V. *Ueber ein aus der Hamilton'schen Theorie der Bewegung hervorgehendes mechanisches Princip;*
von J. J. Müller,

Professor am Polytechnikum in Zürich.

Wenn ein System materieller Punkte sich unter dem Einfluß von Kräften bewegt, welche aus der gegenseitigen Anziehung und Abstofsung der Punkte hervorgehen, so können sämtliche Integralgleichungen der Bewegung, wie Hamilton¹⁾ gezeigt hat, durch die partiellen Differentialquotienten einer Function der Coordinaten, der Grundfunction, dargestellt werden, in ähnlicher Weise wie nach Lagrange die Differentialgleichungen derselben mit Hülfe der partiellen Differentialquotienten der Kräftefunction dargestellt werden können. Die Grundfunction genügt dabei zwei partiellen Differentialgleichungen, allein schon eine dieser partiellen Differentialgleichungen reicht, wie Jacobi nachwies, zu ihrer Definition hin. Die Grundfunction ist eine vollständige Lösung dieser Differentialgleichung und irgend eine vollständige Lösung der letzteren giebt, analog nach den Constanten differentiirt, das System der Integralgleichungen. Es concentrirt sich daher die ganze Aufgabe in der Hamilton-Jacobi'schen Methode zu der einen Integration der partiellen Differentialgleichung, im Gegensatz zu dem Lagrange'schen Verfahren, wo nur einzelne Integrale mit Hülfe der bekannten Principien gefunden werden. Diese Integration der partiellen Differentialgleichung wurde von Jacobi²⁾ in allgemeiner Weise sowohl auf dem bereits von Lagrange und Pfaff angebahnten Wege, als auch in einer neuen großen Methode entwickelt, Integrationsweisen, an welche beide sich eine Reihe neuerer Arbeiten anschließen.

1) *Phil. Trans.* 1834, 1835.

2) Vorlesungen über Dynamik; *Nova methodus etc.* Borchardt's Journal 60.

Die angeführte Theorie hat neuerdings noch in doppelter Hinsicht eine Erweiterung erfahren. Wenn die Untersuchung von Hamilton und Jacobi sich auf den wirklichen Raum bezogen, für welchen das Element einer von einem Punkte ausgehenden Linie darstellbar ist durch die Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate von Differentialien der Coordinaten des Punktes, so faßte Lipschitz ¹⁾ das Problem dahin allgemeiner, daß er das Linienelement gleich der p ten Wurzel aus einer beliebigen wesentlich positiven Form des p ten Grades von den Differentialien beliebiger Coordinaten des betreffenden Punktes voraussetzte. Das Element seines der Grundfunction entsprechenden Integrales wird die Summe aus einer beliebigen Form p ten Grades von den nach der Zeit genommenen Differentialquotienten der Variablen und einer beliebigen nur von den Variablen abhängenden Kräftefunction, diese Summe in das Zeitelement multiplicirt, so daß das Problem der Mechanik in ein ganz allgemeines der Variationsrechnung übergeht. Wenn ferner Hamilton eine Kräftefunction vorausgesetzt hatte, die nur von den Coordinaten der bewegten Punkte abhing und wenn Jacobi die Untersuchung auch auf eine die Zeit explicite enthaltende Kräftefunction ausgedehnt hatte, so faßte Schering ²⁾ die Aufgabe von dieser Seite allgemeiner, indem er Kräfte einführte, die nicht nur von der Lage, sondern auch von dem Bewegungszustande der Massen abhängen. Diese Abhängigkeit wird so gewählt, daß, unter R die resultirende Kraft und unter dr die virtuelle Verückung der Massenpunkte verstanden, $\sum R dr$ die Differenz einer totalen Variation und einer totalen Derivirten nach der Zeit wird und diese Verallgemeinerung wird zugleich auf dem erweiterten Lipschitz'schen Standpunkte durch-

- 1) Untersuchung eines Problems der Variationsrechnung. Borchardt's Journal 74.
- 2) Hamilton-Jacobi'sche Theorie für Kräfte, deren Maafs von der Bewegung der Körper abhängt; Abhandl. der Göttinger Ges. der Wissensch. 1873.

geführt. In derselben können also Bewegungen wie die, welche z. B. dem Weber'schen Gesetze genügen oder Bewegungen im mehrfach ausgedehnten Gauß'schen und Riemann'schen Raume behandelt werden.

Von dem hohen Grade, zu dem diese analytischen Untersuchungen gelangt sind, steht die geringe Ausbildung der physikalischen Seite der Hamilton'schen Methode weit ab. Eine ganz wesentliche Eigenthümlichkeit derselben besteht darin, daß sie von einer gegebenen Bewegung des Punktsystems zu einer anderen übergeht, in ähnlicher Weise wie das Lagrange'sche Verfahren von einer Configuration der Punkte zur anderen übergeht. Die Grundfunction, ein bestimmtes Integral, das über die ursprüngliche Bewegung ausgedehnt wird, erfährt durch die Variation der willkürlichen Constanten der Bewegung eine Aenderung, und diese Variation oder die eines ähnlichen den Kraftaufwand darstellenden Integrales geben die symbolischen Bewegungsgleichungen Hamilton's. Die Hamilton'sche Methode unterscheidet sich daher zweitens von der Lagrange'schen, bei welcher die Kräftefunction sich nach Elementen der gegebenen Bewegung ändert, in derselben Weise wie die Variation von der Differentiation der Functionen. Diese zweite Seite derselben mußte sofort zu einer neuen Behandlung der Störungen leiten, welche von Hamilton, Jacobi, Schering zu einer Reihe neuer Systeme von Störungsformeln entwickelt worden ist. Allein die genannte Anwendung der Variation der Bewegung, welche im Grunde nur eine besondere Darstellungsart der letzteren ist, ist nicht das Wesentliche der neuen Anschauung, das vielmehr in ähnlichen Principien gesucht werden muß, wie bei den gewöhnlichen Differentialgleichungen der mechanischen Probleme. Zwar wird die eine Bedeutung dieser Principien, die Darstellung von einzelnen Integralen, bei dem angedeuteten allgemeinen Integrationsverfahren hier nicht in Betracht kommen; die davon unabhängige physikalische Bedeutung derselben aber, welche sich dort am evidentesten bei dem Satz von der

lebendigen Kraft, namentlich in der ihm von Helmholtz gegebenen allgemeinen Fassung, erwies, bleibt auch hier bestehen und dieß rechtfertigt eine Untersuchung derselben.

Eine solche Untersuchung der physikalischen Seite der Hamilton'schen Methode ist im Folgenden versucht worden; sie schien um so mehr gefordert, als die Bestrebungen der Physiker, den zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie in ähnlicher Weise wie den ersten aus rein mechanischen Begriffen abzuleiten, deutlich ein neues mechanisches Princip vermuthen ließen. Es ist Boltzmann¹⁾, Clausius²⁾ und Ledieu³⁾ gelungen, den genannten Satz von den Lagrange'schen Differentialgleichungen aus zu gewinnen; allein er stellte sich nicht wie der erste Satz aus einem allgemeinen Principe heraus, sondern jene Untersuchungen führten umgekehrt zu neuen mechanischen Sätzen, die aber freilich nicht die große Tragweite des Princips der lebendigen Kraft besaßen. Ein Versuch von Szily⁴⁾, den Satz von dem Hamilton'schen Verfahren aus zu gewinnen, liegt dem obigen Gedanken noch näher; allein abgesehen davon, daß er, wegen einer an der bisherigen Form desselben haftenden Beschränkung zu der geforderten allgemeinen Ableitung gar nicht führen konnte, tritt er auf die physikalische Seite dieser Methode nicht näher ein.

