Theorie der Parallelen.

[Von W. BOLYAI.]

Aufgabe [1]. Auf der Geraden An (Fig. 1*) stehe du (in der Ebene P) senkrecht, und es sei $Au = un$. Der aus du und An bestehende Linienzug heiße T , und T werde in P so bewegt, dass sich An auf $An'n'\infty$ immer weiter bis ins Unendliche bewegt. Gleichzeitig werde in P ein zweites T in gleicher Weise wie das erste bewegt, sodass sich das zugehörige An auf $nyy'\infty$ immer weiter bis ins Unendliche bewegt. Man fragt, welche Linie d' bei seiner Bewegung beschreibt?

Fig. 1.

Lösung. Diese Linie heiße $\mathfrak{L}$; $\mathfrak{L}$ ist eine Gerade.

Beweis. I. $\mathfrak{L}$ kehrt nicht in sich zurück, weil sonst zwei auf derselben Geraden $AB\infty$ senkrecht stehende Gerade an derselben Stelle zusammenträfen, und das kann nicht geschehen, weil sonst dieselben Senkrechten auch auf der andern Seite der Geraden $AB\infty$ zusammenträfen (wegen der Gleichheit der Fälle).

II. Wäre nun aber $\mathfrak{L}$ keine Gerade, so kehrte es in sich zurück. Denn:

*) Anmerkung [auf der Figurentafel des Urtextes].

1. Eine Seite benenne ich öfters nach einem Dinge, das sich auf ihr befindet.
2. Ein Buchstabe, der oben mit einem Striche bezeichnet ist, bedeutet einen Punkt.
3. Eine Linie (z. B. du), die nach beiden Seiten ins Unendliche verlängert ist, wird mit $du\infty$ bezeichnet.
4. Wird du von d' aus ins Unendliche nach der Seite verlängert, wo u' ist, so dient als Zeichen $duu'\infty$.

III. Accipiatur (ex Fig. 1) Fig. 2 ita, ut $sim\infty$ sit $\mathcal{Q}$, $kn\infty$ vero sit $A\infty$; at a' ubicumque libet accipiatur ex $A\infty$, tantum

Fig. 2.

$ak = an$, si[n]t $sk = nm = du = ia$ perpendiculares ad eandem kn ; tum $si = im$, partes nimirum $\tau\delta^*)$ $\mathcal{Q}$ aequaliter generatae si u' in a' posito, d' in i' , T moveatur (ut supra) donec d' lineam im generet, et iterum aliud T ut supra donec d' ejus generet lineam is ; ex quibus generationibus aequalibus patet etiam

angulum ais aequalem angulo $a'im$ generari. Hinc etsi per is et im rectae intelligantur, dictum valet, nam partibus is et im $\tau\delta$ $\mathcal{Q}$ coincidentibus, etiam rectae is et im coincidunt.

IV. Recta sm secta ab ai in o' perpendiculariter secatur; nam superponatur $oanm$ ipsi $oaks$; a' manebit in a' ; o' in o' ; n' cadet in k' (quia ang. $oak = nao = \text{recto}$ per Constr.); m' vero cadet in s' (quia ang[ul]i $aks = anm$, $nm = ks$ per Constr.); hinc recta om cadit in os , adeoque anguli $aos = aom$; ergo ambo recti sunt.

V. Hinc $\tau\delta$ $\mathcal{Q}$ quaevis duo puncta sumantur s' et m' ; perpendicularis $V\infty$ ex medio o' rectae sm ad ipsam rectam sm , bisecat partem $\tau\delta$ $\mathcal{Q}$, quae inter s' et m' (nimirum ab s' usque ad m') est.

VI. Porro si $\mathcal{Q}$ abiens ex i' in plaga s' habeat cum perpendiculari V (seu ai) punctum aliquod h commune, idem h' commune esse debet etiam plagae alteri m' ex i' $\tau\delta$ $\mathcal{Q}$; tam ex generationibus utrinque aequalibus patet, quam et si superponatur linea, ex $imm'\infty$, $ia\infty$ conjuncta, lineae ex $iss'\infty$ et $ia\infty$ conjunctae, manente a' in a' et i' in i' , manifestum est ex plane dictis (Ac. Ax. 2**).

VII. Si m' ex m' moveatur in mis (parte $\tau\delta$ $\mathcal{Q}$) usque in s' ; cum ponatur $\mathcal{Q}$ non esse rectam, m' simulac ex m' moveatur, ex recta ms egredi debet (nam si in ea quantumvis moveretur, via quam describeret integra esset linea recta, et si pars $\tau\delta$ $\mathcal{Q}$ recta esset ob

*) [$\tau\delta = \tau\delta\delta$.]

**) [W. Bolyai bezieht sich hier und an einigen späteren Stellen, wie es scheint, auf gewisse Axiome, die er für seinen eigenen Gebrauch zusammengestellt hatte, die aber nicht mehr zu ermitteln sind.]

III. Man nehme (auf Grund von Fig. 1) die Fig. 2 so an, dass $sim \infty \mathfrak{L}$ ist, $kn \infty$ aber $An \infty$. Ferner werde a' auf $An \infty$ irgendwo angenommen, nur sei $ak = an$, und $sk = nm = du = ia$ mögen alle auf der Geraden kn senkrecht stehen. Dann sind si und im einander gleich, da sie als Theile von $\mathfrak{L}$ in der gleichen Weise erzeugt sind, wenn u' in a' , d' in i' liegt und T (wie vorhin) bewegt wird, bis d' die Linie im erzeugt, und zweitens das andre T , wie vorhin, bis sein d' die Linie is erzeugt. Aus diesen gleichen Erzeugungen geht hervor, dass auch die Winkel $a'is$ und $a'im$ bei der Erzeugung gleich ausfallen. Das Gesagte gilt daher noch, wenn man unter is und im Gerade versteht; denn wenn die Theile is und im von $\mathfrak{L}$ zusammenfallen, fallen auch die Geraden is und im zusammen.

Fig. 2.

IV. Die Gerade sm wird von ai in o' senkrecht geschnitten; legt man nämlich $oanm$ auf $oaks$, so bleibt a' in a' , o' in o' , n' fällt auf k' (weil der Winkel $oak = nao =$ einem Rechten ist, nach der Construction), m' aber fällt auf s' (weil der Winkel $aks = anm$ ist, und $nm = ks$, nach der Construction). Mithin fällt die Gerade om auf os , und überdies sind die Winkel aos und aom gleich, folglich sind beide Rechte.

V. Man nehme also auf $\mathfrak{L}$ irgend zwei Punkte s' und m' an, dann halbirt die in der Mitte o' der Geraden sm auf dieser Geraden sm errichtete Senkrechte $V \infty$ den Theil von $\mathfrak{L}$, der zwischen s' und m' liegt (nämlich von s' bis nach m' hin).

VI. Hat ferner $\mathfrak{L}$ auf seinem Wege von i' nach der Seite von s' hin mit dem Lothe V (oder ai) einen Punkt h gemeinsam, so muss derselbe Punkt h auch der andern Seite von $\mathfrak{L}$ angehören, also von i' aus der Seite, auf der m' liegt; das erkennt man sowohl aus der auf beiden Seiten gleichen Erzeugung, als auch indem man die aus $imm' \infty$ und $ia \infty$ zusammengesetzte Linie, auf die aus $iss' \infty$ und $ia \infty$ zusammengesetzte Linie legt, wobei a' in a' , i' in i' bleibt, wie aus dem oben Gesagten klar ist (siehe Axiom 2).

VII. Wird m' von m' aus auf mis (einem Theile von $\mathfrak{L}$) bis nach s' bewegt, so muss, wenn man annimmt, $\mathfrak{L}$ sei keine Gerade, m' , sobald es sich von m' fort bewegt, aus der Geraden ms heraustreten; wenn es sich nämlich auch noch so wenig in dieser bewegte, so wäre der ganze Weg, den es beschriebe, eine Gerade, und wenn ein Theil von $\mathfrak{L}$ gerade wäre, so wäre, da die Erzeugung bis ins Unendliche gleichmässig fortgesetzt wird, die ganze Linie $\mathfrak{L}$ gerade. Nun aber

generationem in infinitum continuatam aequaliter, tota $\mathcal{Q}$ esset recta); ingreditur vero m' (in *mis* motum) rectam ms iterum tum in s' pervenit: ergo seu contigerit id antea quoque, seu non; accipiat punctum illud rectae $ms\infty$, in quod m' postquam ex m' exiit, primum ingressum est, nomineturque punctum illud e' (Fig. 1), tum pars edm

Fig. 1.

(seu me) $\tau 8 \mathcal{Q}$ in unam plagam rectae em cadit.

VIII. Bisecetur dicta edm (juxta V) in d' ; ibi oritur Δedm .

IX. Accipiat ultra e' ex $\mathcal{Q}$, $fe = ed$; ang. $fed = edm$ (nam sicut linea mde generatur, ita linea def generatur); ergo rectis md , de , ef ductis, si ang. $edu < \text{recto}$, et $feA < \text{recto}$; anguli vero feA , deA , edu , udm sunt aequales (ob generationes utrinque aequales) (Ac. Ax. 2). Recti tamen esse nequeunt, nam ed cum dm angulum duobus rectis minorem facit (aut ab altera parte majorem) cum $to edm$ sit Δ (VIII).

X. Si $edu < \text{recto}$ (Fig. 3), tum $edm < 2$ rectis, consequ. recta dm in plagam eam cadit rectae $ed\infty$, in qua du est, ita

Fig. 3.

$fed < 2$ rectis; consequ. recta fe in plagam A' (seu u') rectae $ed\infty$ cadit; et fe atque dm in plagam eandem rectae ed cadunt; quod in aeternum sic continuari evidens est, ut nascatur linea composita $mdef \dots$ ex rectis aequalibus ad angulos

aequales, ita ut cujusvis lateri[s] duo adjacentia in plaga eadem sita sint.

Si vero $edu > \text{recto}$ (Fig. 4), tum $edu + udm > 2$ rectis, (at minus esse debet 4 rectis, quia adhuc angulus is deficit, quem ed cum dm ab altera parte facit); hinc dy^i (id est prolongata ed) intra dm et du cadere debet; hinc dm in eam plagam cadit rectae $ed\infty$, in qua u' non est; porro tum et $deA > \text{recto}$, et

tritt m' bei seiner Bewegung auf ms , sobald es nach s' gekommen ist, wieder in die Gerade ms , mithin wird das entweder bereits vorher einmal geschehen sein oder nicht. Man denke sich auf der Geraden $ms\infty$ den ersten Punkt, in den m' , nachdem es m' verlassen hat, gelangt ist, und nenne ihn e' (Fig. 1); dann fällt der Theil edm (oder em) von $\mathfrak{L}$ auf die eine Seite der Geraden em .

