même,

$$1. \quad \lim. \left[(\text{mod. } z)^n \cdot \text{mod.} \frac{f^{(n)}a}{1.2.3\dots n} \right]_{n=\infty}^{\frac{1}{n}} < 1,$$

et divergente, si

$$2. \quad \lim. \left[\text{mod.} \frac{z^n}{1.2.3\dots n} f^{(n)}a \right]_{n=\infty}^{\frac{1}{n}} > 1.$$

Mais on a

$$fa = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(a + Re^{p\sqrt{-1}}) dp,$$

lorsque la fonction $f(a + re^{p\sqrt{-1}})$ est finie et continue, quel que soit p , pour $r = R$ ou pour une valeur quelconque de r plus petite que R^*), et de même

$$3. \quad f'a = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f'(a + Re^{p\sqrt{-1}}) dp,$$

$$4. \quad f''a = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f''(a + Re^{p\sqrt{-1}}) dp,$$

.

$$5. \quad f^{(n-1)}a = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f^{(n-1)}(a + Re^{p\sqrt{-1}}) dp,$$

$$6. \quad f^{(n)}a = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f^{(n)}(a + Re^{p\sqrt{-1}}) dp,$$

.

*) *Cauchy*, Exercices d'Analyse et de Physique Mathématique tome I. page 356.

si $f'(a + Re^{p\sqrt{-1}})$, $f''(a + Re^{p\sqrt{-1}})$, ..., $f^{(n-1)}(a + Re^{p\sqrt{-1}})$, $f^{(n)}(a + Re^{p\sqrt{-1}})$ sont aussi finies et continues, quel que soit p , pour toutes les valeurs r qui ne surpassent pas R .

Or l'intégration par parties donne

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{+\pi} f'(a + Re^{p\sqrt{-1}}) dp &= \frac{1}{R} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-p\sqrt{-1}} f(a + Re^{p\sqrt{-1}}) dp, \\ \int_{-\pi}^{+\pi} f''(a + Re^{p\sqrt{-1}}) dp &= \frac{1.2}{R^2} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-2p\sqrt{-1}} f(a + Re^{p\sqrt{-1}}) dp, \\ &\dots \dots \dots \\ \int_{-\pi}^{+\pi} f^{(n-1)}(a + Re^{p\sqrt{-1}}) dp &= \frac{1.2.3\dots(n-1)}{R^{n-1}} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-(n-1)p\sqrt{-1}} f(a + Re^{p\sqrt{-1}}) dp, \\ \int_{-\pi}^{+\pi} f^{(n)}(a + Re^{p\sqrt{-1}}) dp &= \frac{1.2.3\dots(n-1)n}{R^n} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-np\sqrt{-1}} f(a + Re^{p\sqrt{-1}}) dp, \\ &\dots \dots \dots\end{aligned}$$

ce qui change les équations (3, 4, 5 et 6) en celles-ci

$$\begin{aligned}7. \quad f'a &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{R} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-p\sqrt{-1}} f(a + Re^{p\sqrt{-1}}) dp, \\ 8. \quad f''a &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1.2}{R^2} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-2p\sqrt{-1}} f(a + Re^{p\sqrt{-1}}) dp, \\ &\dots \dots \dots \\ 9. \quad f^{(n-1)}a &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1.2.3\dots(n-1)}{R^{n-1}} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-(n-1)p\sqrt{-1}} f(a + Re^{p\sqrt{-1}}) dp, \\ 10. \quad f^{(n)}a &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1.2.3\dots(n-1)n}{R^n} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-np\sqrt{-1}} f(a + Re^{p\sqrt{-1}}) dp, \\ &\dots \dots \dots\end{aligned}$$

