7. *Doppelbrechung in Glasplatten bei statischer Biegung; von W. König.*

(Hierzu Taf. V, Figg. 1—5.)

In einer früheren Arbeit ¹⁾ habe ich den Nachweis geführt, daß in transversal schwingenden Glasplatten zwei Arten von Doppelbrechung auftreten, eine von der Krümmung der Platten, und eine von den scherenden Kräften herrührende. In den Schwingungsbäuchen ist nur die erstere, in den Schwingungsknoten nur die letztere Wirkung vorhanden; an den dazwischen liegenden Stellen treten beide Wirkungen gleichzeitig ein. Ich habe auch in jener Abhandlung bereits darauf hingewiesen, daß diese Wirkungen doppelter Art bei statischer Verbiegung einer Platte ebenfalls auftreten. In der bisherigen Literatur über diesen Gegenstand sind, soweit meine Kenntnis reicht, nur die Erscheinungen der ersten Art beschrieben worden, die von der Krümmung herrührenden Interferenzstreifen, die Brewster zuerst beobachtet hat.²⁾ Die schwächeren Wirkungen der scherenden Kräfte scheint man nicht beachtet zu haben. Aber gerade in ihnen enthüllt sich das feinere Spiel der elastischen Kräfte bei der Biegung, wie es de Saint-Venant in seiner exakten Theorie der Biegung behandelt hat, und die genaue Untersuchung der optischen Erscheinungen kann daher ein vortreffliches und bequemes Hilfsmittel abgeben, um die aus den Theorien der Elastizität gewonnenen Resultate auf ihre Richtigkeit zu prüfen. Von diesen Gesichtspunkten aus will ich im folgenden versuchen, eine genaue Beschreibung der Erscheinungen zu geben und den Zusammenhang der optischen mit den elastischen Vorgängen darzulegen. Leider bildet bei diesen Untersuchungen die schwache Doppelbrechung, welche die Platten infolge mangelhafter Kühlung auch in nicht gebogenem Zustande besaßen ³⁾, ein sehr störendes Moment. Während sie bei der starken Doppelbrechung infolge der Plattenkrümmung sich nur in einer geringfügigen Ortsveränderung der einzelnen Interferenzstreifen geltend macht,

1) W. König, Ann. d. Phys. 4. p. 1—40. 1901.

2) D. Brewster, Phil. Trans. 1816. I. Teil. p. 156—178.

3) W. König, Ann. d. Phys. 4. p. 2. 1901.

führt sie in den Gebieten schwacher Doppelbrechung zu beträchtlichen Verzerrungen der aus den elastischen Deformationen folgenden Erscheinungen, und beeinträchtigt die Deutlichkeit und Genauigkeit des Vergleiches zwischen den optischen und den elastischen Vorgängen. Der quantitativen Prüfung dieses Zusammenhanges ist durch die beschriebene Eigentümlichkeit des benutzten einfachen Spiegelglases, zu der sich noch eine weitere Störung durch das Vorhandensein von Schlierenflächen parallel zur Plattenebene gesellte, eine ziemlich enge Grenze gesteckt. Eine exakte quantitative Prüfung würde die Anwendung von fehler- und spannungsfreiem Glase verlangen, das nur mit unverhältnismäßig großen Kosten zu beschaffen sein würde. Zunächst genügen die unvollkommenen Glasplatten, um den Charakter der Erscheinungen kennen zu lernen.

Wie bei den schwingenden Platten die beiden Arten der Doppelbrechung in den Bäuchen und Knoten getrennt voneinander auftreten, so sind auch bei statischer Verbiegung Fälle möglich, in denen nur die eine oder nur die andere Art der Doppelbrechung an bestimmten Stellen des Stabes auftritt. Diese beiden Fälle sind wichtig, weil sie gestatten, die Eigentümlichkeiten jeder Art von Doppelbrechung für sich zu untersuchen. Ich bespreche zunächst diese Fälle und dann den allgemeinen Fall, in dem beide Formen der Doppelbrechung gleichzeitig auftreten.

1. Gleichförmige Biegung.

Man kann einen Stab so biegen, daß gar keine scherennden Kräfte in ihm auftreten, sondern nur die von der Krümmung bedingten Zug- und Druckspannungen in Richtung der Längserstreckung des Stabes. Man erreicht dies in bekannter Weise dadurch, daß man den Stab über zwei Schneiden biegt, wie es Fig. 1 andeutet.

Zwischen den Schneiden tritt dann der geforderte Zustand ein. In jedem Element dieses Teiles

Fig. 1.

des Stabes werden die Längsspannungen durch die gleichen Spannungen der Nachbarelemente aufrecht erhalten. Der Spannungszustand ist daher in der ganzen Längserstreckung dieses Teiles des Stabes der gleiche, und die Biegungskurve

dieses Teiles muß ein Kreis sein. Betrachtet man eine in dieser Weise gebogene Glasplatte zwischen gekreuzten Nicols, so treten, wenn die Polarisationssebenen der Nicols 45° mit der Längserstreckung der Platte bilden, die Brewsterschen Streifen auf und müssen innerhalb des ganzen, kreisförmig gebogenen Teiles der Platte mit unveränderlichem Abstand von der Mittellinie verlaufen. Dreht man aber die Nicols so, daß ihre Polarisationssebenen senkrecht und parallel zur Längserstreckung der Platte liegen, so muß die Platte vollkommen dunkel erscheinen. Der Versuch bestätigt dies.

Die Platte wurde in der durch Fig. 1 dargestellten Weise gebogen. Auf das starke Brett B_1 werden die Lager a und b aufgelegt, entweder scharfe Metall- oder Holzschneiden, oder runde Metallstäbe, darüber die Glasplatte, auf diese in der Nähe ihrer Enden zwei entsprechende Lager und über diese das starke Brett B_2 . Dieses wird entweder in der Mitte belastet, oder die beiden Bretter werden durch eine Schraubzwinge zusammengeschraubt. Zwischen den mittleren Schneiden a und b ist dann bei gekreuzten Nicols in der ersten Lage (45° gegen die Horizontale) der gleichmäßige Verlauf der Interferenzerscheinung sehr schön wahrzunehmen. Schwieriger ist es, die Biegung der Platte so fein zu regulieren, daß die Platte in der zweiten Nicollage vollkommen dunkel bleibt. Im allgemeinen war das bei den oben erwähnten Formen der Auflager niemals vollständig zu erreichen; vielmehr blieb bei Drehung der gekreuzten Nicols auch in der Stellung der größten Dunkelheit noch eine wenn auch schwache Interferenzerscheinung in Gestalt eines dem Brewsterschen ähnlichen Streifensystems wahrnehmbar, wenigstens bei Beobachtung mit einer intensiven Lichtquelle (Auerlicht). Diese Erscheinung rührt davon her, daß auch zwischen den mittleren Auflagern noch schwache scherende Kräfte vorhanden sind. Die Schwierigkeit, diese gänzlich auszuschließen, hat ihren Grund offenbar in dem Umstande, daß die Platte auf jedem Auflagerpaare nur in drei Punkten aufliegt, und daß bei der zufälligen Lage dieser Auflagerpunkte die beiden Kräftepaare, die die Biegung bewirken, im allgemeinen nicht in derselben Ebene liegen werden. Auch Überdecken der Auflager in ihrer ganzen Länge mit Leder- oder Gummipplatten verbesserte die Unregelmäßigkeit nicht wesentlich. Dagegen gelang es, sie durch