VIII. Man halbiere den genannten Theil edm (nach V.) in d' : so entsteht ein Dreieck edm .

Fig. 1.

IX. Man nehme jenseits von e' auf $\mathfrak{L}$ das Stück $fe = ed$ an, dann ist der Winkel $fed = edm$; denn wie die Linie mde erzeugt wird, so wird auch die Linie def erzeugt. Zieht man daher die Geraden md , de , ef , und ist der Winkel edu kleiner als ein Rechter, so ist auch feA kleiner als ein Rechter. Die Winkel feA , deA , edu , udm aber sind einander gleich wegen der auf beiden Seiten gleichen Erzeugung (siehe Axiom 2). Rechte können sie jedoch nicht sein, da ed mit dm einen Winkel bildet, der kleiner als zwei Rechte oder auf der andern Seite grösser als zwei Rechte ist, denn edm ist ein Dreieck (VIII).

X. Ist edu kleiner als ein Rechter (Fig. 3), so ist edm kleiner als zwei Rechte, folglich fällt die Gerade dm auf die Seite der Geraden $ed\infty$, auf der du liegt. Ebenso ist fed kleiner als zwei Rechte, folglich fällt die Gerade fe auf die Seite der Geraden $ed\infty$, auf der A' oder u' liegt, und fe sowie dm fallen auf dieselbe Seite der Geraden ed . Es ist klar, dass es in dieser

Fig. 3.

Weise ohne Aufhören weiter geht, und es entsteht daher ein Linienzug $mdef\dots$, der aus gleichen Geraden unter gleichen Winkeln besteht, und zwar so, dass bei jeder Kante dieses Linienzuges die beiden anliegenden Kanten auf derselben Seite liegen.

Ist aber edu grösser als ein Rechter (Fig. 4), so ist $edu + udm$ grösser als zwei Rechte, jedoch muss es kleiner als vier Rechte sein, weil noch der Winkel fehlt, den ed mit dm auf der andern Seite bildet. Mithin muss dy' (das heisst, die Verlängerung von ed) zwischen dm und du fallen, mithin fällt dm auf die Seite der

$deA + Aef > 2$ rectis; consequ. eh (scilicet de in h' prolongatum) inter fe et eA cadit; consequ. fe in plagam eam rectae $ed\infty$ cadit,

Fig. 4.

in qua non est u' (nam A' et u' in plagam eandem rectae dh cadunt) hinc fe et dm in plagam eandem rectae ed cadunt.

In utroque casu ergo, hac methodo continuata in infinitum, nascitur linea ut supra plane dictum est;

quae tamen non redit, quia tum duae perpendiculares concurrerent (Fig. 1).

XI. Fig. 5 repraesentet lineam ejusmodi $mdefg \dots$ quae nominetur Π ; ad md erigatur perpendicularis $\phi k\infty$; et $kdd'\infty$ vocetur

Fig. 5.

Q ; ac moveatur Q circa k' per lineam $defg \dots$; ast ne Q ultra ϕk eat. Quando Q in $kee'\infty$ perveniet, tum ef (cadens in plagam rectae $ed\infty$ eandem cum dm) cadet aut inter eu et ek aut inter ek et ed , aut in $ekk'\infty$; si posterius sit, tum f' cadet aut inter e' et k' aut in k' aut ultra k' ; si f' in λ' cadat, erigatur ad $e\lambda$ ex o' , ubi λe divisa bifariam sit, perpendicularis $oq\infty$; tum $oq\infty$ bisecat partem eam $\tau\delta \mathcal{L}$, quae est ab e' usque in f' (V.) et praeterea ex Π egredi debet per aliquod latus, et lateri illi adpertenentem partem $\tau\delta \mathcal{L}$ secare, et tum $\mathcal{L}$ rediit (VI.). Si vero ef inter ek et ed cadat, tum ef intra

lineam ex ke et parte $\tau\delta \Pi$ eousque ab k' incipiendo usque ad e' generatâ compositam tota continetur, nam ef secus partem dictam $\tau\delta \Pi$ transiret (contra clausulam in X). Hinc perpendicularis ad ef ex dimidio $\tau\delta ef$ egredi debet per aliquod latus partis dictae $\tau\delta \Pi$,

Geraden $ed\infty$, auf der u' nicht liegt. Ferner ist alsdann auch deA grösser als ein Rechter und $deA + Aef$ grösser als zwei Rechte, folglich fällt eh (nämlich die Verlängerung von de nach h) hier zwischen fe und eA , folglich fällt fe auf die Seite der Geraden $ed\infty$, auf der u' nicht liegt, denn A' und u' liegen auf derselben Seite der Geraden dh .

Fig. 4.

Mithin fallen fe und dm auf dieselbe Seite der Geraden ed .

In beiden Fällen entsteht also, wenn man dieses Verfahren ins Unendliche fortsetzt, ein Linienzug, wie er vorhin beschrieben worden ist. Dieser kehrt jedoch nicht in sich selbst zurück, weil sonst zwei Senkrechte zusammenträfen (Fig. 1).

XI. Figur 5 stelle einen solchen Linienzug $mdefg\dots$ dar, der Π genannt werden möge. Auf md errichte man die Senkrechte $\phi k\infty$ und bezeichne $kdd'\infty$ mit Q .

Nunmehr werde Q um k herum an dem Linienzuge $defg\dots$ hin bewegt; es fragt sich, ob Q über ϕk hinausgeht. Ist Q nach $kee'\infty$ gelangt, dann fällt ef , das auf derselben Seite der Geraden $ed\infty$ liegt wie dm , entweder zwischen eu und ek oder zwischen ek und ed oder in $ekk'\infty$.

Trifft das letzte ein, so fällt f' entweder zwischen e' und k' oder auf k' oder jenseits von k' . Fällt f' nach λ' , so errichte man auf der Geraden $e\lambda$ in deren Halbirungspunkte o' das Loth $oq\infty$. Dann halbirt $oq\infty$ den Theil von $\mathfrak{L}$, der sich von e' bis f' erstreckt (V.), und muss ausserdem durch irgend

Fig. 5.

eine Kante aus Π heraustreten und den Theil von $\mathfrak{L}$, der dieser Kante anliegt, schneiden, und alsdann ist $\mathfrak{L}$ in sich zurückgekehrt (VI).

Fällt aber ef zwischen ek und ed , so wird ef ganz von dem Linienzuge eingeschlossen, der zusammengesetzt ist aus ke und aus

et tum secare partem $\tau\delta$ & lateri illi adpertinentem, praeterea secat partem $\tau\delta$ & ipsi fe adpertinentem (V.), ergo tum & redit (VI.). Notandum est, tum quando fe in ek caderet, f' inter e' et k' cadere, secus violaretur clausula in X.

XII. Si vero f' inter eu et ek cadat, tum ang. $uef + fed = 2$ rectis $= eds + edm$, atqui $edm = fed$ (X.) ergo $eds = uef$.

XIII. Vocetur R pars illa $\tau\delta$ Q , quae ultra Π est, uti $ey y'\infty$ et $ds s'\infty \dots$ Iam si Q uti praeceptum est circa k' per Π porro moveatur, in lateris cujusvis fine quaeratur num latus sequens in Q ipsum cadat aut vero intus aut extus?

Si duorum priorum casuum aliquis advenerit, tum & rediit (XI.), idem enim casus est. Si vero semper extra Q cadat, tum pars prolongata (uti eu lateris ed) (lateris ad cujus finem Q plane pervenit) in eam plagam $\tau\delta$ Q in quam latus sequens cadit, cadit inter R et latus sequens; consequ. R ultra illud latus sequens semper, quando ad initium ejus pervenit est intervallo aliquo quod R cum parte dicta prolongatâ facit (uti yeu est) et insuper constante intervallo aequali angulo eds (XII.). Porro donec Q motu praescripto per aliquod latus $\tau\delta$ Π movetur, illud in initio secuit et porro secabit; adeoque Q tum semper angulum circa k' describit eoque ipsi ϕk propius venit.

Hinc R semper aliquo intervallo ultra eam partem $\tau\delta$ Π manet, quam Q percurrere tendit; et intervallum illud tantum abest ut nihilum fieret ut simulac Q motum incoepit in cujusvis lateris $\tau\delta$ Π extremo, est constante angulo eds majus.

Hinc R nunquam intra Π venire poterit, nam intervallum tolli est impossibile; cum quantitas, quae etsi quantovis decresceret, semper

dem bis jetzt, von k' anfangend bis e' hin, erzeugten Theile von Π ; sonst ginge nämlich ef , entgegen der in X. gemachten Bemerkung, durch den soeben genannten Theil von Π hindurch. Mithin muss die auf ef im Halbierungspunkte errichtete Senkrechte durch irgend eine Kante des genannten Theiles von Π austreten und alsdann den zu jener Kante gehörigen Theil von $\mathcal{L}$ schneiden. Ausserdem schneidet es aber den Theil von $\mathcal{L}$, der zu fe selbst gehört (V.), und alsdann kehrt $\mathcal{L}$ in sich zurück (VI.).

Noch ist zu bemerken, dass, wenn fe auf ek fiele, f' zwischen e' und k' fällt, sonst würde die in X. gemachte Bemerkung aufgehoben.

XII. Fällt jedoch f zwischen eu und ek , dann ist der Winkel $uef + fed$ gleich zwei Rechten, gleich $eds + edm$, es ist aber $edm = fed$ (X.), also $eds = uef$.

XIII. Es heisse R der Theil von Q , der jenseits Π liegt, wie $eyy'\infty$ und $dss'\infty \dots$ Wird nun Q in der vorgeschriebenen Weise um k' herum an Π hin weiter bewegt, so muss beim Endpunkte einer jeden Kante gefragt werden, ob die folgende Kante auf Q fällt oder nach innen oder nach aussen.