Die Untersuchung ergab nun, daß das neue Verfahren einem ähnlichen allgemeinen Principe genügt, wie das Lagrange'sche. Dem Satz der lebendigen Kraft ist nämlich der folgende Satz völlig coordinirt: Bezeichnet man in einer Bewegung, deren Bedingungsgleichungen und Kräftefunction die Zeit nicht explicite enthalten, Grundfunction und Kraftaufwand beziehlich mit V und W , so daß

1) Wiener Sitzungsberichte 53; Pogg. Ann. Bd. 143, S. 211.

2) Pogg. Ann. Bd. 142, S. 433.

3) *Compt. rend.* 1873, 1874.

4) Pogg. Ann. Bd. 145, S. 295; Bd. 149, S. 74.

$$-V = \int_0^t (T - U) dt, \quad W = \int_0^t 2T dt,$$

unter T die lebendige Kraft und unter U die Kräftefunction verstanden und setzt man voraus, daß V als Function der Anfangs- und Endcoordinaten und der Zeit, W als Function der Anfangs- und Endcoordinaten und der Energie dargestellt seyen, so gilt für jede während eines Zeitelements dt eintretende Umänderung der Bewegung die Relation

$$\frac{d(V + W)}{dt} - \left[\frac{\partial(V + W)}{\partial t} \right] = 0,$$

worin das Zeichen d die gesammte mit der Umänderung der Bewegung verbundene Aenderung, das Zeichen ∂ dagegen alle nicht durch Veränderungen der Coordinaten herbeigeführten Aenderungen von $V + W$ bedeuten. Es ist also bei jeder Bewegung, deren Bedingungsgleichungen und Kräftefunction nicht von t explicite abhängen, die durch die Variation der Coordinaten allein herbeigeführte Aenderung von Grundfunction und Kraftaufwand gleich Null. Die beiden Gröſsen W und V sind hierbei einer ähnlichen physikalischen Interpretation fähig wie T und U . Erstere ist bereits von Hamilton als die in der Bewegung angehäufte lebendige Kraft bezeichnet worden; die Bedeutung der letzteren ergibt sich aus einer Eigenthümlichkeit der ganzen Hamilton'schen Bewegungslehre. Während nämlich die *mécanique analytique* vorzugsweise die Kräfte in die Bewegungsgleichungen einführt, implicirt das Verfahren von Hamilton die Einführung der momentanen Impulse, so zwar, daß an die Stelle der Kräfte diejenigen Impulse treten, die in jedem Augenblick die wirklich vorhandenen Geschwindigkeiten hervorzubringen im Stande sind. Es können nun in einer Gruppe von Bewegungen diese Impulse analog wie die Kräfte als negative partielle Differentialquotienten einer Function der Coordinaten dargestellt werden und diese Function ist nichts anderes als die oben definirte Grundfunction des Systemes. Diese Eigenthümlichkeit giebt der Grundfunction eine ähnliche reelle Bedeutung wie sie die Kräftefunction in der poten-

tiellen Energie erhalten hat und macht die Coordination zwischen dem Princip der Energie und dem neuen Satze noch evident.

Wenn dieser Satz das allgemeine Princip war, auf das jene Untersuchungen der Wärmetheorie hinzielten, so mußte er den zweiten Hauptsatz dieser Disciplin derart als speciellen Fall in sich schließeln, wie der Satz der Energie den ersten Hauptsatz. In dieser Beziehung ist es nun bemerkenswerth, daß derselbe, auf die mechanische Wärmetheorie angewandt, ganz direct zu dem zweiten Hauptsatze führt, sobald nur, wie es hier unumgänglich scheint, die Temperatur der Körper proportional der lebendigen Kraft ihrer Molekularbewegung gesetzt wird. Dem entsprechend scheint auch der Satz einer ähnlichen Reihe weiterer Anwendungen fähig, wie der Satz der Energie; indessen beschränken sich die Anwendungen, die im Folgenden gegeben werden, auf jenen der Wärmelehre angehörigen Fall.

Der angeführte Satz ergab sich aus der Vereinigung zweier längst bekannter mechanischer Gleichungen. Hamilton hat nämlich seine Bewegungsgleichungen sowohl in Bezug auf die Function V als in Bezug auf die Function W gegeben und es brauchten nur die getrennten Resultate vereinigt zu werden, um sofort das neue zu liefern. In der allgemeinsten Form würde der Satz unter Einführung der im Sinne von Lipschitz und Schering verallgemeinerten Integralelemente gewonnen werden. Da es sich aber bei demselben wesentlich um seine Anwendung auf die reellen physikalischen Bewegungen handelte und da er zunächst in seiner einfachsten Form dargelegt werden sollte, so habe ich es vorgezogen, ihn im Anschluß an die ältere Hamilton-Jacobi'sche Behandlung, welche sich durchaus auf diesem Boden bewegt, zu geben. Dieses Verfahren mußte dann aber in anderer Hinsicht etwas allgemeiner gefaßt werden. Denn es setzt in allen Formen, in denen es bisher durchgeführt wurde, die Kräftefunction bei der Variation der Bewegung der Form nach unverändert voraus, während in physikalischen Betrachtun-

gen eine solche Formveränderung derselben bisweilen ganz wesentlich ist. Dies ist z. B. der Fall bei den als Wärme bezeichneten Molekularbewegungen, sobald die Körper Volum- und Druckänderungen unterworfen werden. In Bezug auf solche, namentlich von Clausius betonte Größen, die neben den Coordinaten in der Kräftefunction vorkommen und bei der Variation der Bewegung sich verändern, während sie innerhalb einer gegebenen Bewegung constant bleiben, mußte also das Verfahren erweitert werden, und dies hat zu etwas allgemeineren Formen der Bewegungsgleichungen geführt.

§. 1.

Es sey ein System von n materiellen Punkten gegeben, welche sich gegenseitig anziehen und abstoßen, im Uebrigen aber keinen weiteren Kräften unterworfen sind, so daß die sollicitirenden Kräfte durch die negativen partiellen Differentialquotienten einer Function der Coordinaten sämmtlicher Punkte, der Kräftefunction U , dargestellt werden können. Diese Function U enthält als veränderliche Größen jedenfalls die Coordinaten q_i der bewegten Punkte, von denen hier immer vorausgesetzt wird, daß sie die beliebig gestatteten Bedingungsgleichungen in einem Momente identisch erfüllen und darum, wenn m solcher Bedingungsgleichungen gegeben sind, in der Zahl $3n - m = \mu$ vorkommen. Außerdem können aber in der Kräftefunction die Zeit t explicite, sowie andere Größen c_i auftreten, welche sich dann, aber auch nur dann ändern, wenn man von einer Bewegung zu einer anderen übergeht. Für Bewegungen dieser allgemeinen Art soll das Verfahren von Hamilton zur Gewinnung der allgemeinen symbolischen Bewegungsgleichung, welche sich auf die Variation der Bewegung bezieht, erweitert werden. Wird die lebendige Kraft des Punktsystemes mit T bezeichnet und die Grundfunction V durch

$$- V = \int_0^t (T - U) dt$$

definiert, so ist die Aufgabe näher die, die Variation dieses Integrales unter den gemachten Voraussetzungen zu suchen.