folgenden Kunstgriff zu vermeiden. Auf jedes Auflager wurden an zwei bestimmten Punkten schmale Gummischiebchen gelegt; diese bildeten nun die Angriffspunkte der auf die Platte wirkenden Kräfte. Sie konnten so orientiert werden, daß die entsprechenden Angriffspunkte für alle vier Auflager in einer zur Längsrichtung der Platte parallelen Vertikalebene lagen. Auf diese Weise gelang es, eine vollkommen scherungsfreie Biegung zwischen a und b durch genau zentrale oder symmetrische Belastung von B_2 zu erhalten. Die Platte blieb dann fast in der ganzen Erstreckung zwischen a und b vollkommen dunkel. Eine Störung der oben beschriebenen Art trat jetzt nur noch in der Nähe der Auflager ein, wo ja die Bedingungen der Theorie nicht streng erfüllt sind.

2. Biegung mit Wendepunkt.

Während der soeben erörterte Fall der Erscheinung im Schwingungsbauche entspricht, kann man die Erscheinungen im Schwingungsknoten statisch nachahmen, indem man die Platte in der durch Fig. 2 veranschaulichten Weise verbiegt.

Hier wird die Platte an den Auflagern m_1, m_3, m_5 nach oben, an den Stellen m_2 und m_4 nach unten gedrückt. Zwischen m_2

Fig. 2.

und m_3 und ebenso zwischen m_3 und m_4 findet ein allmählicher Übergang von der Krümmung im einen, zur Krümmung im anderen Sinne statt. In den Wendepunkten ist die Krümmung Null; die Brewsterschen Streifen verschwinden hier. Bei dieser Art der Verbiegung treten scherende Kräfte auf, die in den Wendepunkten allein zur Geltung kommen und hier eine Doppelbrechung von genau der gleichen Art, wie in den Knotenpunkten der schwingenden Platte, bewirken.

Als die in der beschriebenen Weise gebogene Glasplatte zwischen gekreuzten Nicols in der 45° -Lage an der Stelle des Wendepunktes untersucht wurde, zeigte es sich, daß die beiden neutralen Mittellinien des rechten und des linken Streifensystems sich an der Knotenstelle nicht zu einer die ganze Höhe der Platte ausfüllenden Dunkelheit vereinigten. Sie bogen vielmehr aneinander vorbei so, wie es die photographische Aufnahme der Erscheinung, Fig. 1, Taf. V erkennen läßt. Zur

richtigen Beurteilung ist es erforderlich hinzuzufügen, daß der betrachtete Wendepunkt der zwischen m_2 und m_3 gelegene war, d. h. daß die nach oben konvex gekrümmten Teile des Stabes zur Rechten, die nach unten konvex gekrümmten zur Linken der betrachteten Knotenstelle liegend zu denken sind. Das beobachtete Verhalten der Platte erklärt sich aus ihrer natürlichen Doppelbrechung. Die Platte verhält sich in der Mitte so, als wäre sie dauernd in ihrer Längsrichtung gedehnt, an den Rändern aber umgekehrt so, als wäre sie in der Längsrichtung zusammengedrückt. Daher bleibt an der Knotenstelle die Mitte hell und schließt sich an die durch die Krümmung hervorgerufenen Dehnungsgebiete rechts oben und links unten an. Dieses zentrale Dehnungsgebiet der natürlichen Doppelbrechung der Platte wird oben und unten durch neutrale Streifen begrenzt. Da wo diese die Knotenlinie schneiden, erscheint die letztere dunkel. Unmittelbar an den Rändern aber tritt wieder Aufhellung ein infolge der natürlichen Kompression der Masse, die hier herrscht. Diese wird aber in den Gebieten der durch die Krümmung hervorgebrachten Dehnung durch die mit der Entfernung von dem Wendepunkte wachsende Dehnung schließlich kompensiert; daher greifen die neutralen Streifen rechts oben und links unten in diese Dehnungsgebiete über.

Bei entgegengesetzter Verbiegung der Platte, wie sie etwa in dem rechts von m_3 gelegenen Wendepunkte statthat, ist natürlich auch der Verlauf der Streifen der entgegengesetzte. Daher waren diese Streifen bei den schwingenden Platten nicht wahrzunehmen, da sie sich während der Schwingung abwechselnd nach oben und nach unten bogen. Sie sind daher nicht zu verwechseln mit denjenigen Streifen, die ich auf p. 29 und 30 meiner Abhandlung über die schwingenden Platten beschrieben habe. Diese traten auf, wenn die Nicols aus ihrer 45° -Stellung nach rechts oder links herausgedreht wurden; sie hatten für entgegengesetzte Verbiegungen der Platte die gleiche Lage und erklären sich, wie ich an der genannten Stelle angedeutet habe, aus dem Zusammenwirken der scherennden Kräfte und der Längsspannungen. Auch bei der statischen Verbiegung machten sich diese Wirkungen geltend. Wurden die gekreuzten Nicols aus der 45° -Lage nach links herausgedreht (Fig. 3 b, der ersten Abhandlung), so blieben zwar

die Enden der Streifen an den Plattenrändern in ihrer Lage — an diesen Stellen ist eben die Doppelbrechung überhaupt gleich Null. Die übrigen Teile aber, besonders die gekrümmten Teile in der Nähe der Knotenlinie, verschoben sich, und zwar am linken Streifen nach links oben, am rechten nach rechts unten, und diese Erscheinung trat in beiden Wendepunkten in demselben Sinne ein. Im linken bewirkte sie nur eine Verflachung der Streifen, im rechten dagegen eine vollständige Umkehrung des Verlaufes, indem der linke Interferenzstreifen sich nach links oben, der rechte nach rechts unten krümmte. Die Streifen hatten dann also im rechten und im linken Wendepunkt sehr nahe das gleiche Aussehen. Es ist verständlich, daß eine Erscheinung dieser Art auch bei den Schwingungen mit ihren wechselnden Verbiegungen sichtbar war. Wurden die Nicols nach rechts aus ihrer 45° -Lage herausgedreht, so war in beiden Wendepunkten die Wirkung natürlich umgekehrt. Ich werde auf die genauere Theorie dieser Erscheinungen unten noch einmal zurückkommen.