Tritt einer der beiden ersten Fälle ein, so ist $\mathcal{L}$ in sich zurückgekehrt (XI.), denn das ist ganz genau derselbe Fall. Fällt jedoch die folgende Kante von Q aus gesehen immer nach aussen, so verlängere man die Kante, zu deren Endpunkte Q gerade gelangt ist, dahin, wohin die folgende Kante von Q aus gesehen fällt, und es wird diese Verlängerung (bei der Seite ed ist es eu) zwischen R und die folgende Kante fallen. Folglich liegt R , wenn es an den Anfangspunkt der folgenden Kante gelangt ist, immer jenseits dieser und ist von ihr durch einen Zwischenraum getrennt, nämlich durch den Zwischenraum zwischen R und der genannten Verlängerung (ein solcher ist yeu), wozu noch ein constanter Zwischenraum gleich dem Winkel eds kommt (XII.). Ferner hat Q , während es in der vorgeschriebenen Bewegung an einer Kante von Π hin bewegt wird, diese am Anfange geschnitten und hört nicht auf sie zu schneiden, und Q beschreibt dann sogar immer einen Winkel um k' und kommt dadurch der Geraden ϕk immer näher.

Mithin bleibt R immer um einen gewissen Zwischenraum jenseits des Theiles von Π , den Q zu durchlaufen im Begriffe ist, und dieser Zwischenraum wird niemals gleich Null, vielmehr ist er jedesmal, wenn Q seine Bewegung in dem Endpunkte einer Kante von Π begonnen hat, grösser als der constante Winkel eds .

Mithin wird R niemals in das Innere von Π gelangen können; denn dass der Zwischenraum verschwinde, ist unmöglich, weil eine

tamen priusquam absumeretur, redintegratur in eandem constantem aut eâ majus, tolli nequit.

Quapropter Q moveri potest modo praescripto usque quo in $\phi k \phi' \infty$ veniet; tum vero etiam Π adest, secus enim R ex Π exiisset quod absurdum esse est demonstratum, tum vero aut extremum lateris alicujus $\tau \delta \Pi$ cadit in $\phi k \infty$, et tum punctum aliquod $\tau \delta \Omega$ (illud nempe) in $\phi k \infty$ cadit; aut latus aliquod $\tau \delta \Pi$ per $\phi k \infty$ transiit iterum, ergo et pars ea $\tau \delta \Omega$, quae inter extrema lateris illius est, transiit per $\phi k \infty$; in utroque casu Ω rediit (VI).

Hinc posito eo quod Ω non sit recta redire debet: Itaque cum demonstratum sit in (I) Ω non redire, falsum est Ω non esse rectam, quia per id veritas demonstrata destrueretur; omne vero, quod veritati repugnat, falsum est*).

Schol[ium]. Nihilo minus tamen per aliquod punctum $\tau \delta \Omega$ non dari et aliam parallelam ipsi An demonstratum adhuc non est, adeoque donec id fieret semper parallelae ita generatae aut generandae intelligentur.

Corol[arium]. 2. Fig. 1. In generatione $\tau \delta \Omega$, $\tau o du$ ex quovis loco sive porro eat, sive via qua venit redeat, generat aequaliter; hinc facit angulos cum Ω ubique et utrinque aequales seu rectos.

Fig. 6.

Th[eorema]. 1. (Fig. 6). Recta circulum non potest in pluribus quam duobus punctis secare.

Nam si rectae AB punctum α sit in peripheria, tum ad eandem rectam perpendicularares co et cs concurrerent (contra Prob. Dem. 1). Sit nempe c' centrum, $oa = oA$ et $sa = sB$; tum anguli ad o' sunt recti quia sunt aequales (ob co commune, $ca = ca$ et $oa = oA$); pariter et anguli ad s' erunt recti.

*) Hier folgt ein uns nicht verständliches Corollarium, das mit Strichen umrandet ist und zu dem W. Bolyai auf der Figurentafel hinter den früher mitgetheilten Anmerkungen selbst bemerkt:

„5. Corollarium Problematis I non est legendum, quia ad Definitiones traditas alibi refertur“. (Den Zusatz zu Aufgabe I braucht man nicht zu lesen, da er sich auf anderwärts mitgetheilte Definitionen bezieht.)

Das Corollarium selbst lautet wie folgt:

Cor[ollarium 1]. Hinc [Fig. 1] Ω est recta parallela ipsi $An \infty$; nam (Def. 42) quodvis y ex spatio quod = alteri Z est eidem simile, si in eadem Definitione

Grösse nicht verschwinden kann, die, wie sehr sie auch einmal abnehmen möge, doch immer wieder, bevor sie erschöpft ist, zu derselben Constanten oder einer noch beträchtlicheren Grösse ergänzt wird.

Demnach lässt sich Q auf die vorgeschriebene Art bewegen, bis es nach $\varphi k \varphi' \infty$ gelangt. Dann ist aber auch Π an dieser Stelle, sonst wäre nämlich R aus Π herausgetreten, was als widersinnig erwiesen ist. Dann aber fällt entweder der Endpunkt einer Kante von Π auf $\varphi k \infty$ und damit fällt ein Punkt von $\mathcal{Q}$ (nämlich gerade dieser) auf $\varphi k \infty$, oder es ist eine Kante von Π zum zweiten Male durch $\varphi k \infty$ hindurchgegangen, also ist auch der Theil von $\mathcal{Q}$, der zwischen den Endpunkten dieser Kante liegt, durch $\varphi k \infty$ hindurchgegangen; in beiden Fällen ist $\mathcal{Q}$ in sich zurückgekehrt (VI.).

Mithin muss $\mathcal{Q}$, wenn man annimmt, dass es keine Gerade sei, in sich zurückkehren. Da nun unter (I.) bewiesen worden ist, dass $\mathcal{Q}$ nicht in sich zurückkehrt, so ist es falsch, dass $\mathcal{Q}$ keine Gerade sein soll, weil dadurch eine bewiesene Wahrheit zerstört werden würde; alles aber, was einer Wahrheit widerspricht, ist falsch*).

Anmerkung. Nichtsdestoweniger ist bis jetzt nicht bewiesen, dass es durch einen Punkt von $\mathcal{Q}$ keine andre Parallele zu An mehr giebt; bis das geschieht, hat man also unter Parallelen immer Linien zu verstehen, die so [wie $\mathcal{Q}$] erzeugt oder zu erzeugen sind.

Zusatz 2. Fig. 1. Bei der Erzeugung von $\mathcal{Q}$ fällt das Erzeugniss von du stets gleich aus, an welcher Stelle man auch anfängt, mag es nun vorwärts gehen oder auf dem Wege, den es gekommen ist, wieder zurückkehren; mithin bildet du überall und auf beiden Seiten mit $\mathcal{Q}$ gleiche oder rechte Winkel.

Lehrsatz I. (Fig. 6). Eine Gerade kann einen Kreis nicht in mehr als zwei Punkten schneiden.

Denn läge der Punkt α der Geraden AB auf dem Umfange, so träfen co und cs , die auf eben dieser Geraden senkrecht stehen, zusammen (gegen Aufgabe 1, Beweis I). Es sei nämlich c' der Mittelpunkt, $oa = oA$ und $sa = sB$, dann sind die Winkel bei o' Rechte, weil sie gleich sind, denn co ist gemeinschaftlich und $ca = ca$, $oa = oA$; ebenso sind auch die Winkel bei s' Rechte.

Fig. 6.

*) Zusatz [1]. Mithin (Fig. 1) ist $\mathcal{Q}$ eine Gerade, die zu $An \infty$ parallel ist, denn (Def. 42) jedes γ aus dem Raume, das gleich einem andern Z ist, ist ihm ähnlich. Wenn in derselben Definition im Besonderen $\alpha = \beta$ angenommen, γ' in γ angenommen wird, und γ und Z so gelegt werden, dass sie zusam-

Cor[ollarium]. Hinc pars $\tau\delta AB\infty$ ea, quae praeter AB est, extra peripheriam cadit, nam accipiaturs centro B peripheria in eodem plano, peripheriam AaB intracludens (quod fieri posse patet si centro B in plano dicto radio omni, cujus alterum extremum est punctum peripheriae AaB , generentur peripheriae et deinde ultra extremam harum peripheriarum ex centro B generatarum accipiaturs punctum aliquod p in eodem plano et recta Bp centro B fiat peripheria); tum recta AB ultra A' attingit peripheriam exteriorern, adeoque amplius intra peripheriam AaB non veniet, quia tum recta in tribus punctis secaret circulum; idem et de altera parte $\tau\delta AB\infty$ probari potest ex centro A' .

Theo[rema]. 2. Fig. 7. Si cathetus unus crescit, crescit hypotenusa.

Nam scribatur centro δ' radio $\delta\beta$ circulus; hic adhuc habet cum $a\beta a'\infty$ unum punctum B' commune, si $Ba = a\beta$ (quia $\Delta\delta a\beta = \Delta\delta aB$); ergo recta $B\beta\beta'\infty$ (praeter $B\beta$) est extra peripheriam, ergo et γ (Th. 1. Cor.), quam ob rem $\delta\gamma > \delta\beta$.

Fig. 7.

Fig. 8.

Cor[ollarium]. 1. Fig. 7 et 8. Hinc in triangulis rectangulis cathetus et hypotenusa ponunt aequalitatem. Nam superponatur DA ipsi δa , D' in δ' cadente, et A' in a' ; ang. DAG et $\delta a\gamma$ sunt recti, demum etiam (cum $DG = d\gamma$) $\tau o G'$ in γ' cadere debet; nam omnes aliae hypotenusae, quae ex δ ad $a\gamma\gamma'\infty$ duci possunt, sunt [aut] majores aut minores.

Scholion. Non tamen universaliter verum est per duo latera

(specialiter) $a = \beta$ accipiaturs, ac γ' in γ accipiaturs, ita positus γ et Z ut coincident; porro ducatur recta per quaevis duo puncta $\tau s \mathfrak{L}$ et per quaevis duo puncta $\tau s An\infty$ ducatur alia, rectis $\mathfrak{L}$ et $An\infty$ jam ita sitis uti in Fig. 1, et rectae ductae erunt in eodem plano nec concurrent, cum una earum cadat in $\mathfrak{L}$, altera in $An\infty$; ergo cum idem de quibusvis duobus $\tau s \mathfrak{L}$ punctis et quibusvis duobus $\tau s An\infty$ similium valeat, valet et de homologis, ergo (Def. 44) $\mathfrak{L}$ et $An\infty$ sunt parallelae.