Bei der Bildung dieser Variation wird zuerst die Zeit t als unabhängige Variable angesehen, welche nicht variiert wird. Alle in der Grundfunction vorhandenen Größen werden also als Functionen von t und einer Anzahl willkürlicher Constanten betrachtet und aus der Variation dieser Constanten allein soll die Variation jener Größen und daher die der Grundfunction hervorgehen. Solcher willkürlicher Constanten werden immer 2μ in den genannten Größen stecken, welche von der Integration der μ Differentialgleichungen zweiter Ordnung der Bewegung herrührend gedacht werden können; allein da außerdem eine Veränderung der Kräftefunction beim Uebergang aus einer Bewegung in eine andere vorausgesetzt ist, so kann zu jenen 2μ Constanten noch eine beliebige Anzahl anderer hinzutreten; diese letzteren, die ebenfalls von einander unabhängig angenommen werden, sind die Größen c_k . Wenn nun diese $2\mu + \nu$ Constanten sich verändern, t dagegen unverändert vorausgesetzt wird, so kommt

$$-\delta V = \delta \int_0^t (T - U) dt = \int_0^t \delta (T - U) dt,$$

und es handelt sich allein um die Variation der Größe $(T - U)$.

Da die Bedingungsgleichungen des Systemes die Zeit t explicite enthalten dürfen, so wird die lebendige Kraft T im Allgemeinen wie die Kräftefunction U die Zeit t ebenfalls explicite enthalten; allein da die Zeit nicht variiert wird, so kommen in der Bildung der totalen Variation δV doch nur die Variationen δq_i , $\delta q'_i$, δc_k vor und es wird

$$\begin{aligned} -\delta V = & \int_0^t \left[\sum \frac{\partial (T - U)}{\partial q_i} \delta q_i \right] dt + \int_0^t \left[\sum \frac{\partial (T - U)}{\partial q'_i} \delta q'_i \right] dt \\ & + \int_0^t \left[\sum \frac{\partial (T - U)}{\partial c_k} \delta c_k \right] dt. \end{aligned}$$

Durch partielle Integration im zweiten Theile der rechten Seite folgt hieraus, wenn die für die Zeit $t=0$ geltenden Werthe der verschiedenen Größen durch den Index 0 bezeichnet werden,

$$-dV = \sum \frac{\partial T}{\partial q'_i} \delta q_i - \sum \frac{\partial T^0}{\partial q'_{i^0}} \delta q_{i^0} \\ + \int_0^t \left\{ \sum \left[\frac{\partial (T-U)}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_i} \right] \delta q_i \right\} dt - \int_0^t \left(\sum \frac{\partial U}{\partial c_i} \delta c_i \right) dt$$

und setzt man die nach q'_i genommenen Differentialquotienten der lebendigen Kraft

$$\frac{\partial T}{\partial q'_i} = p_i \quad \frac{\partial T^0}{\partial q'_{i^0}} = p_{i^0},$$

je nachdem sie sich auf die Zeit t oder auf die Anfangszeit 0 beziehen, so kommt

$$-\delta V = \sum p_i \delta q_i - \sum p_{i^0} \delta q_{i^0} - \int_0^t \left(\sum \left[\frac{dp_i}{dt} - \frac{\partial (T-U)}{\partial q_i} \right] \delta q_i \right) dt \\ - \int_0^t \left(\sum \frac{\partial U}{\partial c_i} \delta c_i \right) dt \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Dies ist eine Bewegungsgleichung allgemeinsten Art, ähnlich einer von Jacobi¹⁾ und Schering²⁾ hervorgehobenen, welche aber das Eigenthümliche hat, daß die in den letzteren Gleichungen nicht enthaltenen Größen c_i im Allgemeinen in der Kräftefunction ebenfalls vorkommen.

Sämmtliche Größen in der Gl. (1) sind als Functionen von t und $2\mu + \nu$ willkürlichen Constanten vorausgesetzt, deren erste 2μ von der Integration der Differentialgleichungen der Bewegung herrührten. Man kann nun mittelst der Integralgleichungen die Größen q_i , q_{i^0} durch die willkürlichen Constanten und t ausdrücken, man kann aber auch durch dieselben Integralgleichungen die genannten 2μ willkürlichen Constanten durch die Größen q_i , q_{i^0}

1) Vorlesungen über Dynamik 143, 356.

2) Hamilton-Jacobische Theorie 19.

und t darstellen. Das letztere soll vorausgesetzt werden. Dann wird V eine Function von t und 2μ Gröſsen q_i, q_i^0 ; auſserdem enthält es aber noch die willkürlichen Constanten c_i , die in Folge der gemachten Voraussetzung durch keine Relation mit einander verknüpft sind. Daher werden jetzt alle Variationen $\delta q_i, \delta q_i^0, \delta c_i$ von einander unabhängig.

In Folge dessen läſt sich die Gleichung (1) sofort in einzelne Gleichungen zerspalten. Setzt man nämlich den unter dem Integralzeichen stehenden Ausdruck

$$\Sigma \left[\frac{dp_i}{dt} - \frac{\partial (T - U)}{\partial q_i} \right] \delta q_i = 0,$$

so kommen die Differentialgleichungen der Bewegung

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial (T - U)}{\partial q_i}$$

und da umgekehrt die letzteren von Lagrange unabhängig von Gl. (1) bewiesen sind, so folgt, daſs unter allen Umständen jener unter dem ersten Integralzeichen stehende Ausdruck der rechten Seite verschwindet. Läſt man daher denselben unberücksichtigt, so kommt

$$-\delta V = \Sigma p_i \delta q_i - \Sigma p_i^0 \delta q_i^0 - \int_0^t \Sigma \frac{\partial U}{\partial c_i} \delta c_i dt \quad (2)$$

und dieſs ist die erweiterte symbolische Gleichung von Hamilton. Weil nämlich die Variationen alle von einander unabhängig sind, so liefert sie sofort die Integralgleichungen

$$-\frac{\partial V}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial V}{\partial q_i^0} = p_i^0.$$

Die Gleichung (2) ist (bis auf eine unerhebliche Abweichung in der Schreibweise) bereits von Clausius¹⁾ gegeben worden, wobei aber zu bemerken, daſs die Ableitung von Clausius sich nur auf Bewegungen bezieht, deren Kräftefunction und deren Bedingungsgleichungen die Zeit nicht explicite enthalten. Die Gestalt, in welcher sie die Variation δV giebt, ist für die folgenden Betrachtungen noch nicht allgemein genug, da im Allgemeinen

1) Pogg. Ann. Bd. 150, S. 122.

die Zeit t ebenfalls variirt und damit eine partielle Aenderung sowohl in T als auch in U und folglich auch in V herbeigeführt wird, welche in Gleichung (2) nicht berücksichtigt ist.

