**Sur les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une
fonction $F(x)$ puisse être mise sous la forme $\int_0^x f(x) dx$
où $f(x)$ est de carré intégrable.**

Par

Kyrille Popoff à Sofia.

Théorème. Pour qu'une fonction $F(x)$, continue dans l'intervalle $(0, 1)$ puisse être mise sous la forme

$$F(x) = \int_0^x f(x) dx$$

où $f(x)$ est une fonction de carré intégrable, il faut et il suffit que la série

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 \left[\int_0^1 F(x) \sin \left(n - \frac{1}{2}\right) \pi x dx \right]^2$$

soit convergente.

Pour démontrer ce théorème nous mettrons $\int_0^x f(x) dx$ sous la forme

$$\int_0^1 K(x, s) f(s) ds$$

où le noyau $K(x, y)$ est $= 1$ pour $x \geq y$ et $= 0$ pour $x < y$. On obtient ainsi l'équation intégrale

$$(2) \quad F(x) = \int_0^1 K(x, s) f(s) ds.$$

Pour que cette équation ait une solution $f(x)$ de carré intégrable il faut et il suffit, d'après un théorème bien connu de M. E. Picard¹⁾, que la série

¹⁾ Ce théorème n'est qu'une interprétation habile du beau théorème de M. M. Fischer et Riesz. Voir E. Fischer, *Comptes rendus* 144 (1907). — F. Riesz, *Göttinger Nachrichten* 1907; *Comptes rendus* 144 (1907). — E. Picard, *Comptes rendus* 148 (1909); *Rendiconti di Palermo* 29 (1910).

$$\sum \lambda_n^2 F_n^2$$

converge. Ici λ_n^2 sont les constantes caractéristiques du noyau symétrique

$$\overline{K(x, y)} = \int_0^1 K(x, s) K(y, s) ds = \text{Min}(x, y)$$

de M. Erhard Schmidt et F_n les coefficients à la Fourier de $F(x)$ par rapport aux fonctions fondamentales $\varphi_n(x)$ du même noyau $\overline{K(x, y)}$. On suppose ici que les fonctions $\varphi_n(x)$ forment un système complet.

Or

$$\overline{K(x, y)} = \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n - \frac{1}{2}) \pi x \sin(n - \frac{1}{2}) \pi y}{(n - \frac{1}{2})^2}$$

et par conséquent

$$\lambda_n^2 = \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2, \quad \varphi_n(x) = \sqrt{2} \sin\left(n - \frac{1}{2}\right) \pi x,$$

ce qui prouve notre théorème, pourvu que les fonctions

$$\varphi_n(x) = \sqrt{2} \sin\left(n - \frac{1}{2}\right) \pi x$$

forment un système complet dans l'intervalle $(0, 1)$.

Pour s'en assurer, il suffit, d'après un théorème de M. Stekloff³⁾, d'établir qu'on a

$$\int_0^1 P(x)^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \left[\int_0^1 P(x) \sin\left(n - \frac{1}{2}\right) \pi x dx \right]^2$$

pour tout polynome $P(x)$.

Cette dernière équation peut être mise sous la forme

$$\frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} P\left(\frac{2x}{\pi}\right)^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} P\left(\frac{2x}{\pi}\right) \sin(2n - 1)x dx \right]^2.$$

Or M. de la Vallée Poussin a démontré⁴⁾ qu'on a

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x)^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x) \sin nx dx \right]^2$$

²⁾ Adolf Kneser, Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik, Braunschweig (1911), S. 18.

³⁾ W. Stekloff, Mémoires de l'Académie des Sciences de St. Pétersbourg **30** Nr. 4 (1911); **15** Nr. 7 (1903).

⁴⁾ Ch. J. de la Vallée Poussin. Annales de la Société scientifique de Bruxelles **17** (1893). Voir aussi W. Stekloff, les travaux cités. — A. Hurwitz, Annales de l'Ecole Normale **19** (1902); Math. Ann. **57** (1903). — E. Fischer, Monatshefte für Mathematik und Physik **15** (1904).

quelle que soit la fonction intégrable et de carré intégrable $\varphi(x)$. En supposant qu'on ait

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \varphi\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

$\varphi(x)$ étant une fonction arbitraire intégrable et de carré intégrable dans l'intervalle $(0, \frac{\pi}{2})$, la dernière identité prend la forme

$$\frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x)^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x) \sin(2n-1)x dx \right]^2,$$

ce qui montre que les fonctions $\sin(2n-1)x$ forment un système complet dans l'intervalle $(0, 1)$.