Werden endlich die gekreuzten Nicols parallel und senkrecht zur Längsrichtung der Platte eingestellt, so zeigt die Stelle des Wendepunktes und ihre Umgebung eine gleichmäßige, nach den Rändern hin abnehmende Erhellung, etwa bis zum Weiß der ersten Ordnung. Es herrscht hier also in der ganzen Quererstreckung der Platte eine Doppelbrechung, deren Achsen 45° mit der Längsrichtung der Platte bilden. Durch Zwischenschalten von Glimmerplatten oder von gepreßtem Glas ließ sich leicht feststellen, daß die Dehnungsrichtung (die positive Achse der Doppelbrechung“, vgl. p. 29 der früheren Abhandlung) die positiven Quadranten, d. h. die Quadranten des Dehnungsgebietes halbiert. Diese Erscheinungen charakterisieren die optischen Wirkungen der Schubkraft. An ihnen läßt sich nun auch mit Leichtigkeit die Frage entscheiden, wie sich die Schubkräfte über den Querschnitt in Richtung der Dicke verteilen. Zu dem Ende wurde zwischen dem Analysator und der Glasplatte, dicht vor der letzteren, ein Gipskeil eingeschaltet, der so geschnitten war, daß seine Achsen 45° mit der Kante des Keils bildeten. Er wurde so vor der Platte aufgestellt, daß die Interferenzstreifen vertikal, d. h. in Richtung der Dicke über die Platte hinweggingen. Um der größeren Schärfe wegen den Nullstreifen beobachten zu können,

wurde über den Gipskeil noch eine Glimmerplatte in Subtraktionsstellung gelegt. Fig. 2 a, Taf. V gibt eine photographische Aufnahme dieses Streifens bei ungebogener Platte, Fig. 2 b, Taf. V bei starker Deformation. Es ist auf das deutlichste sichtbar, daß die Doppelbrechung an den Rändern der Platte Null, in der Mitte am größten ist. Auch das von de Saint-Venant aufgestellte quadratische Gesetz für die Abnahme der scherenden Kraft von der Mitte nach den Rändern zu ¹⁾ läßt sich ohne Zwang auf die Gestalt des Interferenzstreifens in Fig. 2 b, Taf. V anwenden.

Die von der Krümmung herrührende Doppelbrechung ist aber nicht bloß im Vertikalschnitt des Wendepunktes, sondern außerdem längs der ganzen Erstreckung des Stabes in der neutralen Mittellinie gleich Null. Die von den scherenden Kräften hervorgebrachte Doppelbrechung kommt daher auch in der neutralen Mittellinie, ebenso wie im Wendepunkte vollständig rein zur Erscheinung. Wenn man die Platte zwischen gekreuzten Nicols in der zuletzt beschriebenen Lage untersucht, so sieht man, wie sich die im Wendepunkte erscheinende Erhellung nach beiden Seiten hin in die neutrale Mittellinie hinein fortsetzt bis zu den Auflagerpunkten. Je zahlreicher mit der Annäherung an die Stellen stärkster Krümmung die Brewsterschen Interferenzstreifen werden und je schmaler infolgedessen die neutrale Mittellinie wird, um so schmaler wird auch diese zentrale Erhellung bei der zweiten Nicollage. Ein Vergleich der in Fig. 3, Taf. V wiedergegebenen Aufnahmen der beiden Erscheinungen für drei verschiedene Stellen eines gebogenen Stabes läßt dies deutlich erkennen. Noch schärfer springt diese Wirkung der scherenden Kräfte in die Augen, wenn man einen nach dem Schema der Fig. 1 gebogenen Stab an der Stelle seiner mittleren Auflager untersucht. Fig. 4 a, Taf. V zeigt die Erscheinung für die zweite Nicollage am Auflager *a*. Hier scheidet der Vertikalschnitt des Auflagers das äußere (linke) Gebiet der Biegung unter dem Einfluß der scherenden Kräfte von dem inneren (rechten) Gebiete der kreisförmigen, schublosen Biegung. Infolgedessen erscheint die neutrale Mittellinie auf der linken Seite des Bildes hell bis zum Vertikalschnitt des Auflagers; hier bricht die Wirkung der Schubkraft plötzlich ab.

1) Vgl. die mehrfach genannte Abhandlung von mir p. 37.

Schaltet man den oben bereits benutzten Gipskeil bei dieser Untersuchung zwischen Glasplatte und Analysator, so zeigt der Interferenzstreifen in der Mitte eine Ausbuchtung entsprechend der Doppelbrechung in der neutralen Mittellinie. Fig. 4 b, Taf. V zeigt auf der linken Hälfte diese Erscheinung, während der Interferenzstreifen auf der rechten Hälfte, im Gebiet der schublosen Biegung, ohne derartige Störung verläuft.

Untersucht man die optische Wirkung der scherenden Kräfte einmal zwischen den Lagern *a* und *c*, das andere Mal zwischen *b* und *d*, so sind die Erscheinungen an beiden Stellen die gleichen, nur mit vertauschtem Sinn der optischen Achsen. Bei Beobachtung mit dem Gipskeil ist daher die Richtung der Ausbuchtung des Interferenzstreifens an den beiden Stellen entgegengesetzt, wie Fig. 5 a und 5 b, Taf. V zur Anschauung bringt. Ebenso ist natürlich das Vorzeichen dieser Doppelbrechung das entgegengesetzte zu beiden Seiten eines Auflagers bei Biegung über eine einzige Kante oder im Falle der Fig. 2.

Die Größe der Ausbuchtung des Interferenzstreifens gibt endlich ein Maß für die Stärke der von der Scherung hervorgerufenen Doppelbrechung an den verschiedenen Punkten eines gebogenen Stabes. Mißt man die Größe der Ausbuchtung auf einer über den Gipskeil gelegten Teilung, so findet man, daß dieser optische Effekt der scherenden Kräfte in der ganzen Längserstreckung von einem Auflager bis zum nächsten konstant ist. Auch dies steht mit der Theorie der Biegung im Einklang. Denn die Konstanz der Schubkraft zwischen zwei Auflagern ist ja die Bedingung, aus der man die Gleichung des gebogenen Stabes beim statischen Problem herleitet. Ist

$$P = \frac{Ed^3}{12} \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$$

die Schubkraft (vgl. Gleichung (2) der früheren Abhandlung), so ist

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = - \frac{\partial P}{\partial x}$$

die Gleichung des schwingenden Stabes,

$$0 = \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$$

die Gleichung des statisch verbogenen Stabes.