Zusatz. Mithin fällt der Theil von $AB\infty$, der nach Wegnahme von AB übrig bleibt, ausserhalb des Umfangs. Man denke sich in derselben Ebene einen Kreis mit dem Mittelpunkte B , der den Umfang $A\alpha B$ einschliesst. Dass das möglich ist, erkennt man, wenn man in der genannten Ebene um den Mittelpunkt B mit einem jeden Halbmesser, dessen anderer Endpunkt ein Punkt des Umfanges $A\alpha B$ ist, einen Kreis erzeugt, sodann jenseits des äussersten jener Kreise, die von dem Mittelpunkt B aus erzeugt sind, irgend einen Punkt p in derselben Ebene annimmt und mit der Geraden Bp und dem Mittelpunkte B' einen Kreis beschreibt. Dann trifft die Gerade AB den äusseren Umfang jenseits A' und kommt überhaupt nicht wieder in den Umfang $A\alpha B$, weil dann eine Gerade einen Kreis in drei Punkten schneidet. Dasselbe lässt sich von dem andern Theile von $AB\infty$ beweisen, indem man A' zum Mittelpunkte nimmt.

Lehrsatz 2. Fig. 7. Wenn die eine Kathete wächst, so wächst die Hypotenuse.

Denn man beschreibe einen Kreis mit dem Mittelpunkte δ' und dem Halbmesser $\delta\beta$. Dieser hat mit $\alpha\beta\alpha'\infty$ noch einen Punkt B' gemeinsam, wenn $B\alpha = \alpha\beta$ ist, weil $\triangle\delta\alpha\beta = \triangle\delta\alpha B$, also liegt die Gerade $B\beta\beta'\infty$, abgesehen von $B\beta$, ausserhalb des Umfangs, also auch γ (Lehrsatz 1, Zusatz), und deshalb ist $\delta\gamma$ grösser als $\delta\beta$.

Zusatz 1. Fig. 7 und 8. Bei rechtwinkligen Dreiecken bedingen mithin Kathete und Hypotenuse

Fig. 7.

Fig. 8.

die Gleichheit. Denn man lege DA auf $\delta\alpha$, so dass D' auf δ' fällt und A' auf α' . Die Winkel DAG und $\delta\alpha\gamma$ sind Rechte, endlich muss, da noch $DG = \delta\gamma$ ist, auch G' auf γ' fallen, denn alle andern Hypotenusen, die man von δ' aus nach $\alpha\gamma\gamma'\infty$ ziehen kann, sind entweder grösser oder kleiner.

Anmerkung. Es gilt jedoch nicht allgemein, dass ein Dreieck menfallen; wenn man ferner durch irgend zwei Punkte von $\mathcal{Q}$ eine Gerade zieht und eine andre durch irgend zwei Punkte von $An\infty$, wobei die Geraden $\mathcal{Q}$ und $An\infty$ bereits so liegen, wie in Fig. 1, so liegen auch die gezogenen Geraden in derselben Ebene und treffen nicht zusammen, da die eine von ihnen auf $\mathcal{Q}$, die andre auf $An\infty$ fällt. Da also dasselbe von je zwei beliebigen Punkten von $\mathcal{Q}$ und von je zwei beliebigen von $An\infty$ gilt, und beide Gerade einander ähnlich sind, so gilt es auch von entsprechenden Punkten, also (Def. 44) sind $\mathcal{Q}$ und $An\infty$ parallel.

et unum angulum determinari triangulum. Ex. gr. $\Delta^i B\delta\gamma$ est pars $\Delta\beta\delta\gamma$, quamvis ang. γ communis sit, latus quoque $\delta\gamma$ commune et $\delta B = \delta\beta$.

Fig. 9.

vero de quolibet Δ rectangulo valet, cum An et Ae quanta libet sumere fas est.

Cor[ollarium]. 3. Hinc cum Δ quodvis possit in duo Δ^a rectangula distingui, cujusvis Δ^i angulorum summa est $= 2$ rectis.

Th[eorēma]. 3. Si duas parallelas em et An (Fig. 9) recta secet in A' et m' , anguli alterni mAn et Ame sunt aequales, et $mAk = Am\gamma$.

Nam sit Am divisa bifariam in o' ; demittatur ex o' ad An perpendicularis. Si haec in oA cadat, tum ang. alterni sunt recti et aequales (Prob. 1., Cor. 2.).

Si extra oA cadat (ex. gr. in oa), tum ao continuata secare debet rectam em (per genesin $\tau\delta em$ in Prob. et Fig. 1); transiens ao in plagam rectae Am alteram secat rectam me in β ; $\Delta Aao = m\beta o$; anguli verticales sunt aequales et ang. a et β sunt recti (Prob. 1., Cor. 2.), ergo tertius aequalis tertio, et latus $Ao = om$.

Fig. 10.

Hinc et complementa ad duos rectos angulorum horum duorum alternorum pariter alterni sunt aequales.

Cor[ollarium]. 1. Hinc et externus = interno opposito, nempe $\gamma m\delta = mAn$, nam $\gamma m\delta =$ verticali Ame , qui est $= mAn$.

Cor[ollarium]. 2. Hinc (Fig. 10), si duas parallelas em et An

durch zwei Seiten und einen Winkel bestimmt ist. Zum Beispiel bildet das Dreieck $\beta\delta\gamma$ einen Theil des Dreiecks $B\delta\gamma$, obgleich der Winkel γ beiden gemeinsam ist, ebenso die Seite $\delta\gamma$ gemeinsam und $\delta B = \delta\beta$.

Zusatz 2. Entnimmt man daher aus Figur 1 $emnA$ und zieht (Fig. 9) Am , so ist $\triangle meA = \triangle Anm$. Man lege das eine dieser Dreiecke auf das andre, so ist sofort klar, dass die Summe aller Winkel des rechtwinkligen Dreiecks die Hälfte von vier Rechten ist. Dasselbe gilt aber in jedem beliebigen rechtwinkligen Dreiecke, da man An und Ae beliebig gross annehmen darf.

Fig. 9.

Zusatz 3. Da nun ein jedes Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt werden kann, so ist die Summe der Winkel eines jeden Dreiecks gleich zwei Rechten.

Lehrsatz 3. Werden zwei Parallelen em und An (Fig. 9) von einer Geraden in A' und m' geschnitten, so sind die Wechselwinkel mAn und Ame gleich und $mAk = Am\gamma$.

Denn man halbire Am in o' und fälle von o' das Lot auf An . Fällt dieses in oA , so sind die Wechselwinkel Rechte und einander gleich (Aufgabe 1, Zusatz 2).

Fällt es ausserhalb oA (zum Beispiel in oa), so muss die Verlängerung von ao , zu Folge der Erzeugung von em in Aufgabe und Figur 1, die Gerade em schneiden. Nach dem Uebergange auf die andre Seite der Geraden Am möge ao die Gerade me in β schneiden. Dann ist $\triangle Aao = m\beta o$; die Scheitelwinkel sind [nämlich] einander gleich, die Winkel α und β sind Rechte (Aufgabe 1, Zusatz 2), also ist auch der dritte Winkel dem dritten gleich, und überdies ist die Seite Ao gleich om .

Mithin sind für diese beiden Wechselwinkel auch die Ergänzungen zu zwei Rechten, die wiederum Wechselwinkel sind, einander gleich.

Fig. 10.

Zusatz 1. Mithin ist auch ein äusserer Winkel gleich dem inneren entgegengesetzten, also $\gamma m\delta$ gleich mAn , denn $\gamma m\delta$ ist gleich seinem Scheitelwinkel Ame , der gleich mAn ist.

Zusatz 2. Werden mithin (Fig. 10) zwei Parallelen em und An

duae parallelae eA et mn secant, et sectionis puncta sint e' , m' , A' et n' : tunc $em = An$ et $eA = mn$, nam $\triangle eAm = nmA$, quia alterni aequales et Am commune.

Th[eorema]. 4. Si (Fig. 9) ang[ul]i alterni sint aequales: tum rectae sectae concurrere nequeunt. Nam si $emA = mAn$ et $Am\gamma = mA\kappa$, superponatur linea composita ex Am , $m\gamma\gamma'\infty$ et $Ann'\infty$ lineae compositae ex Am , $A\kappa\kappa'\infty$ et $mee'\infty$, cadet A' in m' , m' in A' , $m\gamma\gamma'\infty$ in $A\kappa\kappa'\infty$ et $Ann'\infty$ in $mee'\infty$, consequ., si $mee'\infty$ et $A\kappa\kappa'\infty$ concurrerent, etiam $Ann'\infty$ et $m\gamma\gamma'\infty$ concurr[er]ent, et tum duae rectae duo puncta communia habentes non coinciderent.

Cor[ollarium]. Hinc si internus externo opposito sit aequalis demonstratur idem.

Th[eorema]. 5. Fig. 11. Si Δ^i latus prolongetur, angulus externus $x = y + z$, nam $x + v = 2$ rectis $= y + z + v$; subtracto v ex utroque membro est $x = y + z$.

Fig. 11.

Fig. 12.

Th[eorema]. 6. Si (Fig. 12) $ad = db$ et $af = fc$ tum $df = \frac{bc}{2}$.

Nam fiat rectae bc per d' parallela; haec per ac in puncto quodam f' transeat necesse est; quia supra rectam $bc\infty$ ex una plaga rectae $baa'\infty$ in alteram debet transire, nam in ipsam $baa'\infty$ cadere nequit, cum ita non esset parallela; itaque in $\triangle abc$ ingreditur, egredi quoque ex eo debet (demonstrari potest modo ex Th. 1 Corol. petito), quod cum nequeat per bc fieri, nempe parallelam per ac fieri debet; fiat in f' ; deinde ducatur per d' ipsi ac parallela transeat ea per bc

von zwei Parallelen eA und mn geschnitten, und sind e' , m' , A' und n' die Schnittpunkte, so ist em gleich An und eA gleich mn , denn das Dreieck eAm ist gleich dem Dreiecke nmA , weil Wechselwinkel gleich sind, und Am beiden gemeinsam ist.

Lehrsatz 4. Wenn (Fig. 9) Wechselwinkel einander gleich sind, so können die geschnittenen Geraden nicht zusammentreffen.

Denn ist emA gleich mAn und Amy gleich mAk , so lege man den aus Am , $my\gamma'\infty$ und $Ann'\infty$ zusammengesetzten Linienzug auf den aus Am , $Akk'\infty$ und $mee'\infty$ zusammengesetzten Linienzug. Dann fällt A' auf m' , m' auf A' , $my\gamma'\infty$ auf $Akk'\infty$ und $Ann'\infty$ auf $mee'\infty$, folglich müssten, wenn $mee'\infty$ und $Akk'\infty$ zusammenträfen, auch $Ann'\infty$ und $my\gamma'\infty$ zusammentreffen, und dann fielen zwei Gerade, die zwei Punkte gemeinsam haben, nicht zusammen.