Es soll daher jetzt angenommen seyn, daß die Zeit t nicht mehr die unabhängige Variable ist, sondern bei der Variation der Bewegung mit die Veränderung δt erfahre. Um den Sinn dieser Variation zu verstehen, hat man zu beachten, daß man nicht die Zeit überall, wo sie vorkommt, variirt, sondern nur da, wo sie explicite vorkommt, denn eine Variation der andern würde auf eine Variation der Anfangs- und Endcoordinaten hinauslaufen und diese ist bereits abgethan. Man faßt also in diesem Falle die Grundfunction V auf als abhängig von Anfangs- und Endcoordinaten, dieser expliciten Zeit t und der Größen c_i und die Variation derselben ist zu bilden, indem man jetzt gleichzeitig alle diese Größen variirt. Die unter Einschluss der Zeit gebildete totale Variation wird daher

$$-\delta V = \sum p_i \delta q_i - \sum p_i^0 \delta q_i^0 - \int_0^t \sum \frac{\partial U}{\partial c_i} \delta c_i dt - \frac{\partial V}{\partial t} \delta t$$

und es handelt sich darum, den letzten Term $\frac{\partial V}{\partial t}$ zu bestimmen.

Um diesen zu erhalten, beachte man, daß bei der Differentiation nach t sich die in der Kräftefunction U enthaltenen Größen c_i nach den Voraussetzungen, die über diese Größen gemacht worden sind, nicht ändern. Es folgt daraus, daß

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum \frac{\partial V}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt}$$

und hieraus ergibt sich sofort der gesuchte partielle Differentialquotient

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{dV}{dt} - \sum \frac{\partial V}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} = U - T + \sum p_i q'_i.$$

Führt man jetzt diesen Werth in die obige Gleichung für δV ein, so kommt

$$\begin{aligned}
-\delta V = \sum p_i \delta q_i - \sum p_i^0 \delta q_i^0 - \int_0^t \sum \frac{\partial U}{\partial c_i} \delta c_i dt \\
- (U - T + \sum p_i q_i') \delta t \dots \dots (3).
\end{aligned}$$

Diese allgemeine auf die Variation der Bewegung bezügliche Gleichung, welche den von Lipschitz gegebenen Gleichungen 7** und 7a S. 122 bis 123, sowie den übrigens die Differentialgleichungen noch mit enthaltenden Gleichungen [5] und [6] S. 19 von Schering entspricht, gilt, sobald eine Kräftefunction existirt, also auch dann, wenn Kräftefunction und Bedingungsgleichungen die Zeit explicite enthalten. Für den speciellen im Folgenden allein zur Behandlung kommenden Fall, wo die Zeit nicht mehr in Kräftefunction und Bedingungen explicite auftritt, nimmt sie eine etwas einfachere Gestalt an.

In diesem Falle gilt nämlich die Relation

$$T + U = E,$$

wenn E die Energie des Systemes bezeichnet. Addirt und subtrahirt man daher auf der rechten Seite der für $\frac{\partial V}{\partial t}$ geltenden Gleichung den Werth $2T$, so kommt

$$\frac{\partial V}{\partial t} = E + \sum p_i q_i - 2T.$$

Allein bei den festgesetzten Voraussetzungen wird die lebendige Kraft eine homogene Function zweiten Grades der Variabeln q'_i , also

$$2T = \sum \frac{\partial T}{\partial q'_i} q'_i = \sum p_i q'_i,$$

somit kommt einfach

$$\frac{\partial V}{\partial t} = E$$

und nach der Substitution in die obige Gleichung

$$-\delta V = \sum p_i \delta q_i - \sum p_i^0 \delta q_i^0 - \int \sum \frac{\partial U}{\partial c_i} \delta c_i dt - E \delta t \quad (4).$$

Diese an die Hamilton'sche ¹⁾ Gleichung sich anschließende Form bildet den Ausgangspunkt für das Folgende. Bezeichnend für dieselbe ist dabei, daß die ge-

1) *Phil. Trans.* 1834, 307.

wöhnlichen Bewegungsgleichungen von Lagrange nur *in* der Bewegung selber als erfüllt angesehen werden, nicht mehr dagegen während der Veränderung der Bewegung. Das System muß also immer *in* der Bewegung ein abgeschlossenes seyn, das von Außen her keine Einwirkung erleidet, während der Variation der Bewegung muß dagegen eine solche Einwirkung von Außen her stattfinden. Dabei kann nun die Energie des Systemes constant bleiben oder sich verändern, ob das eine oder das andere stattfindet, hat auf die Gültigkeit der Gl. (4) keinen Einfluß. Diese Unabhängigkeit der Hamilton'schen Gleichung von der Art der Variation der Bewegung hat dieselbe Bedeutung wie die der Lagrange'schen Bewegungsgleichung von der Art der Variation der Configuration. Wenn also das Lagrange'sche Verfahren sich auf Systeme mit und ohne Bedingungen erstreckt, so dehnt sich die Hamilton'sche Gleichung (4) auf Systeme aus, die bei der Umänderung ihrer Bewegung die Energie constant erhalten oder auch solche von Außen aufnehmen.

§. 2.

Die symbolische Bewegungsgleichung Hamilton's spielt in der Behandlung der mechanischen Probleme eine ähnliche Rolle wie die symbolische Bewegungsgleichung von Lagrange, nur mit dem Unterschiede, daß sie sich auf die Variation der Bewegung bezieht, während die letztere die Variation der Configuration in einer Bewegung betrifft. Wenn nun in dem Lagrange'schen Verfahren aus der Bewegungsgleichung eine Reihe von Principien hervorgehen, welche zum Theil die rein analytische Bedeutung von Integralen der Differentialgleichungen, zum Theil die wesentlich physikalische Bedeutung von allgemeinen für die Bewegung überhaupt geltenden Sätzen haben, so entspringt sofort die Frage, ob nicht ähnliche Principien der Hamilton'schen Gleichung sich anschließen. Dieß soll namentlich in Hinsicht auf den Satz der lebendigen Kraft, der in dem Lagrange'schen Verfahren

weitaus die größte Wichtigkeit angenommen hat, untersucht werden.