Désignant par λ la plus grande valeur du module de l'expression $f(a + Re^{p\sqrt{-1}})$ pour toutes les valeurs de p , nous trouverons que les modules $\text{mod.}[e^{-p\sqrt{-1}} f(a + Re^{p\sqrt{-1}})]$, $\text{mod.}[e^{-2p\sqrt{-1}} f(a + Re^{p\sqrt{-1}})]$, ..., $\text{mod.}[e^{-(n-1)p\sqrt{-1}} f(a + Re^{p\sqrt{-1}})]$, $\text{mod.}[e^{-np\sqrt{-1}} f(a + Re^{p\sqrt{-1}})]$ ne surpassent pas λ ; car les modules des expressions $e^{-p\sqrt{-1}}$, $e^{-2p\sqrt{-1}}$, ..., $e^{-(n-1)p\sqrt{-1}}$, $e^{-np\sqrt{-1}}$ sont égaux à l'unité.

Cela étant, on conclut des équations (7, 8, 9 et 10)

$$\begin{aligned}\text{mod.} \frac{f'a}{2} &< \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{R} \cdot \lambda \int_{-\pi}^{+\pi} dp < \frac{\lambda}{R}; \\ \text{mod.} \frac{f''a}{1.2} &< \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \lambda \int_{-\pi}^{+\pi} dp < \frac{\lambda}{R^2}; \\ &\dots \dots \dots\end{aligned}$$

$$\text{mod. } \frac{f^{(n-1)}a}{1.2.3\dots(n-1)} < \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{R^{(n-1)}} \cdot \lambda \int_{-\pi}^{+\pi} dp < \frac{\lambda}{R^{(n-1)}};$$

$$\text{mod. } \frac{f^{(n)}a}{1.2.3\dots(n-1)n} < \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{R^n} \cdot \lambda \int_{-\pi}^{+\pi} dp < \frac{\lambda}{R^n}.$$

D'après cela la condition (1.) de la convergence de la série

$$fa + \frac{z}{1}f'a + \frac{z^2}{1.2}f''a + \frac{z^3}{1.2.3}f'''a + \dots + \frac{z^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)}f^{(n-1)}a \\ + \frac{z^n}{1.2.3\dots(n-1)n}f^{(n)}a + \dots$$

se réduit à celle-ci :

$$\lim. \left[\frac{(\text{mod. } z)^n \lambda}{R^n} \right]_{n=\infty}^{\frac{1}{n}} < 1;$$

ou simplement à

$$\text{mod. } z < R,$$

la limite de $\lambda^{\frac{1}{n}}$ pour $n = \infty$ étant l'unité. Donc la série de *Taylor*

$$11. \quad fa + \frac{z}{1}f'a + \frac{z^2}{1.2}f''a + \frac{z^3}{1.2.3}f'''a + \dots + \frac{z^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)}f^{(n-1)}a \\ + \frac{z^n}{1.2.3\dots(n-1)n}f^{(n)}a + \dots$$

sera convergente si le module de z est plus petit que R , où, comme nous l'avons dit, les expressions

$f(a + re^{p\sqrt{-1}}), f'(a + re^{p\sqrt{-1}}), \dots, f^{(n-1)}(a + re^{p\sqrt{-1}}), f^{(n)}(a + re^{p\sqrt{-1}}), \dots$ restent finies et continues, quel que soit p , pour $r = R$ ou pour une valeur quelconque de $r < R$. En d'autres termes: La série de *Taylor*

$$fa + \frac{z}{1}f'a + \frac{z^2}{1.2}f''a + \frac{z^3}{1.2.3}f'''a + \dots + \frac{z^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)}f^{(n-1)}a \\ + \frac{z^n}{1.2.3\dots(n-1)n}f^{(n)}a + \dots$$

sera convergente si le module de z est au dessous du module de la valeur imaginaire de x qui rend infinie ou discontinue au moins une des fonctions

$$f(a+x), f'(a+x), f''(a+x), \dots, f^{(n-1)}(a+x), f^{(n)}(a+x), \dots$$

Mais ces conditions toutes, sont-elles nécessaires pour la convergence de la série de *Taylor*? C'est-à-dire: la série de *Taylor* (11.) est-elle toujours divergente pour une valeur de z , dont le module est plus grand que celui de la valeur de x qui rend au moins une des fonctions

$f(a+x), f'(a+x), f''(a+x), \dots, f^{(n-1)}(a+x), f^{(n)}(a+x), \dots$ infinie ou discontinue? Voilà ce que nous allons examiner.