Zusatz. Ist daher ein innerer Winkel einem äussern entgegengesetzten gleich, so lässt sich dasselbe beweisen.

Lehrsatz 5. Fig. 11. Wird die Seite eines Dreiecks verlängert, so ist der Aussenwinkel $x = y + z$.

Denn es ist $x + v = 2$ Rechten $= y + z + v$. Zieht man auf beiden Seiten v ab, so ist $x = y + z$.

Fig. 11.

Fig. 12.

Lehrsatz 6. Ist (Fig. 12) $ad = db$ und $af = fc$, so ist $df = \frac{1}{2} bc$.

Denn man ziehe durch d' zu bc die Parallele. Diese muss durch ac in einem gewissen Punkte f hindurchgehen, weil sie oberhalb der Geraden $bc\infty$ von der einen Seite der Geraden $baa'\infty$ auf die andre übergehen muss, denn auf $baa'\infty$ selbst kann sie nicht fallen, da sie dann keine Parallele wäre. Sie tritt also in das Dreieck abc ein und muss auch aus diesem austreten, was man durch ein dem *Zusatze* des ersten Lehrsatzes entlehntes Verfahren beweisen kann. Da dies durch bc ,

in e' : tum $\Delta dbe = adf$, nam ang. $dbe = adf$ (scilicet internus externo opposito), $bd = da$, et ang. $bde = daf$ (externus interno opposito), ergo $be = df = ec$ (Th. 3, Cor. 2); ergo $bc = 2df$.

Prob[lema]. 2. Construere Δ ex datis angulis x, y, z , quorum summa $= 2$ rectis.

Res[olutio]. Fig. 13. Iungantur rectae ab et ac in a' ad angulum x , ducatur bc ; tum angulorum acb et abc summa $= y + z$ (Th. 2, Cor. 3), ergo aut unum eorum aequale y , alterum $= z$, aut unum est majus aliquo $\tau\omega\nu$ y et z , alterum plane tanto minus $\tau\omega\nu$ y et z altero. Sit $abc > y$, tum moveatur $bcc' \infty$ circa b' per ca porro, donec in $baa' \infty$ perveniat, adeoque ang. abc fiat 0. Durante eo motu (quia ang. abc per omnes angulos ipso abc minores variatur)

sistatur $bcc' \infty$ ibi quando angulum cum ba facit $= y$; tum quoque $bcc' \infty$ per ac transit, quia omnis recta ex b' inter ab et bc ducta per ac transire debet, tum ergo adest Δ petitum, tertius enim angulus $= 2$ rectis $-(x + y) = z$.

Fig. 13.

Fig. 14.

Prob[lema]. 3. Sit (Fig. 14) $a = x$, $ax\mu = y$, $ax\kappa = z$; detur recta definita b ; quaeritur recta ipsâ b major ejusmodi, quae unum

als Parallele [zu df], nicht geschehen kann, so muss es durch ae geschehen. Es geschehe in f' . Sodann ziehe man durch d' die Parallele zu ae , die in e' durch bc gehen möge. Dann ist das Dreieck dbe gleich dem Dreiecke adf , denn der Winkel dbe ist gleich adf , (nämlich der innere dem äussern, entgegengesetzten), bd ist gleich da , und der Winkel bde gleich daf (der äussere dem innern, entgegengesetzten). Also ist $be=df=ec$ (Lehrsatz 3, Zusatz 2), also $bc=2df$.

Aufgabe 2. Ein Dreieck aus gegebenen Winkeln x, y, z zu construiren, deren Summe gleich zwei Rechten ist.

Auflösung. Fig. 13. Man lege die Geraden ab und ac in a' unter dem Winkel x an einander und ziehe bc , dann ist die Summe der Winkel acb und abc gleich $y+z$ (Lehrsatz 2, Zusatz 3), also ist entweder einer von ihnen gleich y , der andre gleich z , oder der eine ist grösser als der eine der beiden Winkel y und z , der andre um eben soviel kleiner als der andre der Winkel y und z .

Fig. 13.

Es sei $abc > y$. Dann bewege man $bcc'\infty$ um b' durch ca fort, bis es nach $baa'\infty$ gelangt, und somit der Winkel abc gleich Null wird. Während dieser Bewegung, bei welcher der Winkel abc alle Winkel, die kleiner als abc sind, durchläuft, halte man $bcc'\infty$ an der Stelle fest, wo es mit ba einen Winkel gleich y bildet. Auch dann geht $bcc'\infty$ noch durch ac , weil eine jede Gerade, die zwischen ab und bc von b' aus gezogen ist, durch ac hindurchgehen muss. Man hat also dann das verlangte Dreieck, denn der dritte Winkel ist gleich zwei Rechten, vermindert um $x+y$, also gleich z .

Fig. 14.

Aufgabe 3. Es sei (Fig. 14) $\alpha = x$, $\alpha x \mu = y$, $\alpha \mu x = z$, und gegeben sei eine bestimmte Gerade b . Gesucht wird eine Gerade, die

extremum in crure $aww' \infty$ habeat, alterum in crure $aaa' \infty$ sitque parallela ipsi μx .

Res[olutio]. Accipiat $xw = xa$ et $\mu a = \mu a$, atque (ex Theor. 6) recta wa erit $2\mu x$; iterum si in $aww' \infty$ accipiat ex w' recta $= aw$ et in $aaa' \infty$ ex a' accipiat recta $= aa$ et hoc continuetur; tum $x\mu$ crescet in progressionem geometricam (exponente 2), adeoque evadet aliquando major quam b .

Cor[ollarium]. Ita si μx sit majus quam b , potest μx in talem rectam ipsa b minorem variari, quae unum extremum in $a\mu$ habeat, alterum in ax ; si rectae $a\mu$ et ax bisectae fuerint et methodus plane exercita retrorsum continuetur, ut $x\mu$ decrescat in progressionem cadente geometrica exponentis $\frac{1}{2}$ (Th. 6).

Prob[lema]. 4. Fig. 14. Sit (juxta Prob. praec.) $x\mu < b$ et $wa > b$, et $ws = b$ et $xr = b$, quaeritur recta aequalis ipsi b unum extremum in aw , alterum in aa habens, et ipsi μx parallela.

Res[olutio]. Ducatur sr . Ea transeat in t' per μa ; ducatur tu ita ut ang. atu sit $= a\mu x$, tum tu , $x\mu$ et wa nunquam concurrere queunt (Th. 4, Cor.); adeoque tu per xw transire debet, fiat id in u' ; porro rs est parallela ipsi xw ; nam si demittantur ex r' et s' perpendiculares ad $aw \infty$, illae aut ipsae μx et sw erunt (et tum, quia $rx = sw$, erunt rs et xw parallelae (Prob. 1) aut perpendicularis ex r' erit rq et altera ex s' erit sh , tum vero $\Delta rqx = shw$, nam $x = w$, $q = h$, ergo $r = s$, porro $rx = sw$; hinc $rq = sh$, et (Prob. 1) rs est parallela ipsi xw . Porro etiam tu est parallela ipsi sw , nam per t' potest parallela duci ipsi sw , et ea talis esse debet, ut ang. $waa = uta$ (internus externo opposito), tu vero talis est, neque alia recta datur in hac plaga rectae aa , quae cum at in t' angulum aequalem atu faciat; hinc illa est ex t' sola parallela ipsi sw (sensu Prob. 1 Scholii intelligenda).

Hinc (Th. 3, Cor. 2) $tu = sw = b$, quod erat petendum.

grösser als b und so beschaffen ist, dass sie ihren einen Endpunkt auf dem Schenkel $aww'\infty$, den andern auf dem Schenkel $aaa'\infty$ hat, und dass sie zu μx parallel ist.

Auflösung. Man nehme xw gleich xa an und μa gleich μa , so ist (nach Lehrsatz 6) die Gerade wa gleich $2\mu x$. Nimmt man wiederum auf $aww'\infty$ von w' aus eine Gerade gleich aw an, und nimmt auf $aaa'\infty$ von a' aus eine Gerade gleich aa an und fährt so fort, so wächst μx in einer geometrischen Progression mit dem Exponenten 2 und wird somit einmal grösser als b .

Zusatz. Ebenso kann man, wenn μx grösser als b ist, μx durch eine Gerade ersetzen, die kleiner als b ist und die ihren einen Endpunkt auf $a\mu$, den andern auf ax hat, indem man nämlich $a\mu$ und ax halbt und das soeben angewandte Verfahren rückwärts fortsetzt, sodass μx in einer fallenden geometrischen Progression mit dem Exponenten $\frac{1}{2}$ abnimmt (Lehrsatz 6).

Aufgabe 4. Fig. 14. Es sei (gemäss der vorhergehenden Aufgabe) $\mu x < b$ und $wa > b$, sowie $ws = b$ und $xr = b$. Man sucht eine Gerade, die gleich b ist, ihren einen Endpunkt auf aw , den andern auf aa hat und die zu μx parallel ist.

Auflösung. Man ziehe die Gerade sr , die μa in t' überschreite, und ziehe tu so, dass der Winkel atu gleich $a\mu x$ ist. Dann können tu , μx und wa niemals zusammentreffen (Lehrsatz 4, Zusatz), und tu muss xw überschreiten, was in u' geschehen möge. Ferner ist rs zu xw parallel; werden nämlich von r' und s' aus Lote auf $aw\infty$ gefällt, so sind diese entweder μx und sw selbst, und dann sind, weil $rx = sw$ ist, rs und xw parallel (Aufgabe 1), oder das Lot von r' aus ist rq , und das andre von s' aus ist sh . Dann aber ist $\Delta rqx = shw$, denn es ist $x = w$, $q = h$, also $r = s$, und ferner ist $rx = sw$, mithin $rq = sh$, und rs ist (nach Aufgabe 1) zu xw parallel. Ferner ist auch tu zu sw parallel, denn durch t' lässt sich eine Parallele zu sw ziehen, und diese muss so beschaffen sein, dass der Winkel waa gleich uta ist, ein innerer dem äussern, entgegengesetzten. Aber tu ist so beschaffen, und es giebt auf dieser Seite der Geraden aa keine andre Gerade, die mit at in t' einen Winkel gleich atu bildete. Mithin ist jene Gerade von t' aus die einzige Parallele zu sw (aufzufassen im Sinne der Anmerkung zu Aufgabe 1).