Es wird dazu die bereits angedeutete Voraussetzung gemacht, daß in allen Bewegungen, die von jetzt ab untersucht werden, die Zeit weder in der Kräftefunction, noch in den Bedingungsgleichungen explicite vorkomme, so daß die Hamilton'sche Gleichung die Form annimmt

$$-\delta V = \sum p_i \delta q_i - \sum p_i^0 \delta q_i^0 - \int_0^t \sum \frac{\partial U}{\partial c_i} \delta c_i dt - E \delta t \quad (4).$$

Benutzt man nun die bekannte, schon von Euler angegebene und auch von Hamilton und Jacobi angewandte Substitution ¹⁾

$$V = -W + Et,$$

woraus

$$\delta V = -\delta W + E \delta t + t \delta E,$$

so geht diese Bewegungsgleichung über in

$$\delta W = \sum p_i \delta q_i - \sum p_i^0 \delta q_i^0 - \int_0^t \sum \frac{\partial U}{\partial c_i} \delta c_i dt + t \delta E \quad (5).$$

Hierin ist

$$\begin{aligned} W = -V + Et &= \int_0^t (T - U) dt + (T + U)t \\ &= \int_0^t (T - U) dt + \int_0^t (T + U) dt = \int_0^t 2T dt, \end{aligned}$$

also nichts anderes als die unter dem Namen des Kraftaufwandes bekannte GröÙe. Sie ist als Function der GröÙen q_i , q_i^0 , E , c_i aufzufassen und die Zeit t , die beim Integrale in Gl. (5) noch übrig geblieben ist, durch die Gleichung

$$\frac{\partial W}{\partial E} = t$$

zu ersetzen, so daß t und E in den Gleichungen (4) und (5) eine völlige analoge Stellung einnehmen, derart, daß

1) Man vergleiche damit die allgemeinen Transformationen von Lipschitz und Schering.

immer die eine GröÙe die andere ersetzt. Vergleicht man nun die beiden Relationen (4) und (5), so kommt

$$\begin{aligned}
 & - \left[\delta V - \sum \frac{\partial V}{\partial c_i} \delta c_i - \frac{\partial V}{\partial t} \delta t \right] \\
 & = \delta W - \sum \frac{\partial W}{\partial c_i} \delta c_i - \frac{\partial W}{\partial E} \delta E \quad . \quad (6).
 \end{aligned}$$

In dieser Gleichung sind die Variationen noch völlig unbestimmt. Eines von den unendlich vielen Systemen von virtuellen Variationen wird nun unter den gemachten Voraussetzungen das System der Veränderungen seyn, welche bei der wirklichen Umänderung der Bewegung während des Zeittheilchens dt eintreten. Bezogen auf diese wirklichen Variationen wird aber

$$\delta = \frac{d}{dt} dt$$

und das zweite und dritte Glied in Gl. (6) können je als eine in Bezug auf die Coordinaten explicite Aenderung nach t aufgefaßt werden, die durch

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} dt \right]$$

ausgedrückt seyn mag. Dann kommt

$$\frac{d(V+W)}{dt} - \left[\frac{\partial(V+W)}{\partial t} \right] = 0 \quad . \quad (7)$$

und dies ist der gesuchte Satz: *Die Summe der Aenderungen der Grundfunction und des Kraftaufwandes, welche durch die Variation der Anfangs- und Endcoordinaten allein hervorgerufen sind, ist in der Veränderung jeder Bewegung, die eine Kräftefunction voraussetzt und die Zeit weder in dieser noch in den Bedingungen explicite enthält, gleich Null.*

Da die Variation der Bewegung nur der Bedingung unterworfen ist, daß sie die Beschränkungen des Systemes nicht aufhebt, im Uebrigen aber, wie schon hervorgehoben wurde, sehr wohl unter Zufuhr von Energie geschehen darf, so ist der gewonnene Satz unabhängig von der speciellen Art desselben. In dieser Beziehung ist die Coordination zu dem Satz der lebendigen Kraft, welcher

die Zunahme der letzteren ebenfalls unabhängig von der Art der Variation der Configuration giebt, evident. Allein diese Unabhängigkeit bildet nur eine Seite in dem letzteren Satze; eine andere noch wesentlichere hat derselbe bekanntlich durch die Bemerkung angenommen, daß die Kräftefunction (in obiger Darstellung) nichts anderes als die potentielle Energie des Systemes ist. In einer solchen neuen Richtung soll jetzt auch der neue Satz untersucht werden.

Die gesuchte Bedeutung der Grundfunction ergibt sich leicht, wenn man die Kräfte, auf welche sich die gewöhnliche Theorie der Bewegung stützt, verläßt und an die Stelle derselben die momentanen Impulse einführt, welche in jedem Augenblicke die existirenden Geschwindigkeiten hervorzubringen im Stande sind. Daß eine solche Betrachtungsweise mit der Hamilton'schen Theorie der Bewegung in wesentlichem Zusammenhange stehe, ist, so viel mir bekannt, noch nicht hervorgehoben, wenn auch neuerdings Thomson und Tait¹⁾ auf die Wichtigkeit dieses zweiten, dem ersten nicht nachstehenden Verfahrens aufmerksam gemacht und seine Theorie näher ausgebildet haben. In demselben sind die nach den allgemeinen Coordinaten gebildeten Componenten der momentanen Impulse, wenn die Componenten der Kräfte nach den rechtwinkligen Coordinaten genommen XYZ sind,

$$P_i = \int_0^t \Sigma \left(X \frac{\partial x}{\partial q_i} + Y \frac{\partial y}{\partial q_i} + Z \frac{\partial z}{\partial q_i} \right) dt.$$

Andererseits ist, wenn u und v die Geschwindigkeitscomponenten gebildet nach der Coordinate q_i vor und nach dem Impulse P_i bezeichnen, die von den Kräften während des Impulses gethane mechanische Arbeit

$$L = P_i \frac{u + v}{2}.$$

Wird nun ein System von μ Impulscomponenten P_i vorausgesetzt, welches die sämtlichen Geschwindigkeiten q'_i von dem Ruhezustande des Systemes hervorbringt, so daß

1) *Treatise on nat. phil.* 206 ff.

die Geschwindigkeiten vor denselben alle $= 0$, die nach denselben aber jene q'_i sind, so wird die mechanische Arbeit, welche von den Kräften während der Impulse gethan wird,

$$L = \frac{1}{2} \sum P_i q'_i.$$

Allein es ist die äquivalente lebendige Kraft

$$T = \sum \frac{1}{2} p_i q'_i,$$

also

$$p_i = P_i$$

und

$$-\frac{\partial V}{\partial q_i} = P_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha),$$

d. h. die negativen nach den Coordinaten gebildeten partiellen Differentialquotienten der Grundfunction stellen die Componenten der momentanen Impulse dar, welche die jedesmaligen Geschwindigkeiten hervorzubringen im Stande sind.

Wird aus (α) der Werth von P_i in

$$2L = \sum P_i \frac{dq_i}{dt}$$

eingesetzt, so kommt weiter

$$2L = - \sum \frac{\partial V}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt}$$

und

$$- \sum \frac{\partial V}{\partial q_i} dq_i = 2L dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

d. h. das negative nach sämtlichen Coordinaten gebildete partielle Differential der Grundfunction stellt das Product aus dem Zeitelement dt in die doppelte mechanische Arbeit dar, welche bei den die wirklichen Geschwindigkeiten q'_i vom Ruhezustande aus hervorbringenden Impulsen gethan wird.

Führt man endlich aus (β) den Werth dieses partiellen Differentialles in die Gleichung

$$dV = \sum \frac{\partial V}{\partial q_i} dq_i + E dt$$

ein, so kommt

$$dV = - 2L dt + E dt$$

und hieraus

$$V = \int_0^t (E - 2L) dt \quad (\gamma)$$

eine Relation, welche sich auch sofort aus der früheren Definitionsgleichung von V unter Benutzung des Satzes der Energie ergibt, von Hamilton geradezu als Definition der Function V benutzt worden ist und die eigentliche mechanische Bedeutung der Grundfunction ausdrückt.

