Beweis eines Satzes über zwei cubische Raumcurven, welche dasselbe Tetraeder in gleicher Weise zum Schmiegungstetraeder haben.

Von **Gustav Kohn** in Wien.

Cubische Raumcurven, welche zwei Punkte A_1 und A_2 und zugleich deren Tangenten und Schmiegungebenen gemein haben, bilden ein Analogon zu Kegelschnitten in doppelter Berührung. Zu dieser schon mehrfach hervorgehobenen Analogie liefert der folgende Satz einen Beitrag.

„Die Verbindungsebenen der Tripel entsprechender Punkte von drei projectiven Punktreihen auf einer cubischen Raumcurve R_3 , in welchen die zwei Punkte A_1 und A_2 sich selbst entsprechen, umhüllen eine zweite cubische Raumcurve R'_3 , welche mit der ersten die Punkte A_1 und A_2 und in ihnen Tangenten und Schmiegungebenen gemein hat; umgekehrt schneiden die Schmiegungebenen jeder solchen cubischen Raumcurve auf R_3 Tripel entsprechender Punkte von drei projectiven Reihen aus, in denen die Punkte A_1 und A_2 sich selbst zugeordnet erscheinen.“

In den folgenden Zeilen soll ein synthetischer Beweis dieses Satzes erbracht werden und zwar auf Grund der Theorie der Correlationen.

Für eine beliebige Correlation des Raumes erfüllen bekanntlich die Punkte, welche auf ihren entsprechenden Ebenen liegen, eine Fläche zweiter Ordnung F_2 (die Punktkernfläche) und diese Ebenen, d. h. die Ebenen, welche durch ihre entsprechenden Punkte gehen, umhüllen eine zweite solche Fläche Φ_2 (die Ebenenkernfläche). Die beiden Flächen F_2 und Φ_2 durchdringen sich in den Kanten eines windschiefen Vierkants, der Hauptvierkants der Correlation, dessen Kanten sich als die Geraden charakterisieren lassen, welche sich in der Correlation selbst entsprechen. Die Annahme des Hauptvierkants für eine Correlation ist äquivalent mit der Annahme, dass jedem der vier Eckpunkte des Vierkants die Verbindungsebene der in ihm zusammenstoßenden Kanten als entsprechend zugeordnet ist. Die Correlation ist also durch Annahme

ihres Hauptvierkants noch nicht bestimmt und es kann zu ihrer Bestimmung noch einem beliebigen Punkte des Raumes die entsprechende Ebene willkürlich zugewiesen werden.

Es sei jetzt ein beliebiges windschiefes Vierkant vorgelegt und t_1, t_2 seien zwei seiner Gegenkanten, s_1, s_2 die beiden anderen. Der Schnittpunkt der Kanten s_1 und t_1 heiße A_1 , ihre Verbindungsebene α_1 , der Schnittpunkt von s_2 und t_2 sei mit A_2 , die Verbindungsebene mit α_2 bezeichnet. Die cubischen Raumcurven, welche durch die beiden Punkte A_1 und A_2 hindurchgehen und in ihnen beziehungsweise die Geraden t_1 und t_2 zu Tangenten, die Ebenen α_1 und α_2 zu Schmiegungebenen haben, bilden ein Bündel von cubischen Raumcurven, welche dasselbe Tetraeder, nämlich das Tetraeder des Vierkants, in derselben Weise zum Schmiegungetetraeder haben. Von den Curven dieses Bündels geht bekanntlich durch einen beliebigen Punkt des Raumes eine und eine beliebige Ebene ist Schmiegungeebene für eine unter diesen Curven. Man erkennt sofort, dass jede Correlation des Raumes, welche das Vierkant $t_1 s_1 t_2 s_2$ zum Hauptvierkant hat, die Curven unseres Bündels lediglich unter einander vertauscht.

Um alle Vorbedingungen für unseren Beweis vor Augen zu haben, beachten wir endlich noch, dass die Fläche zweiter Ordnung, welche eine beliebige Curve R_3 unseres Bündels mit ihren Tangenten t_1 und t_2 verbindet, auch die Strahlen s_1 und s_2 enthalten wird. In der That enthält diese Fläche jede Transversale, welche durch einen beliebigen Punkt P der Curve R_3 hindurchgeht und die beiden Geraden t_1, t_2 trifft und diese Transversale geht in die Gerade s_1 resp. s_2 über, sobald der Punkt P in den Punkt A_1 resp. A_2 hineinrückt. Denn die Gerade s_1 (bez. s_2) liegt unseren Voraussetzungen gemäß, in der Verbindungsebene des zu P_1 (bez. P_2) unendlich nahen Curvenpunktes mit seiner Tangente t_1 (bez. t_2) d. h. in der Schmiegungeebene von P_1 (bez. P_2) und trifft außerdem die Gerade t_2 (bez. t_1). Wir können jetzt sagen, dass die Fläche zweiter Ordnung, welche den Kantenzug $t_1 s_1 t_2 s_2$ mit einem beliebigen Punkte der Curve R_3 verbindet, die ganze Curve enthält.