Hier tritt nun auch der Unterschied in der Beanspruchung der Platte bei der statischen Verbiegung und bei der Schwin-

gung auf das deutlichste hervor. Denn bei der schwingenden Platte hat die von der Schubkraft erzeugte Doppelbrechung im Knoten ein Maximum und nimmt nach den Bäuchen zu stetig bis zu Null ab. Um diesen Unterschied genau zu formulieren, will ich die entsprechenden Formeln für die Gestalt der statisch verbogenen und der schwingenden Platte und für die Größe der Schubkraft in beiden Fällen nebeneinander stellen, wobei die statische Verbiegung der Platte nach dem Schema der Fig. 2 so ausgeführt zu denken ist, daß die Abstände benachbarter Auflager gleich den Abständen benachbarter Schwingungsbäuche der schwingenden Platte sein sollen. Die Gleichung des gebogenen Stabes hat die allgemeine Lösung:

$$y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D.$$

Ich beschränke die Betrachtung auf einen Teil des Stabes zwischen zwei Auflagern. Der Anfangspunkt des Koordinatensystems soll im Wendepunkte oder im Knoten liegen; die Stellen der Auflager, die Bäuche, sollen in den Abständen $\pm x_0$ vom Knoten liegen und die Verbiegung y soll in ihnen die Größe $\pm a$ haben. Endlich soll in den Bäuchen $\partial y / \partial x = 0$ sein, und im Wendepunkte soll die Krümmung, die in erster Annäherung durch $\partial^2 y / \partial x^2$ ausgedrückt wird, sich nicht sprunghaft, sondern stetig ändern. Aus diesen Bedingungen folgt $B = 0$ und $D = 0$,

$$C = -3Ax_0^2 \quad \text{und} \quad A = -\frac{a}{2x_0^3},$$

so daß die Gestalt der Platte durch die Gleichung gegeben ist:

$$y = -\frac{a}{2x_0^3}x^3 + \frac{3}{2}\frac{a}{x_0}x,$$

oder, wenn man $x/x_0 = \xi$ setzt

$$y = \frac{3}{2}a\xi - \frac{a}{2}\xi^3,$$

wobei ξ zwischen -1 und $+1$ zu nehmen ist. Die Krümmung der Platte hat dann den Betrag

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{3a}{x_0^2}\xi$$

und die Schubkraft hat den konstanten Wert

$$P = -\frac{E d^2 a}{4 x_0^3}.$$

Die Form der schwingenden Platte ist durch die in der früheren Abhandlung entwickelten Gleichungen gegeben. Wenn man die x nicht, wie es dort geschehen, von dem einen Ende, sondern von der Mitte der Platte aus rechnet, so kann man den Ausdruck für y auf die Form bringen:

$$y = \frac{a}{1 + \sqrt{\cos p}} \left\{ \cos \frac{p x}{l} + \frac{\sqrt{\cos p}}{2} \left(e^{+\frac{p x}{l}} + e^{-\frac{p x}{l}} \right) \right\} \sin 2 \pi n t,$$

wobei a die Amplitude in der Mitte der Platte und p für den Fall der Schwingung mit vier Knoten sehr nahe gleich $7 \pi/2$ ist. Da infolgedessen $\cos p$ eine sehr kleine Größe ist, so ist, wenigstens für kleine x , das zweite Glied in der Klammer zu vernachlässigen. Man wird also zwischen dem mittleren Schwingungsbauch und den benachbarten Knoten die Gestalt der Platten im Maximum ihrer Ausbiegung sehr nahe als eine Sinusform ansehen können, d. h.

$$y = a \sin \frac{\pi}{2} \xi,$$

wenn ξ vom Knoten bis zum Bauch von 0 bis 1 anwächst. Dementsprechend variiert also auch die Krümmung nach dem Sinusgesetz:

$$\frac{1}{\rho} = - \frac{\pi^2}{12} \cdot \frac{3 a}{x_0^2} \sin \frac{\pi}{2} \xi$$

und die Schubkraft nach der Cosinusformel:

$$P = - \frac{\pi^3}{24} \cdot \frac{E a^2 a}{4 x_0^3} \cos \frac{\pi}{2} \xi.$$

Aus diesen Formeln folgt endlich, daß bei gleicher Größe der Verbiegung (d. h. gleichem a) die Krümmung im Bauch der schwingenden Platte um $\pi^2/12$ ($= 0,822$) kleiner ist als über den Auflagern bei statischer Verbiegung, und daß andererseits die scherende Kraft im Knoten der schwingenden Platte um $\pi^3/24$ ($= 1,293$) größer ist als im Wendepunkt der statisch gebogenen. Wenn auch diese feineren quantitativen Unterschiede bei den Beobachtungen nicht zum Ausdruck kamen, so war doch die charakteristische Verschiedenheit in dem Verlauf der durch die Schubkraft bedingten Doppelbrechung längs der neutralen Mittellinie auf das deutlichste wahrnehmbar.

Es sollen nun drittens, die optischen Erscheinungen in denjenigen Teilen eines gebogenen Stabes untersucht werden, in denen scherende Kräfte mit den Zug- oder Druckkräften gleichzeitig auftreten.

3. Allgemeiner Fall. Zusammenwirken von Längsspannung und Scherung.

Die Versuche bestätigen, wie wir gesehen haben, die Forderung der Theorie, daß die scherenden Kräfte in der ganzen Längserstreckung des Stabes zwischen zwei Auflagern konstant sind. In jedem Vertikalschnitt werden die scherenden Kräfte dann entsprechend der de Saint-Venantschen Formel so verteilt sein, wie es die optische Untersuchung für die Knotenlinie unmittelbar veranschaulicht. Daraus folgt, daß in allen Punkten eines nicht kreisförmig gebogenen Stabes Längsspannung und Scherung gleichzeitig auftreten müssen, mit alleiniger Ausnahme des oberen und unteren Randes, an dem die Scherung gleich Null ist, sowie der Knoten- und der neutralen Mittellinie, in denen die Längsspannung gleich Null ist.