On peut aussi arriver à ce résultat sans recourir aux théorèmes de M. Stekloff et de M. de la Vallée Poussin. Pour le faire voir, nous formerons encore le noyau symétrique de M. Schmidt

$$\begin{aligned} \underline{K(x, y)} &= \int_0^1 K(s, x) K(s, y) ds = \text{Min}(1-x, 1-y) \\ &= \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n-\frac{1}{2})\pi x \cos(n-\frac{1}{2})\pi y}{(n-\frac{1}{2})^2} \end{aligned}$$

dont les fonctions fondamentales sont

$$\psi_n(x) = \sqrt{2} \cos\left(n - \frac{1}{2}\right) \pi x.$$

Les fonctions $\varphi_n(x)$ et $\psi_n(x)$ forment pour le noyau $K(x, y)$ un couple de fonctions fondamentales de M. Schmidt⁵⁾. Ce noyau, étant borné et n'admettant que la ligne $x = y$ comme ligne de discontinuité, est complètement défini par les fonctions $\varphi_n(x)$, $\psi_n(x)$ et les constantes correspondantes λ_n . Par conséquent chaque fonction $\chi(x)$, orthogonale à toutes les $\varphi_n(x)$, rendra l'intégrale

$$\int_0^1 K(s, x) \chi(s) ds$$

nulle⁶⁾. Cette intégrale pourtant peut s'écrire sous la forme

$$\int_x^1 \chi(x) dx$$

quel que soit x dans l'intervalle $(0, 1)$, d'où il s'ensuit que la fonction

⁵⁾ E. Schmidt, *Math. Ann.* 63 (1907).

⁶⁾ E. Goursat, *Cours d'Analyse* 3 (1915); p. 478; *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* (2) 10 (1908).

$\chi(x)$ est nulle partout dans l'intervalle $(0, 1)$ où elle est continue, ce qui montre que les fonctions $\varphi_n(x)$ forment un système complet.

L'existence d'une fonction $f(x)$ étant ainsi démontrée dans les conditions énoncées dans le théorème, cherchons l'expression de cette fonction.

Nous poserons pour cela

$$f_n(x) = \lambda_1 F_1 \psi_1(x) + \lambda_2 F_2 \psi_2(x) + \dots + \lambda_n F_n \psi_n(x).$$

La série $\sum \lambda_i^2 F_i^2$ étant convergente, la suite des fonctions $f_n(x)$ converge *en moyenne* vers une limite $f(x)$. On a en effet, d'après les relations d'orthogonalité des fonctions $\psi_i(x)$,

$$\int_0^1 [f_{n+p}(x) - f_n(x)]^2 dx = \lambda_{n+1}^2 F_{n+1}^2 + \dots + \lambda_{n+p}^2 F_{n+p}^2,$$

et cette expression tend vers zéro, quel que soit p , lorsque n croît indéfiniment.

D'après le théorème de M. Fischer et M. Riesz, les coefficients à la Fourier de la fonction limite $f(x)$ par rapport aux fonctions $\psi_n(x)$ sont $\lambda_n F_n$. D'autre part, la série $\sum \lambda_i^2 F_i^2$ étant convergente, on peut intégrer⁸⁾ la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n F_n \psi_n(x)$$

qui représente la fonction $f(x)$. Les fonctions $F(x)$ et $\int_0^1 K(s, x) f(s) ds$ étant continues et ayant les mêmes coefficients à la Fourier relativement au système orthogonal de fonctions continues $\varphi_n(x)$, leur différence sera nulle et la fonction $f(x)$ ainsi définie donnera la solution de l'équation

$$F(x) = \int_0^1 f(x) dx.$$

Remarque. Si $F(x)$ est une fonction discontinue, elle ne peut différer de $\int_0^1 K(x, s) f(s) ds$ que dans les points d'un ensemble de mesure nulle.

⁷⁾ On a $\int_0^1 \sin\left(n - \frac{1}{2}\right) \pi x w(x) dx = \pm \int_0^1 \cos\left(n - \frac{1}{2}\right) \pi x w(1-x) dx$, quel que soit $w(x)$.

⁸⁾ Ch. J. de la Vallée Poussin, loc. cit.