Si la fonction $f^{(m)}(a+x)$, par exemple, devient infinie ou discontinue pour $x=X$, au moins une des séries

$$\begin{aligned} f^{(m)}(a+X) &= f^{(m)} a + \frac{X}{1} f^{(m+1)} a + \frac{X^2}{1.2} f^{(m+2)} a + \dots \\ &\dots + \frac{X^{n-m-1}}{1.2.3\dots(n-m-1)} f^{(n-1)} a + \frac{X^{n-m}}{1.2.3\dots(n-m-1)(n-m)} f^{(n)} a + \dots, \\ f^{(m+1)}(a+X) &= f^{(m+1)} a + \frac{X}{1} f^{(m+2)} a + \frac{X^2}{1.2} f^{(m+3)} a + \dots \\ &\dots + \frac{X^{n-m-2}}{1.2.3\dots(n-m-2)} f^{(n-1)} a + \frac{X^{n-m-1}}{1.2.3\dots(n-m-2)(n-m-1)} f^{(n)} a + \dots \end{aligned}$$

sera divergente, ce qui ne peut avoir lieu qu'en supposant

$$\lim. \left[\text{mod.} \frac{X^{n-m}}{1.2.3\dots(n-m-1)(n-m)} f^{(n)} a \right]_{n=\infty}^{\frac{1}{n}} < 1; \lim. \left[\text{mod.} \frac{X^{n-m-1}}{1.2.3\dots(n-m-2)(n-m-1)} f^{(n)} a \right]_{n=\infty}^{\frac{1}{n}} < 1.$$

Mais ces conditions peuvent être exprimées par

$$12. \begin{cases} \lim. \left[\text{mod.} \frac{z^n}{1.2.3\dots(n-1)n} f^{(n)} a \right]_{n=\infty}^{\frac{1}{n}} < \lim. \left[\frac{(\text{mod. } z)^n}{(\text{mod. } X)^{n-m-1}} \cdot \frac{1}{(n-m+1)(n-m+2)\dots(n-1)n} \right]_{n=\infty}^{\frac{1}{n}}; \\ \lim. \left[\text{mod.} \frac{z^n}{1.2.3\dots(n-1)n} f^{(n)} a \right]_{n=\infty}^{\frac{1}{n}} < \lim. \left[\frac{(\text{mod. } z)^n}{(\text{mod. } X)^{n-m-1}} \cdot \frac{1}{(n-m)(n-m+1)\dots(n-1)n} \right]_{n=\infty}^{\frac{1}{n}}. \end{cases}$$

Or

$$\begin{aligned} \lim. \left[\frac{(\text{mod. } z)^n}{(\text{mod. } X)^{n-m}} \cdot \frac{1}{(n-m+1)(n-m+2)\dots(n-1)n} \right]_{n=\infty}^{\frac{1}{n}} &> \lim. \left[\left(\frac{\text{mod. } z}{\text{mod. } X} \right)^n \left(\frac{\text{mod. } X}{n} \right)^m \right]_{n=\infty}^{\frac{1}{n}}; \\ \lim. \left[\frac{(\text{mod. } z)^n}{(\text{mod. } X)^{n-m}} \cdot \frac{1}{(n-m)(n-m+1)\dots(n-1)n} \right]_{n=\infty}^{\frac{1}{n}} &> \lim. \left[\left(\frac{\text{mod. } z}{\text{mod. } X} \right)^n \left(\frac{\text{mod. } X}{n} \right)^{m+1} \right]_{n=\infty}^{\frac{1}{n}}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \lim. \left[\left(\frac{\text{mod. } z}{\text{mod. } X} \right)^n \cdot \left(\frac{\text{mod. } X}{n} \right)^m \right]_{n=\infty}^{\frac{1}{n}} &= \frac{\text{mod. } z}{\text{mod. } X} \cdot \lim. \left[\frac{\text{mod. } X}{n} \right]_{n=\infty}^{\frac{m}{n}} = \frac{\text{mod. } z}{\text{mod. } X}; \\ \lim. \left[\left(\frac{\text{mod. } z}{\text{mod. } X} \right)^n \cdot \left(\frac{\text{mod. } X}{n} \right)^{m+1} \right]_{n=\infty}^{\frac{1}{n}} &= \frac{\text{mod. } z}{\text{mod. } X} \cdot \lim. \left[\frac{\text{mod. } X}{n} \right]_{n=\infty}^{\frac{m+1}{n}} = \frac{\text{mod. } z}{\text{mod. } X}; \end{aligned}$$