Da nun in (γ) die Grundfunction analog der früheren Gröfse W gebildet erscheint, so wird es passend seyn, dieß auch durch eine gleichmäfsige Bezeichnung anzudeuten und in dieser Bezeichnung dürften sich die Namen potentielle und kinetische Action für V und W empfehlen. Setzt man noch

$$A = V + W = Et$$

und nennt dies die Action des Systemes schlechthin, so geht die Gl. (7) über in

$$\frac{dA}{dt} - \left[\frac{\partial A}{\partial t} \right] = 0 \quad (8)$$

und der Satz lautet: *Die durch die Variation der Anfangs- und Endcoordinaten allein bedingte Aenderung der Action verschwindet bei der Umänderung jeder Bewegung, welche eine Kräftefunction voraussetzt und die Zeit weder in dieser, noch in den Beschränkungen explicite enthält.* In dieser Form kann er als das Princip der Action bezeichnet werden.

Hierbei sind potentielle und kinetische Action Gröfsen, welche die gegebene Bewegung in ähnlicher Weise charakterisiren, wie die potentielle und kinetische Energie die entsprechende Configuration. Denkt man sich die ganze Reihe stetig geänderter Bewegungen durchlaufen, so werden sich dieselben im Allgemeinen durch verschiedene Werthe dieser Gröfsen unterscheiden. In dem Maafse nun, als durch die reine Aenderung der Coordinaten die eine abnimmt, nimmt die andere durch dieselbe Aenderung zu, so daß in dieser neuen Hinsicht völlige Uebereinstimmung mit dem Satz der Energie besteht.

In Bezug auf die Beschränkungen, unter denen der Satz der Action gewonnen wurde, ist zu bemerken, daß die Bil-

dung von $\int_0^t 2T dt$ wie die von T auch ohne eine Kräfte-

function möglich bleibt. Die Frage nun, was aus dem Satz der Action in diesen Fällen wird, wo keine Kräftefunction und in Folge dessen auch keine Grundfunction existirt, giebt zugleich Gelegenheit, die Stellung desselben zu einer anderen bekannten Gleichung der Mechanik hervorzuheben, welche sich auf die oben angeführten momentanen Impulse bezieht.

Sind nämlich, nach den rechtwinkligen Coordinatenachsen gebildet, die Componenten der Impulse $\mathcal{E} H Z$ und die Geschwindigkeitscomponenten, welche durch dieselben hervorgebracht sind, $x' y' z'$, so ist die Bewegungsgleichung

$$\Sigma[(\mathcal{E} - m x') \delta x + (H - m y') \delta y + (Z - m z') \delta z] = 0.$$

Werden nun als System der virtuellen Variationen die wirklich eintretenden Aenderungen der Coordinaten eingeführt, so folgt

$$\Sigma(\mathcal{E} x' + H y' + Z z') dt = \Sigma m(x'^2 + y'^2 + z'^2) dt = 2 T dt.$$

Ueber die gegebene Bewegung integrirt, kommt

$$\int_0^t \Sigma(\mathcal{E} x' + H y' + Z z') dt = \int_0^t 2 T dt$$

und durch Variation folgt hieraus

$$\delta \int_0^t \Sigma(\mathcal{E} x' + H y' + Z z') dt = \delta \int_0^t 2 T dt \quad (9).$$

Dies ist die Gleichung, welche in dem angenommenen allgemeinen Falle an die Stelle der Gleichung der Action tritt; ihre Glieder haben eine ähnliche mechanische Bedeutung, wie die der letzteren. Die Summe der linken Seite ist nämlich nichts anderes, als die doppelte mechanische Arbeit, welche die sämmtlichen einen Impuls bil-

denden Kräfte während desselben thun, die Gleichung geht also sofort über in

$$\delta \int_0^t 2 L dt = \delta \int_0^t 2 T dt \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

und in diese Form kann auch leicht der Satz der Action gebracht werden. Denn nach (γ) ist

$$-\delta V + E \delta t + t \delta E = \delta \int_0^t 2 L dt,$$

was, in seine Gleichung eingesetzt, sofort die Form (10) liefert. Der Unterschied beider Fälle besteht nur darin, daß im Falle einer Kräftefunction die Glieder der Gleichung Functionen der Coordinaten sind, im anderen Falle nicht, Verhältnisse, wie sie analog beim Satz der Energie ebenfalls auftreten.

§. 3.

Um das gefundene Princip, welches für die Bewegungsveränderungen aller Systeme, die den oft hervorgehobenen Bedingungen genügen, eine charakteristische Eigenschaft darstellt, zu erläutern, mag zunächst ein einfaches Beispiel, für welches sich der Satz leicht direct verificiren läßt, discutirt werden. Ich wähle dazu die Pendelbewegung, die in der Vertikalebene der xy um die vertikal nach unten zielende Axe der positiven y in unendlich kleinen Amplituden vor sich geht und gebe die Bestimmung der beiden Functionen V und W nach bekannten Methoden¹⁾.

Wird die Pendellänge mit l und die jedesmalige Elongation mit ϑ bezeichnet, so daß

$$x = l \sin \vartheta, \quad y = l \cos \vartheta,$$

so wird die Energie E durch die Größen p_i und q_i ausgedrückt

$$E = \frac{1}{2} \frac{p^2}{l^2} - g l \cos \vartheta,$$

1) Man vergleiche die Beispiele von Hamilton und Jacobi.

wobei $p = \frac{\partial T}{\partial \vartheta}$. Die Differentialgleichungen der Bewegung sind hiernach unter Beachtung der unendlich kleinen Amplitude

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{p}{l^2}$$

$$\frac{dp}{dt} = -g l \vartheta$$

und die beiden Integralgleichungen

$$\vartheta = \vartheta_0 \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t + \frac{p_0}{l \sqrt{g l}} \sin \sqrt{\frac{g}{l}} t$$

$$p = p_0 \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t - \vartheta_0 l \sqrt{g l} \sin \sqrt{\frac{g}{l}} t,$$

wobei ϑ_0 und p_0 die Werthe von ϑ und p für $t=0$ bezeichnen.