Mithin ist (Lehrsatz 3, Zusatz 2) $tu = sw = b$, was verlangt war.

Cor[ollarium]. Hinc ex Probl. 2., 3., 4. patet construi posse Δ , ejus unum latus est datum b et angulorum adjacentium unus datus y , alter vero datus z .

Th[eorema] 7. (Fig. 15). Sit quaevis recta AB , et rectae BD et AC in eadem plaga rectae AB in eodem plano; et sit ang. $CAB + ABD < 2$ rectis, tum $ACC' \infty$ et $BDD' \infty$ se invicem secabunt.

Fig. 15.

Nam (Probl. 4 et Cor.) sit ang. $A = y$, ang. $B = z$ et $AB = b$, atque A in u' cadens, B in t' ; tum $BD \infty$ et $t\mu \infty$ coincident, nec non $AC \infty$ et $ux \infty$ adeoque illud punctum, quod ipsis $t\mu \infty$ et $ux \infty$ commune est, etiam ipsis $BD \infty$ et $CA \infty$ commune est.

Th[eorema] 8. Rectae unica tantum per aliquod punctum datur parallela (Def. 44).

Nam ducatur alia (Fig. 1), una plaga intra parallelam ibidem constructam cadens. Summam angulorum internorum minorem faciet duobus rectis, nam duo anguli interni ibidem ambo recti sunt (Probl. 1, Cor. 2), adeoque (Th. 7) se invicem secarent $An \infty$ et illa linea, quae praeter parallelam in Fig. 1 per idem punctum duceretur.

Ad Theoriam parallelarum supplementum.

XI. Fig. 5^o repraesentat lineam ejusmodi $mdefg \dots$ quae nominetur Π ; ad md erigatur perpendicularis $\phi k \infty$; porro $md\delta' \infty$ vocetur Q , ac moveatur Q circa m' per lineam $mdefg \dots$ semper porro in ∞ . Dum Q in $mee' \infty$ perveniet, quaeritur quorsum latus sequens cadet; ut hoc patefiat sectio prius sequens tractabitur.

XII. $\S$ extra $mdefg \dots$ cadat necesse est (nimirum ubi latera angulum convexum faciunt); nam

Zusatz. Mithin lehren die Aufgaben 2., 3., 4., dass man ein Dreieck construiren kann, dessen eine Seite die gegebene Gerade b ist und bei dem von den anliegenden Winkeln der eine der gegebene Winkel y , der andre der gegebene Winkel z ist.

Lehrsatz 7. (Fig. 15). Es sei AB eine beliebige Gerade, und die Geraden BD und AC mögen auf derselben Seite der Geraden AB in derselben Ebene liegen, und es seien die Winkel CAB und ABD zusammen kleiner als zwei Rechte. Dann werden $ACC'\infty$ und $BDD'\infty$ einander schneiden.

Fig. 15.

Denn es sei (Aufgabe 4 und Zusatz) der Winkel A gleich y , der Winkel B gleich z und AB gleich b , und A' falle auf u' , B' auf t' . Dann fallen $BD\infty$ und $t\mu\infty$ zusammen, und ebenso $AC\infty$ und $u\kappa\infty$, somit ist der Punkt $[a]$ der $t\mu\infty$ und $u\kappa\infty$ gemeinsam ist, auch den Geraden $BD\infty$ und $CA\infty$ gemeinsam.

Lehrsatz 8. Zu einer Geraden giebt es durch einen beliebigen Punkt nur eine Parallele (Def. 44).

Denn man ziehe eine andre (Fig. 1), die auf der einen Seite innerhalb der dort construirten Parallelen liegt. Sie wird als Summe der inneren Winkel weniger als zwei Rechte ergeben, denn die beiden inneren Winkel ebenda sind beide Rechte (Aufgabe 1, Zusatz 2), also müssten (Lehrsatz 7) $An\infty$ und jene Linie, die ausser der Parallelen in Fig. 1 durch denselben Punkt gezogen würde, einander schneiden.

Nachtrag zu der Theorie der Parallelen.

XI. Figur 5^o stellt eine solche Linie $mdefg\dots$ dar, die Π genannt werden möge. Auf md errichte man die Senkrechte $pk\infty$. Ferner werde $md\alpha\infty$ mit Q bezeichnet, und Q werde um m' herum durch die Linie $mdefg\dots$ immer weiter bis ins Unendliche bewegt. Wenn Q nach $mee'\infty$ gelangt, so fragt es sich, wohin die folgende Kante $[ef]$ fallen wird. Damit dies klar werde, schalten wir zuvor den folgenden Abschnitt ein.

XII. $\mathcal{Q}$ fällt nothwendig ausserhalb $mdefg\dots$, das heisst, dahin, wo die Kanten einen erhabenen Winkel bilden. Denn:

1) Fig 5'. Si $\mathcal{Q}$ habeat ejusmodi partem, cujus medium et duo extrema in peripheriam circuli alicujus cadant, tum tota $\mathcal{Q}$ in gyrum

Fig. 5.

torquebitur; nam sint a', b', d' puncta illa; accipiaturs angulus $bde = abd$, erit e' in $\mathcal{Q}$, et in eadem peripheria, quia e' eo

cadit, ubi arcui db aequalis arcus ultra d' finitur, tum enim angulus $bde = abd$ (per trium illorum $\Delta\Delta$ ^{lorum} et angulorum ad basin aequalitatem). Hinc si db arcus ultra e' et ita porro transferatur, in gyrum redigeturs $\mathcal{Q}$ (quoties libuerit); tum ab aut est pars aliquota peripheriae, et tunc $\mathcal{Q}$ in a' rediit, aut non, et hoc in casu prodibit latus ik . Tum e medio lateris cujusvis eruta perpendicularis aliud aliquod latus egrediendo secabit, adeo-

Fig. 5'.

que lineam $\mathcal{Q}$ in duobus saltem punctis secabit (secaret partem lineae $\mathcal{Q}$ illi lateri adnexam, ad quam perpendicularis ducta erigitur,

1) Fig. 5'. Enthält $\mathfrak{L}$ einen solchen Theil, dessen Mitte und dessen beide Endpunkte in den Umfang eines Kreises fallen, so wird sich dann

Fig. 5°.

die ganze Linie $\mathfrak{L}$ im Kreise herumwinden. Es seien nämlich a', b', d' diese Punkte. Man nehme den Winkel bde gleich abd an, dann liegt e' auf $\mathfrak{L}$ und auf demselben Umfange, weil e' dahin fällt, wo ein dem Bogen db gleicher Bogen jenseits d' endigt; denn alsdann ist der Winkel bde gleich abd , weil jene drei Dreiecke und die Winkel an ihren Grundlinien gleich sind. Wird mithin der Bogen db über e' hinaus immer wieder abgetragen, so zieht sich $\mathfrak{L}$ beliebig oft im Kreise herum. Dann ist ab entweder ein echter Theil des Umfanges und alsdann ist $\mathfrak{L}$ in a' in sich zurückgekehrt, oder das ist nicht der Fall, und dann entsteht die Kante ik . Dann schneidet die in der Mitte einer Kante errichtete Senkrechte jedesmal beim Heraustreten eine

Fig. 5'.

altera vice lateri per quod transiit adnexam); quo pacto $\mathcal{Q}$ rediit (VI.).

2) Fig. 5''. Pars lineae $\mathcal{Q}$ lateri cuius lineae Π adnexa in unam plagam lateris ejus cadit, nam prius in aliquâ plaga incipere debet (ex. gr. extra, uti ea); transeat in alteram plagam; ab altero extremo (Ac. Ax. 2) item in eadem plaga plane ita incipiet; transeat in alteram plagam per γ' ; (num inter a' et γ' adhuc redierit in

Fig. 5''.

plagam priorem, haud in censum venit). Erunt rectae puncta a' , γ' , d' cum $\mathcal{Q}$ communia. Accipiat b' e plaga interiore; fiat ad (pars lineae $\mathcal{Q}$) = $b\gamma$; erit $ab = d\gamma$, porro fiat $bk =$ parti γa ; cadet k' inter e' et a' , nam ak oportet esse = $b\gamma = ad$, remanere autem ke debet; nam vocetur A pars $ea = \gamma d$, et vocetur B pars $a\gamma$, erit rectae ed adnexa = $2A + B$, unde si dematur ad (quod est minus quam A) manebit plus quam $A + B$, adeoque ultra $A + B$ adhuc superesse ke oportet. Tum vero erit pars $abk = d\gamma a$, adeoque a' , b' , k' sunt in rectâ, at tum recta ab transeundo ex una plaga in aliam secabit rectam ed , et ab b' in k' eundo pariter, adeoque duo puncto habebunt duae rectae communia nec tamen coincident (contra superius demonstrata). Consequ. $\mathcal{Q}$ cum recta tria puncta habere nequit communia; demonstratio eadem est si recta inter duo exteriora lineae $\mathcal{Q}$ puncta (e tribus dictis) ut latus consideratur.

3) Fig. 5'''. Pars lineae $\mathcal{Q}$ lateri cuius adnexa cadit in plagam exteriorem lateris ejus. Nam sint ef et ed latera lineae Π ; sit eo recta angulum fed bifariam secans, sint a' et b' mediotullia laterum dictorum. Si perpendiculares ex iis (ad latera erectae) secant rectam $eo\infty$, tum per $\Delta\Delta^{\text{orum}}$ aequalitatem f' , e' , d' in periphèria circuli erunt, adeoque $\mathcal{Q}$ rediit (per 1.). Si vero perpendicularis quaedam inter e' et a' sit ad fe , quae (si perpendicularis ad fe a e' incipiendo per $eo\infty$ moveatur manente ef in $eff'\infty$) erit limes, antequam perpendicularis mota semper [secabit] et ibi primâ vice,

gewisse andre Kante und schneidet somit die Linie $\mathcal{L}$ in wenigstens zwei Punkten; sie würde nämlich den Theil der Linie $\mathcal{L}$ schneiden, der zu jener Kante gehört, auf der die gezogene Senkrechte errichtet ist, und wiederum den Theil, der zu der Kante gehört, durch die sie hindurchgegangen ist. Auf diese Weise ist $\mathcal{L}$ in sich zurückgekehrt (VI).