Es ist zunächst zu untersuchen, zu welcher Resultante sich die gleichzeitig auftretenden Spannungs- und Schubkräfte zusammensetzen werden. Wir gehen von den bekannten Gleichungen für die elastischen Spanningskräfte im Innern eines Körpers aus¹⁾:

$$T \cdot \cos \pi = t_{11} \cos p + t_{21} \cos q + t_{31} \cos r,$$

$$T \cdot \cos \kappa = t_{12} \cos p + t_{22} \cos q + t_{32} \cos r,$$

$$T \cdot \cos \varrho = t_{13} \cos p + t_{23} \cos q + t_{33} \cos r.$$

Hier bedeuten π , κ , ϱ die Winkel der Kraft T mit den Koordinatenachsen, p , q , r die Winkel der Normale derjenigen Fläche, auf die die Kraft T pro Flächeneinheit wirksam ist. In unserem Falle sind von Normalspannungen nur t_{11} , von Tangentialkräften nur $t_{21} = t_{12}$ vorhanden. T liegt daher in der XY -Ebene. Nehmen wir auch die Normale der Fläche in dieser Ebene an, d. h.

$$\cos r = 0, \quad \cos q = \sin p,$$

so lauten die Gleichungen

$$T \cos \pi = t_{11} \cos p + t_{12} \sin p,$$

$$T \sin \pi = t_{12} \cos p,$$

folglich

$$T^2 = t_{11}^2 \cos^2 p + t_{12}^2 + t_{11} t_{12} \sin 2p$$

und

$$\operatorname{ctg} \pi = \frac{t_{11}}{t_{12}} + \operatorname{tg} p.$$

1) A. Clebsch, Theorie der Elastizität fester Körper p. 14.

Für die Richtung der Hauptdrucke, für die $\pi = p$ ist, ergibt sich daraus die Beziehung:

$$\operatorname{tg} 2 p_m = \frac{2 t_{12}}{t_{11}}.$$

Setzt man

$$p = p_m + \nu,$$

d. h. zählt man die Winkel der Normale nicht von der x -Achse, sondern von der Hauptdruckachse aus, die den Winkel p_m mit der x -Achse bildet, so ist allgemein:

$$T^2 = \frac{1}{2} t_{11}^2 + t_{12}^2 + \frac{1}{2} t_{11}^2 \sqrt{1 + \frac{4 t_{12}^2}{t_{11}^2} \cos 2 \nu},$$

und die Hauptdrucke sind

$$\text{für } \nu = 0 \quad T_1 = \frac{t_{11}}{2} + \sqrt{\frac{t_{11}^2}{4} + t_{12}^2},$$

$$\text{für } \nu = \frac{\pi}{2} \quad T_2 = \frac{t_{11}}{2} - \sqrt{\frac{t_{11}^2}{4} + t_{12}^2}.$$

Das gegebene System von Kräften ist also gleichwertig einer Zugspannung T_1 in der durch den Winkel p_m bestimmten Richtung und einer Druckspannung T_2 senkrecht dazu. Diese Richtungen sind die Achsen der Doppelbrechung. Die Größe der Doppelbrechung ist durch die Differenz der zugehörigen Hauptdilatationen bestimmt. Bedeutet wieder E den Elastizitätsmodul, μ das Verhältnis von Querkontraktion zur Längsdilatation, so berechnen sich die Hauptdilatationen α und β nach den Gleichungen:

$$\alpha = \frac{T_1}{E} - \frac{\mu T_2}{E},$$

$$\beta = \frac{T_2}{E} - \frac{\mu T_1}{E},$$

und daraus die Doppelbrechung, entsprechend der in der früheren Arbeit entwickelten Formel¹⁾

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{b N^2}{\lambda v_0} (p - q)(\alpha - \beta) \\ &= \frac{b N^2}{\lambda v_0} (p - q) \frac{1 + \mu}{E} (T_1 - T_2) \\ &= \frac{b N^2}{\lambda v_0} (p - q) \frac{1 + \mu}{E} \sqrt{t_{11}^2 + 4 t_{12}^2}. \end{aligned}$$

1) l. c. p. 33.

Um aus diesen allgemeinen Gleichungen die speziellen Formeln für Größe und Richtung der Doppelbrechung in den verschiedenen Punkten des gebogenen Stabes zu erhalten, sind für t_{11} und t_{12} die aus der Theorie der Biegung folgenden besonderen Werte einzusetzen:

$$t_{11} = E \cdot y \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

$$t_{12} = \frac{3}{2} \cdot \frac{E \cdot d^2}{12} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \left(1 - \frac{4 y^2}{d^2}\right).$$

Nehmen wir im besonderen den oben behandelten Fall einer Biegung mit Wendepunkt, so folgt aus der dort entwickelten Gleichung für den gebogenen Stab:

$$t_{11} = - \frac{3 \alpha E}{x_0^3} x \cdot y,$$

$$t_{12} = - \frac{3}{8} \frac{\alpha \cdot E \cdot d^2}{x_0^3} \left(1 - \frac{4 y^2}{d^2}\right),$$

Danach sind an einem Punkte des Stabes, der durch die Koordinaten x und y bestimmt ist, die Winkel p_m und $p_m + \pi/2$, welche die Achsen der Doppelbrechung mit der Längsachse des Stabes bilden, durch die Gleichung gegeben:

$$\operatorname{tg} 2 p_m = \frac{d^2}{4 x y} \left(1 - \frac{4 y^2}{d^2}\right).$$

Da die y nur im Verhältnis zur Dicke des Stabes in diese Formel eingehen, so möge noch die Bezeichnung η für das Verhältnis $y : d/2$ eingeführt werden. Die Gleichung lautet dann

$$\operatorname{tg} 2 p_m = \frac{d}{2 x \cdot \eta} (1 - \eta^2).$$

Aus dieser Gleichung geht zunächst hervor, daß die Lage der Achsen an jeder Stelle unabhängig von der Größe der Verbiegung der Platte ist. Sie haben daher auch in der schwingenden Platte während der Schwingung eine konstante Lage, woraus sich die in der früheren Arbeit p. 30 und 31 erwähnten Beobachtungen erklären. An derselben Stelle der früheren Arbeit habe ich durch eine Zeichnung (Fig. 4), den Verlauf der Achsenrichtungen in der Umgebung des Knotens angedeutet. Das genaue Gesetz dieses Verlaufes ist nunmehr durch die obige Gleichung gegeben. In der Knotenlinie ($x = 0$)

und in der Mittellinie ($\eta = 0$) ist $p_m = 45^\circ$. Von diesen Lagen aus findet beim Übergang in die Gebiete der Dehnung oder Zusammendrückung eine allmähliche Drehung der Achsenrichtungen statt.

Faßt man einen bestimmten Vertikalschnitt ins Auge, entsprechend einem bestimmten Werte von x , so vollzieht sich diese Drehung in der oberen Hälfte in dem einen, in der unteren in dem entgegengesetzten Sinne, vom Winkel 45° in der Mittellinie an bis zum Winkel 0° bez. 90° am Rande der Platte, d. h. für $\eta = \pm 1$. In der Nähe der Knotenebene ist diese Drehung eine sehr allmähliche entsprechend den geringen Werten, die die Längsspannungen hier besitzen. In dem Vertikalschnitt z. B., der von der Knotenlinie um die Dicke der Platte absteht ($x = d$), gibt die Formel folgende Wertepaare von η und p_m in der einen Plattenhälfte.