Werden nun diese Werthe in den Ausdruck für die lebendige Kraft

$$T = \frac{1}{2} \frac{p^2}{l^2}$$

eingeführt und die Quadrate und Producte der trigonometrischen Functionen durch die Functionen der doppelten Variablen ersetzt, so kommt

$$T = \frac{p_0^2}{4 l^2} + \frac{\vartheta_0^2 g l}{4} + \left[\frac{p_0^2}{4 l^2} - \frac{\vartheta_0^2 g l}{4} \right] \cos 2 \sqrt{\frac{g}{l}} t$$

$$- \frac{p_0 \vartheta_0}{2} \sqrt{\frac{g}{l}} \sin 2 \sqrt{\frac{g}{l}} t.$$

Werden die nämlichen Werthe auch in die Kräftefunction

$$U = -g l \left(1 - \frac{\vartheta^2}{2} \right)$$

eingeführt, so ergibt sich nach ähnlicher Reduction

$$U = -g l + \frac{\vartheta_0^2 g l}{4} + \frac{p_0^2}{4 l^2} + \left[\frac{\vartheta_0^2 g l}{4} - \frac{p_0^2}{4 l^2} \right] \cos 2 \sqrt{\frac{g}{l}} t$$

$$+ \frac{p_0 \vartheta_0}{2} \sqrt{\frac{g}{l}} \sin 2 \sqrt{\frac{g}{l}} t.$$

Und setzt man endlich diese beiden Werthe in die Grundfunction

$$-V = \int_0^t (T - U) dt$$

ein, so erhält man

$$\begin{aligned} -V = g l t + \left[\frac{p_0^2}{4 l \sqrt{g l}} - \frac{\vartheta_0^2 l \sqrt{g l}}{4} \right] \sin 2 \sqrt{\frac{g}{l}} t \\ + \frac{p_0 \vartheta_0}{2} \left(\cos 2 \sqrt{\frac{g}{l}} t - 1 \right) \end{aligned}$$

oder, wenn man mit Hülfe der ersten der Integralgleichungen

$$p_0 = \frac{l \sqrt{g l} (\vartheta - \vartheta_0) \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t}{\sin \sqrt{\frac{g}{l}} t}$$

setzt und schließlich in die trigonometrischen Functionen wieder die einfachen Variablen einführt

$$-V = g l t + \frac{1}{2} (\vartheta^2 + \vartheta_0^2) l \sqrt{g l} \cotg \sqrt{\frac{g}{l}} t - \frac{\vartheta \vartheta_0 l \sqrt{g l}}{\sin \sqrt{\frac{g}{l}} t} \quad (11).$$

Auf die nämlichen Variablen l und ϑ bezogen hat man anderseits

$$\frac{\partial T}{\partial \vartheta'} = l^2 \vartheta'$$

$$\vartheta' = \frac{1}{l^2} \frac{dW}{d\vartheta}$$

$$T = \frac{1}{2 l^2} \left(\frac{dW}{d\vartheta} \right)^2.$$

Wird dies nebst dem Werthe von U in die bekannte für A geltende Differentialgleichung

$$T = -U + E$$

eingesetzt, so kommt

$$\frac{1}{2 l^2} \left(\frac{dW}{d\vartheta} \right)^2 = g l \left(1 - \frac{\vartheta^2}{2} \right) + E$$

und hieraus das Integral

$$W = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \sqrt{2 g l^3 + 2 l^2 E - g l^3 \vartheta^2} d\vartheta \quad . \quad (12).$$

Bildet man jetzt aus (11) und (12) die Differentialquotienten

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial \vartheta} &= \frac{\vartheta l \sqrt{gl}}{\operatorname{tg} \sqrt{\frac{g}{l}} t} - \frac{\vartheta_0 l \sqrt{gl}}{\sin \sqrt{\frac{g}{l}} t} & -\frac{\partial V}{\partial \vartheta_0} &= \frac{\vartheta_0 l \sqrt{gl}}{\operatorname{tg} \sqrt{\frac{g}{l}} t} - \frac{\vartheta l \sqrt{gl}}{\sin \sqrt{\frac{g}{l}} t} \\ \frac{dW}{d\vartheta} &= \sqrt{2gl^3 + 2l^3 E - gl^3 \vartheta^2} & \frac{dW}{d\vartheta_0} &= -\sqrt{2gl^3 + 2l^3 E - gl^3 \vartheta_0^2} \end{aligned}$$

und führt dieselben in die Gleichung der Action ein, so kommt

$$\begin{aligned} l\sqrt{gl} \left(\vartheta \frac{d\vartheta}{dt} + \vartheta_0 \frac{d\vartheta_0}{dt} \right) \frac{\cos \sqrt{\frac{g}{l}} t - 1}{\sin \sqrt{\frac{g}{l}} t} &= \sqrt{2gl^3 + 2l^3 E - gl^3 \vartheta^2} \frac{d\vartheta}{dt} \\ &- \sqrt{2gl^3 + 2l^3 E - gl^3 \vartheta_0^2} \frac{d\vartheta_0}{dt} \quad . . . \quad (13). \end{aligned}$$

In der That läßt sich leicht zeigen, daß die einzelnen Derivirten bezüglich p und p_0 sind. Denn eliminirt man z. B. aus der zweiten der Integralgleichungen die GröÙe p_0 mit Hülfe der ersten, so kommt sofort

$$p = \frac{\vartheta l \sqrt{gl}}{\operatorname{tg} \sqrt{\frac{g}{l}} t} - \frac{\vartheta_0 l \sqrt{gl}}{\sin \sqrt{\frac{g}{l}} t} = -\frac{\partial V}{\partial \vartheta}.$$

Und setzt man andererseits diesen Werth von p in den Ausdruck der Energie, so geht derselbe über in

$$E = \frac{gl^3 \vartheta^2 \cos^2 \sqrt{\frac{g}{l}} t - 2gl^3 \vartheta \vartheta_0 \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t + gl^3 \vartheta_0^2}{2l^3 \sin^2 \sqrt{\frac{g}{l}} t} - gl \left(1 - \frac{\vartheta^2}{2} \right)$$

und daher wird

$$\frac{\partial W}{\partial \vartheta} = \sqrt{\frac{gl^3 \vartheta^2 \cos^2 \sqrt{\frac{g}{l}} t - 2gl^3 \vartheta \vartheta_0 \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t + gl^3 \vartheta_0^2}{\sin^2 \sqrt{\frac{g}{l}} t}} = p.$$

Von den Anwendungen des Satzes der Action auf die physikalischen Probleme soll hier die angeführt werden,

welche man von demselben in der mechanischen Wärmetheorie machen kann. Fasst man die Wärme als Molecularbewegung auf, so führt die Anwendung des Satzes der Energie auf dieselbe sofort zu dem ersten Hauptsatze dieser Disciplin. Dem entsprechend wird nun untersucht, was unter der nämlichen Voraussetzung aus dem Satz der Action hervorgeht. Jene Molecularbewegungen sind stationäre Bewegungen eines Punktsystemes und der einfachste Fall solcher Bewegungen ist offenbar der, bei welchem sich alle Punkte in geschlossener Bahn und mit einer allen gemeinsamen Umlaufszeit bewegen. Dies soll zunächst vorausgesetzt seyn.