2) Fig. 5''. Der zu einer beliebigen Kante von Π gehörige Theil von $\mathcal{L}$ fällt [ganz] auf die eine Seite dieser Kante. Denn zunächst muss die Linie $\mathcal{L}$ auf irgend einer Seite beginnen, zum Beispiel ausserhalb, wie ea .

Sie möge auf die andre Seite hinübergehen. Am andern Endpunkte (s. Axiom 2) wird sie ebenfalls auf derselben Seite

Fig. 5''.

genau in derselben Weise beginnen. Sie möge durch γ' auf die andre Seite hinübergehen; ob sie bereits zwischen a' und γ' auf die andre Seite zurückgekehrt ist, kommt nicht in Betracht. Die Gerade $[ed]$ hat mit $\mathcal{L}$ die Punkte a', γ', d' gemeinsam. Man nehme b' auf der innern Seite an. Macht man ad (einen Theil der Linie $\mathcal{L}$) gleich $b\gamma$, so ist $ab = d\gamma$. Macht man weiter bk gleich dem Theile γa , so fällt k' zwischen e' und a' . Denn ak muss gleich $b\gamma$ gleich ad sein, und ke muss übrig bleiben. Bezeichnet man nämlich den Theil ea gleich γd mit A und den Theil $a\gamma$ mit B , so ist der zur Geraden ed gehörige Theil gleich $2A + B$; nimmt man davon ad hinweg, das kleiner ist als A , so bleibt mehr als $A + B$ übrig, und es muss somit ausser $A + B$ noch ke übrig bleiben. Dann aber ist der Theil abk gleich $d\gamma a$, und a', b', k' liegen [ebenso wie d', γ', a'] in einer Geraden. Dann aber schneidet die Gerade ab beim Uebergange von der einen Seite auf die andre die Gerade ed , und ebenso beim Uebergange von b' nach k' , und es haben zwei Gerade zwei Punkte gemeinsam, ohne zusammenzufallen, entgegen dem oben Bewiesenen. Folglich kann $\mathcal{L}$ mit einer Geraden nicht drei Punkte gemeinsam haben. Der Beweis ist derselbe, wenn man die Gerade zwischen zwei äussern Punkten der Linie $\mathcal{L}$ (von den drei genannten) als Kante auffasst.

3) Fig. 5'''. Der Theil der Linie $\mathcal{L}$, der zu irgend einer Kante [von Π] gehört, liegt auf der äussern Seite dieser Kante. Denn es seien ef und ed Kanten der Linie Π , ferner sei eo die Halbierungslinie des Winkels fed , und a' und b' seien die Mittelpunkte der genannten Kanten. Schneiden die in a' und b' auf den Kanten errichteten Senkrechten die Gerade $eo\infty$, so liegen f', e', d' wegen der Gleichheit der Dreiecke auf dem Umfange eines Kreises, und $\mathcal{L}$ kehrt nach 1) in sich zurück. Giebt es aber, wenn man die Senkrechte auf fe von e' anfangend durch $eo\infty$ bewegt, während ef in $eff\infty$ bleibt

giebt es da auf fe zwischen e' und a' eine gewisse Senkrechte, welche die Grenze bildet, vor deren Erreichung die bewegte Senkrechte immer

Fig. 5'''.

die Gerade $eo o' \infty$ schneidet und bei deren Erreichung sie das zum ersten Male nicht thut, so fälle man von o' aus auf fe das Lot, das in u' treffen möge, und beschreibe mit dem Halbmesser eo um den Mittelpunkt o' einen Kreis. Dieser wird, da die Hypotenuse eo grösser ist, als die Kathete uo , ausserhalb ef beginnen und durch uf zwischen u' und f' hindurchgehen; denn uf ist grösser als ue , und daher, nach dem Vorhergehenden, fo grösser als eo .

Nun fällt der Theil der Linie Ω , der zu einer Kante gehört, nach 2) entweder auf die innere oder auf die äussere Seite. Fällt er auf die innere, so tritt er entweder in den Kreis ein, wie erd , oder nicht. Geschieht das erste, so muss er, um nach d' zu kommen, was ausserhalb des Kreises liegt, heraustreten, und dann fallen e', t', u' in den Umfang, Ω kehrt somit nach 1) in sich zurück. Tritt Ω nicht in den Kreis ein, dann ist der zur Kante ed gehörende Theil entweder $eqsd$ oder $epxd$, und der zur Kante ef gehörende Theil ist $eyxf$ für $epxd$ und $evsf$ für $eqsd$; der zur Kante ed gehörende Theil kann nämlich nicht durch f' gehen, weil der zur Kante ef gehörende Theil nach f' kommt,

XIV. Denkt man sich daher bei jedem Theile die Mitte, wie die des Theiles md in t' , und zieht dahin von den Endpunkten der Kante aus Gerade, wie mt und td , denkt man sich ferner auch die Mitte des Theiles mt und zieht dahin von m' und t' aus Gerade und so fort ins Unendliche, sodass der zu jeder Kante gehörende Theil der Linie $\mathfrak{L}$ in einer geometrischen Progression mit dem Exponenten $\frac{1}{2}$ abnimmt, dann fällt der Theil mt auf Grund von XII. ausserhalb der Geraden mt , und $\mathfrak{L}$ fällt ausserhalb aller dieser Kanten.

XV. Der Theil ef fällt zwischen ey und die Gerade ef ; denn läge er unterhalb ey , so hätte $\mathfrak{L}$ beim Uebergange von e' nach f' ausser e' und m' mit der Geraden $[mey]$ noch einen Punkt gemeinsam, und $\mathfrak{L}$ kehrte daher in sich zurück. In ähnlicher Weise erkennt man, dass der Theil ef zwischen die Geraden eu und ef fällt.

XVI. Fig. V'''. Der Winkel, den md mit der Geraden bildet, die von m' aus nach dem Endpunkte jeder einzelnen Kante der Linie Π gezogen ist, ist gleich dem Winkel, den jene Kante mit derselben Geraden bildet; zum Beispiel ist $gmd = mgf$ und $hmd = mhg$.

Fig. V'''.

Denn von m' an bis zu jener letzten Kante ist die Anzahl der Kanten der Linie Π entweder gerade oder ungerade. Ist sie gerade, wie zum Beispiel von m' an bis zu g' , so sei z' die Mitte der Geraden gm . Man ziehe die Gerade ez und lege $gfez$ auf $mdex$. Es bleibe e' in e' ; f' kann auf d' , g' auf m' fallen, dann aber fällt z' auf z , denn ez ist die

gemeinsame Kante, und mz ist gleich gz , ez und mz aber können einander auf dieser Seite nur in einem Punkte schneiden (nach dem Früheren).

Ist die Anzahl ungerade, wie bei $hgfedm$, so sei w die Mitte der Kante ef und i die Mitte der Kante hm . Man lege $wfghi$ auf $wedmi$. Es bleibe w in w ; f' kann auf e' , g' auf d' , und h' auf m' fallen, und dann können mi gleich hi und wi gleich sich selbst einander auf dieser Seite nur in einem Punkte schneiden,

XVII. Hinc cum angulus ad m' per motum rectae Q crescat, et anguli verticales sint aequales, angulus qui apud d' est $= o$ et fit $= \alpha$ apud e' , fit major in β , adhuc major dum γ fit, crescit in majus fiendo δ et ita porro sine fine (non asseritur in ∞).

XVIII. Fig. 5^o. Angulus quem facit latus quodvis productum cum $\mathcal{L}$ porro fluente est ubique aequalis (per dicta). Angulus quem facit eu cum parte fe lineae $\mathcal{L}$ (cadente inter rectas ef et eu) est $=$ angulo quem facit fr cum parte fg lineae $\mathcal{L}$ (cadente inter fr et fg), quod continuari posse in ∞ patet. At si addatur angulus uey quem facit (si rectae Q (quod est $md d' \infty$) pars quae ultra $\mathcal{L}$ cadit, R vocetur) R cum lateris continuatione, cum hic crescat (XVII), et summa crescat; fiat ut exactius concipiatur radio certo (ex. gr. ef), qui semper idem maneat, centro (pro hoc casu e') arcus fy , hic mensura hujus anguli esse poterit.

XIX. At inquiramus, num hic angulus, quem R cum $\mathcal{L}$ facit, semper porro sine fine continuo crescat. Si Π varietur juxta XIV, ut latera fiant omni dabili minora, extremis venientibus omni dabili propius, tum quoque in cujusvis novi lateris initio angulus, de quo sermo est, crescit. Nullum vero tempus datur, sub quo non crevisset; nam secut in temporis ejus initio Q lineam $\mathcal{L}$ in aliquo puncto ϵ' (Fig. 5^v) et in fine temporis ejus in η' , erit pars $\epsilon\eta$ lineae $\mathcal{L}$ (denotante n numerum quantumlibet magnum) plus quam

Fig. 5^v.

ter major (parte $mt d$) $\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{mt d}{2^n}$, quod $=$ quantitati omni dabili minori, itaque et si lateris extremum non cadet in ϵ' , sed in a' , cum ϵa sit $<$ parte lineae $\mathcal{L}$ uni lateri adpertinente, remanebit adhuc, si ex a' accipiantur duo latera versus η' , aliquid, crescat ergo etiam sub hoc tempore angulus dictus, cum in fine cujusvis lateris crescat.

XX. Angulus hic (qui vocetur x) simul cum angulo quem Q cum latere primo facit, crescens sine fine continuo, aut in tantum

XVII. Da mithin der Winkel bei m' durch die Bewegung der Geraden Q wächst, und da Scheitelwinkel einander gleich sind, so wird dieser Winkel, der bei d' gleich Null und bei e' gleich α ist, bei β grösser, und noch grösser, wenn er γ wird, er wächst noch weiter, indem er gleich δ wird, und so weiter ohne Ende, es wird aber nicht behauptet, ins Unendliche.

XVIII. Fig. 5^o. Der Winkel, den die Verlängerung einer jeden Kante mit der sich immer weiter erstreckenden Linie $\mathcal{L}$ bildet, ist, nach dem Gesagten, überall derselbe. Der Winkel, den eu mit dem zwischen die Geraden ef und eu fallenden Theile fe der Linie $\mathcal{L}$ bildet, ist gleich dem Winkel, den fr mit dem zwischen fr und fg fallenden Theile fg der Linie $\mathcal{L}$ bildet, und das lässt sich augenscheinlich ins Unendliche fortsetzen. Fügt man aber den Winkel uey hinzu, den R , wenn der über $\mathcal{L}$ hinausfallende Theil der Geraden Q , das heisst $md\alpha\infty$, R genannt wird, mit der Verlängerung der Kante $[de]$ bildet so wächst dieser Winkel (XVII.), und daher wächst auch die Summe. Um eine genauere Vorstellung zu haben, beschreibe man mit einem gewissen Halbmesser, zum Beispiel mit ef , der immer derselbe bleibe, um einen Mittelpunkt, für den vorliegenden Fall um e' , den Bogen fy , der kann als Maass dieses Winkels dienen.