$\eta = 0$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$p_m = 45^\circ$	39,3°	33,7°	28,3°	23,2°	18,4°	14,0°	10,0°	6,4°	3,0°	0°

Je weiter man sich von der Knotenebene entfernt, um so schneller vollzieht sich von der Mittellinie aus der Abfall zu kleinen Werten von p_m . In einem Abstände z. B., der das 20fache der Dicke beträgt, würde man die Wertepaare haben:

$\eta = 0$	0,1	0,2	0,3	etc.
$p_m = 45^\circ$	7°	3,3°	2,2°	etc.

An den Stellen starker Krümmung beschränken sich also die merklichen Abweichungen von dem Verhalten kreisförmig gebogener Platten auf den mittelsten Teil der Platte. Qualitativ bestätigen sich diese Folgerungen der Theorie ganz gut an der Erfahrung. Die genaue quantitative Prüfung der Formel stößt auf Schwierigkeiten infolge der Unvollkommenheit der benutzten Glasplatten. Der Verlauf der p_m läßt sich ja nur in den Gebieten mit einiger Sicherheit messend verfolgen, in denen die Längsspannungen noch relativ geringe Werte haben. Unter diesen Umständen aber machen sich neben den durch die Biegung hervorgerufenen Längsspannungen die natürlichen Spannungszustände der Platte geltend und bedingen beträchtliche Abweichungen von dem von der Formel geforderten Verlaufe der Erscheinung. Man könnte versuchen, diesem

Einfluß durch ein Zusatzglied zu dem Ausdruck für t_{11} in unseren Gleichungen Rechnung zu tragen, indem man für den Verlauf dieser natürlichen Spannungen rein empirisch eine Formel aufstellt. Wie schon mehrfach erwähnt, ist die Platte in der Mitte in gedehntem, am Rande in gedrücktem Zustande, wenn man die Längsrichtung der Platte als Dehnungs- und Druckrichtung nimmt. Die neutralen Zonen liegen etwa bei $\frac{1}{4}d$ und $\frac{3}{4}d$, also bei $\eta = \frac{1}{2}$. Es mögen versuchsweise die natürlichen Spannungen dargestellt werden durch die Formel

$$t'_{11} = \vartheta (1 - 4\eta^2).$$

Dann geht die Gleichung für p_m über in die Form

$$\operatorname{tg} 2 p_m = C \frac{1 - \eta^2}{\eta + D(1 - 4\eta^2)}.$$

Darin ist gesetzt:

$$C = \frac{d}{2x},$$

$$D = \frac{2\vartheta \cdot x_0^3}{3aEdx}.$$

Die Größe von D läßt sich in einfacher Weise aus Messungen der Doppelbrechung ableiten. Es sei Δ_0 die Phasendifferenz infolge der natürlichen Längsspannung in der Mitte der Platte, die man am ungebogenen Stabe direkt messen kann. Sie ergab sich zu 0,04. Es sei ferner Δ_r die Phasendifferenz, die in dem betrachteten Vertikalschnitt am Rande der Platte bei der Biegung gemessen wird. Dann ist

$$D = \frac{\Delta_0}{\Delta_r \pm 3\Delta_0},$$

wobei das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem der Plattenrand, an dem Δ_r gemessen wird, konvex oder konkav gebogen ist. Bei der Kleinheit von Δ_0 genügt es, im allgemeinen $D = \Delta_0/\Delta_r$ zu setzen.

Es wurden nun Messungen folgender Art angestellt: Wenn man die Platte im weißen Licht zwischen gekreuzten Nicols beobachtet, so wandert bei einer gemeinsamen Drehung der beiden Nicols der schwarze Mittelstreifen. Er liegt in jedem Augenblicke an derjenigen Stelle, an der die Achsenrichtungen mit den Polarisationsrichtungen der beiden Nicols zusammenfallen. Als Analysator wurde ein Nicol mit Teilkreis benutzt. Dieser wurde auf bestimmte Winkel seiner Polarisations-

richtung zur Längsrichtung der Platte eingestellt; dann wurde der Polarisator auf Dunkelheit gestellt und nun der Abstand des schwarzen Streifens vom Rande der Platte gemessen. Um Parallaxenfehler zu vermeiden, wurde das Streifensystem aus der Entfernung mit einem Fernrohr mit Okularskala beobachtet. Als Lichtquelle diente ein Auerbrenner. Die Beobachtungen wurden für neun Nicolstellungen in sämtlichen vier Quadranten angestellt, und aus den vier sich wiederholenden Lagen des schwarzen Streifens der Mittelwert genommen. Aus diesen mittleren Abständen des schwarzen Streifens von dem einen Plattenrande und der gleichzeitig auf der Okularskala gemessenen ganzen Dicke der Platte wurden die Werte der η berechnet. An diesen Beobachtungen wurde schließlich die Formel in der Weise kontrolliert, daß die Formel nach η aufgelöst und die Werte von η aus den Werten von p_m und den Konstanten C und D des beobachteten Vertikalschnittes berechnet wurden. Im allgemeinen genügte für diese Berechnung die abgekürzte Formel

$$\eta = \frac{C}{\operatorname{tg} 2 p_m} - D.$$

Ich gebe zwei in dieser Weise ausgeführte Beobachtungsreihen.

1. Es wurde beobachtet im Abstände $x = 6,7$ cm vom Knotenpunkte. Die Dicke der Platte betrug 6,2 mm. Die Gangdifferenz am Rande der Platte betrug eine Wellenlänge. Daraus folgen die Konstanten

$$C = \frac{d}{2x} = 0,046, \quad D = 0,04.$$

Die zu den nachstehend angegebenen Werten von p_m durch die Beobachtung gefundenen und die nach der Formel mit obigen Konstanten berechneten Werte von η sind:

p_m	5	10	15	30	45	60	75	80	85°
$\eta_{\text{beob.}}$	0,17	0,10	0,04	-0,01	-0,03	-0,05	-0,13	-0,19	-0,29
$\eta_{\text{ber.}}$	0,21	0,08	0,02	-0,01	-0,04	-0,07	-0,12	-0,17	-0,27

2. Es wurde beobachtet im Abstände $x = 11$ cm. Die Gangdifferenz am Plattenrande betrug zwei Wellenlängen. Also

$$C = 0,028, \quad D = 0,02.$$

Es wurden beobachtet und berechnet:

p_m	5	10	15	30	45	60	75	80	85°
$\eta_{\text{beob.}}$	0,14	0,07	0,02	-0,02	+0,01	-0,02	-0,07	-0,08	-0,17
$\eta_{\text{ber.}}$	0,14	0,06	0,03	-0,00	-0,02	-0,04	-0,07	-0,10	-0,18

Daß sich diese Beobachtungen durch die Formel ohne Berücksichtigung der natürlichen Doppelbrechung der Platte nicht darstellen lassen würden, geht schon aus der Unsymmetrie des Verlaufes der Zahlen zu beiden Seiten des Mittelwertes ($p_m = 45^\circ$) hervor. Mit der angenommenen Form der Korrektur ergibt sich eine ganz befriedigende Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Berechnung.