Wir bestimmen nun eine correlative Beziehung zweier Räume, für welche das Vierkant $t_1 s_1 t_2 s_2$ das Hauptvierkant darstellt, indem wir im ersten Raume einen Punkt P beliebig annehmen und ihm eine durch ihn hindurchgehende, sonst beliebige Ebene π' als entsprechend zuweisen. Der Punkt P wird dann auf der Punktkernfläche der Correlation liegen, welche deshalb bestimmt erscheint, als die Fläche zweiter Ordnung F_2 , die diesen Punkt mit dem Kantenzuge $t_1 s_1 t_2 s_2$ verbindet. Die cubische Raumcurve R_3 unseres Bündels, welche durch den Punkt P geht, wird ganz auf dieser Fläche F_2 liegen und deswegen wird jedem Punkte dieser Curve in der Correlation eine Ebene entsprechen, welche durch ihn hindurchgeht. Die den Punkten der Curve R_3 unseres Bündels entsprechenden Ebenen werden eine zweite cubische Raum-

curve R'_3 dieses Bündels einhüllen, nämlich jene, welche die dem Punkte P entsprechende Ebene π' zur Schmiegungeebene hat.

Nun lassen sich R_3 und R'_3 als zwei ganz beliebige Curven unseres Bündels ansehen. Denn man kann den Punkt P unserer Betrachtung beliebig auf der Curve R_3 wählen und hat ihm dann irgend eine der drei Schmiegungeebenen als entsprechende Ebene π' zuzuweisen, die er an die Curve R'_3 schickt. Es gibt infolge dessen drei Correlationen, welche die Punkte von R_3 auf die Schmiegungeebenen von R'_3 so abbilden, dass jeder Punkt in der ihm entsprechenden Ebene liegt. Die Reihe der Punkte der Curve R_3 erscheint so in dreifacher Weise auf die Reihe der Schmiegungeebenen von R'_3 bezogen, dass in diesen drei projectiven Beziehungen einem beliebigen Punkte von R_3 die drei durch ihn gehenden Schmiegungeebenen von R'_3 einer beliebigen Schmiegungeebene von R'_3 die drei in ihr liegenden Punkte von R_3 entsprechen, und für jeden der beiden Punkte A_1 und A_2 , in welchen die beiden Curven R_2 und R'_3 gemeinsame Schmiegungeebenen haben, wird offenbar die entsprechende Ebene mit der zugehörigen Schmiegungeebene zusammenfallen.

Jetzt ist also einerseits deutlich, dass die drei Schnittpunkte einer veränderlichen Schmiegungeebene von R'_3 mit der Curve R_3 auf dieser Curve drei zur Reihe der Schmiegungeebenen von R'_3 also auch zu einander projectiver Punktreihen durchlaufen und dass in diesen drei projectiven Punktreihen auf der Curve R_3 jeder der beiden Punkte A_1 und A_2 sich selbst entspricht. Es ist aber auch anderseits zu sehen, dass für irgend welche drei projective Punktreihen auf der Curve R_3 , in denen jeder der beiden Punkte A_1, A_2 sich selbst entspricht, die Verbindungsebenen der Tripel entsprechender Punkte eine cubische Raumcurve umhüllen werden, welche mit R_3 die Punkte A_1 und A_2 und die ihnen Schmiegungeebenen und Tangenten gemein hat. Denn, wenn neben den beiden sich selbst entsprechenden Punkten A_1 und A_2 noch ein Tripel entsprechender Punkte gegeben wird, so sind die drei projectiven Punktreihen auf R_3 bestimmt. Die Ebene dieser drei Punkte wird nun von einer cubischen Raumcurve R'_3 osculiert, welche die Punkte A_1 und A_2 nebst ihren Schmiegungeebenen und Tangenten mit R_3 gemein hat und die Schmiegungeebenen von R'_3 schneiden auf R_3 die Tripel entsprechender Punkte aus.