XIX. Fragen wir jedoch, ob nicht dieser Winkel, den R mit $\mathcal{L}$ bildet, immer weiter ohne Ende beständig wächst. Wenn Π , gemäss XIV., abgeändert wird, sodass die Kanten kleiner werden als jede angebbare Grösse, und ihre Endpunkte einander näher kommen als jede angebbare Grösse, so wächst auch dann beim Anfange einer jeden neuen Kante der Winkel, von dem die Rede ist. Es giebt aber keine Zeit, während der er nicht gewachsen wäre. Denn am Anfange dieser Zeit schneidet Q die Linie $\mathcal{L}$ in irgend einem Punkte ϵ' , und am Ende dieser Zeit in η' , dann ist der Theil $\epsilon\eta$ der Linie $\mathcal{L}$, wenn n eine beliebig grosse Zahl bezeichnet, mehr als dreimal so gross als der Theil

Fig. 5^v.

$mt\delta$ mal $\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{mt\delta}{2^n}$, also gleich einem Ausdrücke, der kleiner ist als jede angebbare Grösse. Wenn daher auch der Endpunkt der Kante nicht nach ϵ' , sondern nach α' fällt, indem $\epsilon\alpha$ kleiner ist, als der zu einer Kante gehörende Theil der Linie $\mathcal{L}$, so bleibt immer noch etwas übrig, wenn man sich von α' aus zwei Seiten nach η' hin denkt. Folglich wird der genannte Winkel auch während dieser Zeit wachsen, da er am Ende einer jeden Kante wächst.

XX. Da dieser Winkel, der x genannt werden möge, zugleich mit dem Winkel, den Q mit der ersten Seite bildet, ohne Ende

excrescet, ut Q ultra ϕk perveniat, et tunc si hucusque dicta ab altera parte ex d' praestentur, et pars $mtdefg \dots$ lineae $\mathfrak{L}$ et pars $dmp \dots$ ultra ϕk venient, adeoque aut in $\phi k\infty$ concurrerent duae partes, aut $\phi k\infty$ praeter t' adhuc duo puncta habebit cum $\mathfrak{L}$ communia, adeoque $\mathfrak{L}$ rediit; aut vero habebit x litem λ , ad quem omnidabili propius ibit, sed eum attingere nunquam poterit, donec Q circa m' per $\mathfrak{L}$ moveatur. Tum x in d' sit $= A$, incrementa vero semper nova sint $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ quae quamvis lege continui fiant, ita ut inter quaevis duo innumerabilia sint, nihilominus tamen ita exponere licet. Hoc pacto erit series infinita $A + \alpha + \beta + \gamma + \delta + \dots$, cujus summae limes est λ , id est cujus quocunque membra (parte in ∞ abeunte residuâ) summentur, tamen minus quam λ prodibit, et pro quâvis data quantitate q potest ad aliquod membrum usque omnium summa talis produci, cujus differentia ab λ sit $< q$. At si omnia membra seriei infinitae summari possent, ne ullum remaneat, limes ipse prodiret (in hoc casu λ). Atqui hic Q per omnia puncta partis $mtdefg \dots$ lineae $\mathfrak{L}\infty$ succedendo omnia incrementa acquisivit, omnibus ergo membris seriei summatis (plane in illo temporis puncto experte cum Q prima vice non est in $\mathfrak{L}$, inter quod et desertionem lineae $\mathfrak{L}$ mutatio nulla evenire potest, cum ad mutationem duae partes temporis adesse debent, punctum temporis autem est expers in quo prima vice exiit Q ex $\mathfrak{L}$) angulum x factum esse $= \lambda$ oportet, postquam Q ex $\mathfrak{L}$ exiit. Atqui hoc absurdum est, cum tunc $x = 0$ factum sit. Ergo absurdum est angulum x non crevisse eousque ut Q per $\phi k\infty$ transiret. Ergo $\mathfrak{L}$ nisi recta sit redit (contra I). Ergo $\mathfrak{L}$ recta est*).

*) [Das Axiom, das bei diesem Beweise stillschweigend vorausgesetzt wird, hat W. Bolyai selbst in dem *Generalis Conspectus Geometriae* folgendermassen formulirt:

Axioma intervalli.

„Si duarum linearum simplicium uniformium utrinque ∞ tarum, in plano se invicem secantium, apertura (id est angulus ad punctum sectionis) maneat utrinque constante quodam earundem linearum angulo semper majore ante temporis t finem: in puncto experte temporis ipsum t terminante una alteram transilisse nequit.“]

beständig wächst, so wird er entweder so weit anwachsen, dass Q über ϕk hinaus gelangt, und dann wird, wenn das bis jetzt Gesagte auch auf den andern Theil [von $\mathfrak{L}$] von $\mathfrak{d}'$ aus angewandt wird, sowohl der Theil $mtdefg \dots$ der Linie $\mathfrak{L}$ als auch der Theil $dmp \dots$ über ϕk hinauskommen, und daher werden entweder in $\phi k\infty$ zwei Theile zusammentreffen oder $\phi k\infty$ wird ausser t' noch zwei Punkte mit $\mathfrak{L}$ gemein haben, also kehrt $\mathfrak{L}$ in sich zurück; oder x wird eine Grenze λ haben, der es näher kommt, als jede angebbare Grösse beträgt, die es jedoch niemals erreichen kann, so lange Q um m' herum durch $\mathfrak{L}$ bewegt wird. Alsdann sei x in $\mathfrak{d}'$ gleich A , die beständig neuen Zuwächse aber seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$; diese geschehen allerdings nach dem Gesetze der Stetigkeit, sodass es zwischen je zweien unzählig viele giebt, aber nichts desto weniger darf man sie so darstellen. Auf diese Weise erhält man die unendliche Reihe $A + \alpha + \beta + \gamma + \delta + \dots$, deren Summe zur Grenze λ hat, das heisst, bei der die Summe von beliebig vielen Gliedern (während der Theil, der ins Unendliche geht, als Rest übrig bleibt) kleiner als λ ausfällt, und bei der man, wenn eine beliebige Grösse q gegeben ist, die Summation bis zu einem solchen Gliede erstrecken kann, dass die Abweichung von λ kleiner ist als q . Könnte man jedoch alle Glieder der unendlichen Reihe summiren, sodass keines übrig bliebe, so erhielte man die Grenze selbst (in diesem Falle λ). Hier hat Q , indem es durch alle Punkte des Theiles $mtdefg \dots$ der Linie $\mathfrak{L}\infty$ geht, alle Zuwächse erschöpft. Hat man also alle Glieder der Reihe summirt — und das ist gerade in dem Augenblicke geschehen, wo sich Q zum ersten Male nicht in $\mathfrak{L}$ befindet, denn zwischen diesem Augenblicke und dem Verlassen der Linie $\mathfrak{L}$, kann keine Veränderung eintreten, da zu einer Veränderung zwei Zeittheile vorhanden sein müssen, jener Augenblick aber, in dem Q zum ersten Male aus $\mathfrak{L}$ herausgetreten ist, keinen Antheil an der Zeit hat — so muss der Winkel x gleich λ geworden sein, sobald Q aus $\mathfrak{L}$ herausgetreten ist. Das ist aber widersinnig, da alsdann $x = 0$ wird. Folglich ist es widersinnig, dass der Winkel x nicht soweit gewachsen sein soll, bis Q durch $\phi k\infty$ hindurchgeht. Folglich kehrt $\mathfrak{L}$ in sich zurück, gegen I., es sei denn eine Gerade. Folglich ist $\mathfrak{L}$ eine Gerade.

Briefwechsel zwischen Gauss und W. Bolyai.

Gauss an Bolyai		Bolyai an Gauss	
1)	Braunschweig, 29. Sept. 1797	1)	Göttingen, 31. Oct. 1798
2)	" , 21. April 1798	2)	" , 30. Dec. 1798
3)	" , 30. Sept. 1798	3)	" , 4. März 1799
4)	" , 29. Nov. 1798	4)	" , 20. März 1799
5)	" , 9. Jan. 1799	5)	" , 9. April 1799
6)	" , 22. April 1799	6)	" , 12. Mai 1799
7)	" , 17. Mai 1799	7)	" , 20. Mai 1799
8)	" , 29. Mai 1799	8)	" , 27. Mai 1799
9)	Helmstedt, 16. Dec. 1799	9)	Pest, 11. Sept. 1799
10)	Braunschweig, 3. Dec. 1802	10)	Clausenburg, 13. April 1800
11)	" , 20. Juni 1803	11)	Domáld, 11. Sept. 1802
12)	" , 28. Juni 1804	12)	Clausenburg, 24. Febr. 1803
13)	Braunschweig, 25. Nov. 1804	13)	Domáld, 1. März 1804
14)	Göttingen, 20. Mai 1808	14)	Maros Vásárhely, 16. Sept. 1804
15)	" , 2. Sept. 1808	15)	" , 18. Dec. 1807
16)	Göttingen, 6. März 1832	16)	" , 27. Dec. 1808
17)	" , 23. Oct. 1836	17)	" , 10. April 1816
18)	" , 20. April 1848	18)	Maros Vásárhely, 20. Juni 1831
		19)	Maros Vásárhely, 16. Jan. 1832
		20)	Maros Vásárhely, 20. April 1835
		21)	" , 4. Oct. 1835
		22)	" , 3. Oct. 1836
		23)	" , 18. Jan. 1848
		24)	" , 6. Febr. 1853

Bei den Briefen, aus denen im Vorstehenden Stücke mitgetheilt sind, ist jedesmal der Abgangsort und der Abgangstag cursiv gedruckt.

Einige für unsere Zwecke nicht in Betracht kommende Stellen aus Briefen von Gauss an Bolyai hat L. Hänselmann in seinem Buche: *Carl Friedrich Gauss*, Leipzig 1878, auf S. 40–42, 48, 49 und 92 abgedruckt.