Nach dieser Darstellung der Achsenlagen erübrigt es schließlich noch, die Stärke der Doppelbrechung in ihrer Abhängigkeit von x und η zu behandeln. Aus der allgemeinen Gleichung für Δ und den Spezialgleichungen für t_{11} und t_{12} folgt

$$\Delta = \frac{b N^2}{\lambda v_0} (p - q)(1 + \mu) \frac{3 a d}{2 x_0^3} \sqrt{x^2 \eta^2 + \frac{d^2}{4} (1 - \eta^2)^2}.$$

Bezeichnen wir wieder die nur von den Längsspannungen herrührende Phasendifferenz am Rande (für $\eta = 1$) im Vertikalschnitt x mit Δ_r , außerdem die nur von den Schubkräften herrührende, von x unabhängige Phasendifferenz in der Mitte (für $\eta = 0$) mit Δ_m , so läßt sich Δ übersichtlicher in der Form schreiben:

$$\Delta = \sqrt{\Delta_r^2 \eta^2 + \Delta_m^2 (1 - \eta^2)^2}.$$

Aus dieser Formel ist zunächst zu ersehen, daß Δ nur dann Null wird, wenn gleichzeitig $\eta = 1$ und $\Delta_r = 0$ ist. Die Doppelbrechung verschwindet also nur in denjenigen Punkten, in denen der Plattenrand von einer Knotenebene geschnitten wird. An allen übrigen Punkten eines nicht kreisförmig gebogenen Stabes ist stets Doppelbrechung vorhanden. Der Wert der Phasendifferenz Δ hat im allgemeinen seinen kleinsten Betrag in der Mitte (für $\eta = 0$); wenigstens gilt dies, solange $\Delta_r > \sqrt{2} \Delta_m$ ist. Wird bei Annäherung an den Knoten $\Delta_r < \sqrt{2} \Delta_m$, so rückt der Ort der kleinsten Phasendifferenz allmählich nach dem Rande, den er in der Knotenebene erreicht.

Noch einfacher läßt sich der Ausdruck für Δ schreiben, wenn man die Kenntnis der früher definierten Winkelwerte dazu nimmt:

$$\Delta = \frac{\Delta_r \cdot \eta}{\cos 2 p_m}.$$

Vergleicht man diese Formel mit derjenigen, die den Verlauf der Phasendifferenzen in einem kreisförmig gebogenen Stab bei gleicher Biegung (d. h. gleichem Δ) angibt:

$$\Delta' = \Delta_r \cdot \eta',$$

so sieht man, daß die gleichen Phasendifferenzen bei nicht kreisförmiger Biegung schon bei geringeren Werten der η erreicht werden. Denn bei gleichem Betrage von Δ und Δ' ist

$$\eta = \eta' \cos 2 p_m.$$

Daraus folgt

$$\eta' - \eta = 2 \eta' \sin^2 p_m.$$

In einiger Entfernung vom Knoten sind wegen des schnellen Abfalles der p_m (vgl. oben p. 855) diese Differenzen nur sehr klein.

Von besonderem Interesse ist die Verteilung der Intensität in dem Interferenzbilde der Platten zwischen gekreuzten Nicols. Bedeutet J die Amplitude des auf die Platte auffallenden Lichtes, d. h. die Amplitude nach dem Durchgang durch den Polarisator, sind die Nicols gekreuzt und bildet die Schwingungsrichtung des einfallenden Lichtes den Winkel α mit der Längsrichtung der Platte, so ist die Amplitude des aus dem Analysator austretenden Lichtes gegeben durch die Gleichung:

$$A = J \cdot \sin(2 p_m - 2 \alpha) \sin \pi \Delta.$$

Für die beiden Hauptlagen der Nicols verlaufen daher die Erscheinungen folgendermaßen.

a) Nicolebenen unter 45° zur Längsrichtung der Platte

$$A = - J \cdot \cos 2 p_m \sin \pi \Delta.$$

Bei kreisförmiger Biegung würde die Formel entsprechend lauten :

$$A = - J \cdot \sin \pi \Delta'.$$

In letzterem Falle durchläuft Δ' die Werte von 0 bis Δ_r ; die Intensität des Lichtes ist in der Mitte Null und durchläuft nach dem Rande hin eine Reihe Maxima und Minima, entsprechend der Periodizität von $\sin \pi \Delta'$. Bei nicht kreisförmiger Biegung ist die Erscheinung im wesentlichen die gleiche. Zwar ist in der Mitte Δ nicht gleich 0, sondern gleich Δ_m ; dafür ist aber $\cos 2 p_m = 0$; in der Mitte ist also die Intensität gleich Null. Mit wachsendem η steigt $\cos 2 p_m$ sehr schnell auf Werte nahe gleich 1, wenn man in einiger Entfernung vom Knoten beobachtet. Folglich kommt die Periodizität von $\sin \pi \Delta$ in

gleicher Weise wie bei kreisförmiger Biegung zur Geltung; nur würden die Minima um den geringfügigen Betrag $2\eta \cdot \sin^2 p_m$ nach der Mitte hin verschoben sein.

b) Nicolebenen parallel und senkrecht zur Längsrichtung der Platte. In diesem Falle gilt die Formel:

$$\Delta = J \cdot \sin 2p_m \cdot \sin \pi \Delta,$$

während bei kreisförmiger Biegung $\Delta = 0$ sein würde. Da $\sin 2p_m$ in der Mitte gleich 1 ist und mit wachsendem η schnell abnimmt, wenn man nicht in der Nähe des Knotens beobachtet, so beschränkt sich die sichtbare Erscheinung auf den mittleren Teil der Platte. In der Mitte ist $\Delta = J \cdot \sin \pi \Delta_m$, also Helligkeit. Wächst bei schwacher Biegung $\sin \pi \Delta$ mit wachsendem η langsam an, so sieht man in der Mitte einen breiten hellen Streifen. Wird die Biegung stärker, so daß das erste Minimum von $\sin \pi \Delta$ in denjenigen Bereich hineinrückt, in dem $\sin 2p_m$ noch merkliche Werte besitzt, so wird der Streifen dadurch schmaler, aber zugleich wegen der Steigerung von Δ_m heller. Wird endlich die Biegung so stark, daß mehrere Minima und Maxima von $\sin \pi \Delta$ in den Bereich der noch merklichen Werte von $\sin 2p_m$ fallen, so werden neben dem mittleren hellen Streifen noch diese Minima und Maxima mit schnell abnehmender Helligkeit sichtbar. Die gleichen Überlegungen sind auf die drei Aufnahmen Fig. 3a, 3b und 3c, Taf. V anzuwenden. Nur ist hier zu beachten, daß nicht an derselben Stelle beobachtet und die Biegung verändert wurde, sondern die Biegung konstant war und der Beobachtungspunkt verändert wurde. Es ist also für diese drei Aufnahmen Δ_m konstant; C aber um so kleiner, und damit die Änderung von p_m um so schneller, je größer Δ_r ist. Unter diesen Umständen erhält man bei Fig. 3a einen breiten, bei Fig. 3b einen schmäleren hellen Streifen, während bei Fig. 3c die Maxima und Minima von $\sin \pi \Delta$ bis in das Gebiet der noch merklichen Werte von p_m hineinrücken.