donc les inégalités donneront

$$\lim. \left[\text{mod.} \frac{z^n}{1.2.3\dots(n-1)n} f^{(n)} a \right]_{n=\infty}^{\frac{1}{n}} > \frac{\text{mod. } z}{\text{mod. } X}.$$

En comparant cette inégalité avec la condition (2.) de la convergence de la série

$$\begin{aligned} fa + \frac{z}{1} f' a + \frac{z^2}{1.2} f'' a + \frac{z^3}{1.2.3} f''' a + \dots + \frac{z^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)} f^{(n-1)} a \\ + \frac{z^n}{1.2.3\dots(n-1)n} f^{(n)} a + \dots \end{aligned}$$

on voit que la série sera toujours divergente, si le module de z est plus grand que celui de la valeur de x qui rendrait infinie ou discontinue au moins une des fonctions

$f(a+x), f'(a+x), f''(a+x), \dots f^{(n-1)}(a+x), f^{(n)}(a+x), \dots$
 Nous voilà donc parvenus à ce théorème général:

„La série de Taylor:

$$fa + \frac{z}{1} f'a + \frac{z^2}{1.2} f''a + \frac{z^3}{1.2.3} f'''a + \dots + \frac{z^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)} f^{(n-1)}a \\ + \frac{z^n}{1.2.3\dots(n-1)n} f^{(n)} + \dots$$

est divergente ou convergente suivant que le module de z est plus grand ou plus petit que celui de la valeur imaginaire x qui rendrait infinie ou discontinue au moins une des fonctions

$f(a+x), f'(a+x), f''(a+x), \dots f^{(n-1)}(a+x), f^{(n)}(a+x), \dots$ ”

C'est ainsi, par exemple, que la série

$(1+z^2)^{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2}z^2 + \frac{3}{8}z^4 - \frac{3}{8}(1-\frac{5}{8})z^6 + \frac{3}{8}(1-\frac{5}{8})(1-\frac{5}{8})z^8 - \frac{3}{8}(1-\frac{5}{8})(1-\frac{5}{8})(1-\frac{5}{8})z^{10} \dots$
 est convergente ou divergente suivant que le module de la valeur de z est plus petit ou plus grand que l'unité qui est le module de la valeur $x = \sqrt{-1}$ pour laquelle la seconde dérivée et les suivantes de $(1+z^2)^{\frac{3}{2}}$ deviennent infinies.

Ce théorème n'est qu'une très simple conclusion des découvertes remarquables de Mr. *Cauchy*; mais il est en partie contraire à la règle de la convergence des séries donnée par cet illustre Géomètre, dont l'énoncé est le suivant:

„ x designant une variable réelle ou imaginaire, une fonction réelle ou imaginaire de x sera développable en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de x , tant que le module de x conserve une valeur inférieure à la plus petite de celles pour lesquelles la fonction ou sa dérivée cesse d'être finie et continue.” *)

L'insuffisance de cette règle provient, ce me semble, de ce que Mr. *Cauchy* suppose la valeur de l'intégrale définie être développable en série convergente, lorsque la différentielle entre les limites de l'intégration peut être développée en série convergente; ce qui n'a lieu que dans des cas particuliers.

*) *Cauchy*, Exercices d'Analyse et de Physique Mathématique. Tome I. pag. 29.