Da für geschlossene Bahnen die beiden Gränzen des die Action bildenden Integrales zusammenfallen, wenn dasselbe über einen ganzen Umlauf erstreckt wird, so kommt

$$\sum \frac{\partial W}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} - \sum \frac{\partial W}{\partial q_i^0} \frac{dq_i^0}{dt} = \frac{dW}{dt} - \left[\frac{\partial W}{\partial t} \right] = 0$$

und die Gleichung des Satzes der Action geht daher über in

$$- \frac{dV}{dt} + \left[\frac{\partial V}{\partial t} \right] = 0$$

oder explicite geschrieben

$$-dV + \sum \frac{\partial V}{\partial c_i} dc_i + E dt = 0.$$

Nennt man nun den Mittelwerth der lebendigen Kraft und der Kräftefunction für einen Umlauf beziehlich $\bar{T}$ und $\bar{U}$, so kommt

$$\begin{aligned} -V &= \int_0^t (T - U) dt = t(\bar{T} - \bar{U}) \\ -dV &= t d\bar{T} - t d\bar{U} + \bar{T} dt - \bar{U} dt, \\ \sum \frac{\partial V}{\partial c_i} dc_i &= \int_0^t \left[\sum \frac{\partial U}{\partial c_i} dc_i \right] dt = t \sum \frac{\partial \bar{U}}{\partial c_i} dc_i \\ E &= \bar{T} + \bar{U} \end{aligned}$$

und setzt man diese Werthe in die obige Gleichung ein, so erhält man

$$t d\bar{T} - t d\bar{U} + 2\bar{T}dt + t \sum \frac{\partial \bar{U}}{\partial c_i} dc_i = 0,$$

woraus

$$d\bar{U} - \sum \frac{\partial \bar{U}}{\partial c_i} dc_i = d\bar{T} + 2\bar{T}d\log t \quad . \quad (14),$$

eine bekannte, schon von Clausius¹⁾ für solche Bewegungen aufgestellte Gleichung.

Wendet man nun diese oder verwandte Gleichungen auf die als Wärme bezeichnete Molekularbewegung an und benutzt dabei die Hypothese, daß die Temperatur proportional der lebendigen Kraft der Bewegung ist, so gelangt man, wie Boltzmann, Clausius und Ledieu gezeigt haben, leicht zum zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie. Im Allgemeinen wird aber die Bewegung der Moleküle eines Körpers nicht in geschlossenen Bahnen geschehen; bei den Flüssigkeiten ist man z. B. nicht einmal berechtigt, eine mittlere feste Lage derselben anzunehmen und bei den festen Körpern, wo eine solche Voraussetzung zwar nothwendig ist, wird doch die wirkliche Bewegung sich nach allen Dimensionen vertheilen. Für solche Fälle hat nun Clausius neuerdings auf eine zweite analoge Gleichung aufmerksam gemacht, welche die Voraussetzung geschlossener Bahnen mit einer andern vertauscht. Hier soll eine directere Ableitung des zweiten Hauptsatzes aus dem Satz der Action gegeben werden.

Die Voraussetzungen, welche über das den Körper darstellende Punktsystem gemacht werden, sind einfach die, daß die Bewegung eine stationäre sey und daß sie durch Mittheilung einer elementaren Wärmemenge unendlich wenig geändert werde. Es wird die auf die genannte Variation bezügliche GröÙe

$$\sum p_i \frac{dq_i}{dt} - \sum p_i^0 \frac{dq_i^0}{dt}$$

untersucht. Da unendlich kleine Aenderungen der Geschwindigkeiten in dem Zeittheilchen dt nur unendlich

1) Pogg. Annal. Bd. 142, S. 433.

kleine Wegeänderungen zweiter Ordnung hervorbringen, so wird

$$\sum p_i^0 \frac{dq_i^0}{dt} = \sum p_i^0 q_i'^0.$$

Ferner läßt sich das System der Variationen $\frac{dq_i}{dt} dt$ in zwei Systeme zerspalten. Das erste seyen die Wege $q_i dt$, welche in der ursprünglichen Bewegung während des Zeitelements dt von den Punkten q_i aus stattfinden. Dieser Theil liefert die Summe

$$\sum p_i q_i' = \sum p_i^0 q_i'^0.$$

Das zweite Theilsystem seyen die Wege $\varepsilon_i dt$, welche von den genannten letzten Lagen in der ursprünglichen Bewegung zu den Endlagen in der variirten Bewegung führen. In demselben kommen unter den gemachten Voraussetzungen auf jeden Werth p ebenso viel positive als negative ε ; dieser Theil liefert daher die Summe

$$\sum p_i \varepsilon_i = 0.$$

Hiernach wird für die unendlich kleine Variation, welche in der stationären Bewegung des Punktsystemes durch eine unendlich kleine Wärmemenge bedingt ist

$$\sum p_i \frac{dq_i}{dt} - \sum p_i^0 \frac{dq_i^0}{dt} = 0.$$

Unter Einführung der Function V wird also

$$\frac{dV}{dt} - \left[\frac{\partial V}{\partial t} \right] = 0$$

und die Gleichung der Action läßt sich schreiben

$$\frac{dW}{dt} - \sum \frac{\partial W}{\partial c_k} dc_k - t \delta E = 0.$$

Allein da

$$W = \int_0^t 2 T dt = 2 t \bar{T},$$

$$dW = 2 t d\bar{T} + 2 \bar{T} dt,$$

$$\sum \frac{\partial W}{\partial c_k} dc_k = - t \sum \frac{\partial \bar{U}}{\partial c_k} dc_k,$$

so kommt

$$2 t d\bar{T} + 2 \bar{T} dt + t \sum \frac{\partial \bar{U}}{\partial c_k} dc_k - t \delta E = 0$$

und hieraus

$$dE - \sum \frac{\partial \bar{U}}{\partial c_i} dc_i = 2 d\bar{T} + 2 \bar{T} d \log t$$

oder

$$dE - \sum \frac{\partial \bar{U}}{\partial c_i} dc_i = 2 \bar{T} d \log (t \bar{T}) \quad . \quad . \quad (15).$$

Diese Gleichung, die für den speciellen Fall, wo keine c_i vorhanden, wo die Bahnen geschlossen und wo die Umlaufszeiten für alle Punkte dieselben sind, schon von Szily¹⁾ gegeben wurde, führt nun unmittelbar zu dem zweiten Hauptsatz der Wärmelehre. Dazu beachte man zuerst, daß die linke Seite derselben nichts anderes als die Energie, welche dem Körper bei der Umänderung seiner molekularen Bewegung von Außen als Wärme mitgetheilt wird, also in der gewöhnlichen Bezeichnung der Wärmelehre $\frac{g}{A} dQ$ ist. Benutzt man dann weiter die Annahme, daß $\bar{T}$ proportional der absoluten Temperatur θ ist, so kommt sofort

$$\frac{dQ}{\theta} = dS \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16),$$

unter dS ein vollständiges Differential verstanden.

Hiermit ist der zweite Hauptsatz in ähnlicher Weise wie der erste aus einem allgemeinen mechanischen Principe abgeleitet. Allein die obige Darstellung läßt für die beiden Sätze nicht nur diese conforme Stellung, sondern auch einen gemeinsamen Ursprung erkennen. Die Entwicklung der Variation des Hamilton'schen Integrales hat das Eigenthümliche, daß sie gleichzeitig auf die Differentialgleichungen und die Integralgleichungen der mechanischen Probleme führt. Diese merkwürdige Thatsache giebt den Principien der Energie und Action einen gemeinsamen Ursprung in der allgemeinen Bewegungsgleichung und damit wird die letztere auch das verknüpfende Band für die beiden Sätze der Wärmetheorie.

Zürich im April 1874.

1) Pogg. Annal. Bd. 145, S. 295.