Es mögen endlich noch diejenigen Erscheinungen erklärt werden, welche in der dritten Serie der Abbildungen der Fig. 3, Taf. V dargestellt sind. Sie sind dadurch erhalten, daß bei der soeben besprochenen zweiten Hauptlage der Nicols zwischen Platte und Analysator der oben beschriebene Gipskeil eingeschoben ist. Der Versuch war ursprünglich angestellt, um

die Größe der von der Schiebung herrührenden Doppelbrechung in der Mitte der Platte zu messen. Der Interferenzstreifen des Gipskeiles zeigt aber, außer der zentralen, von Δ_m herrührenden stärkeren Verschiebung noch eine Reihe schwächerer Ausbuchtungen nach beiden Seiten, deren Lagen mit den Lagen der Interferenzstreifen für die erste Nicollage in offenbarem Zusammenhange stehen. Ich will versuchen, auch die Theorie dieser Erscheinungen wenigstens anzudeuten.

Das auf die Platte fallende Licht schwinde in der X -Achse mit der Amplitude J . Beim Durchgang durch die Platte zerlegt es sich in die Komponenten P_1 und P_2 , die nach den Achsen der Doppelbrechung an der durchstrahlten Stelle der Platte gerichtet sind, mit den Koordinatenachsen also den Winkel p_m bilden. Nach dem Durchgange durch die Platte werden diese Komponenten infolge der verschiedenen Verzögerung, die sie in der doppelbrechenden Platte erfahren, die Form haben:

$$P_1 = J \cdot \cos p_m \cdot \sin 2\pi(n t - \delta_1),$$

$$P_2 = -J \cdot \sin p_m \cdot \sin 2\pi(n t - \delta_2).$$

In dem Gipskeil wird jede Komponente wiederum zerlegt nach den Achsen der Doppelbrechung im Gips, die Winkel von 45° mit den Koordinatenachsen einschließen. Wir bilden zunächst diese Komponenten des auf den Gipskeil einfallenden Lichtes:

$$R_1 = P_1 \cos\left(\frac{\pi}{4} - p_m\right) + P_2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - p_m\right),$$

$$R_2 = -P_1 \sin\left(\frac{\pi}{4} - p_m\right) + P_2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - p_m\right).$$

Diese lassen sich auf die Form bringen

$$R_1 = \frac{J}{\sqrt{2}} A_1 \sin 2\pi\left(n t - \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} - \epsilon_1\right),$$

$$R_2 = -\frac{J}{\sqrt{2}} A_2 \sin 2\pi\left(n t - \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} - \epsilon_2\right)$$

Nach dem Durchgang durch den Gipskeil haben diese Schwingungen die weiteren Verzögerungen ζ_1 und ζ_2 erfahren. Im Analysator werden sie schließlich auf die X -Achse reduziert,

die mit den Richtungen von R_1 und R_2 Winkel von 45° bildet. Das aus dem Analysator tretende Licht ist daher gegeben durch die Summe

$$\frac{R_1 + R_2}{\sqrt{2}}$$

und läßt sich auf die Form bringen:

$$\frac{1}{2} J \cdot B \cdot \sin 2\pi \left(n t - \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} - \beta \right),$$

wobei B , auf das es im folgenden allein ankommt, durch die Gleichung bestimmt ist:

$$B^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2 A_1 A_2 \cos 2\pi (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \zeta_1 - \zeta_2).$$

Für A_1 und A_2 , ε_1 und ε_2 aber ergeben die Zwischenrechnungen folgende Werte:

$$A_1^2 = 1 + \sin^2 \pi \Delta \cdot \sin 4 p_m,$$

$$A_2^2 = 1 - \sin^2 \pi \Delta \cdot \sin 4 p_m,$$

$$\operatorname{tg} 2\pi \varepsilon_1 = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - 2 p_m \right) \operatorname{tg} \pi \Delta,$$

$$\operatorname{tg} 2\pi \varepsilon_2 = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - 2 p_m \right) \operatorname{tg} \pi \Delta.$$

Daraus folgt schließlich

$$(I) \quad B^2 = 2 - 2 \sqrt{1 - \sin^4 \pi \Delta \cdot \sin^2 4 p_m} \cdot \cos 2\pi (\varepsilon + \zeta).$$

In dieser Gleichung bedeutet $\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ die Phasendifferenz, die die beiden Komponenten R_1 und R_2 vor ihrem Eintritt in den Gipskeil besitzen; $\zeta = \zeta_1 - \zeta_2$ ist die Phasendifferenz, die der Gipskeil hinzufügt. Da ζ wegen der keilförmigen Gestalt der Gipsplatte längs der X -Achse stetig variiert, so kann zu jedem Werte von ε ein Wert $\zeta = -\varepsilon$ angegeben werden, der den $\cos(\varepsilon + \zeta) = 1$ macht. Es fragt sich, wie verlaufen die Werte von ε und welches sind die zugehörigen Werte von B ? Für ε ergibt sich aus den obigen Gleichungen die Formel:

$$(II) \quad \operatorname{tg} 2\pi \varepsilon = \frac{\sin 2 p_m \cdot \sin 2\pi \Delta}{\cos^2 2 p_m + \sin^2 2 p_m \cos 2\pi \Delta}.$$

Die Diskussion dieser Formel und der Formel für B ergibt folgendes:

1. In der Mitte, $\eta = 0$, wo $\Delta = \Delta_m$, $p_m = 45^\circ$ ist, folgt aus (II) $\varepsilon = \Delta_m$ und aus (I)

$$B^2 = 4 \cdot \sin^2 \pi (\varepsilon + \zeta),$$

also $B = 0$ für $\zeta = -A_m$. Das entspricht der Streifenverschiebung in der Mitte.

2. Da, wo $A = 1, 2, 3$ ist, d. h. für die Mitten der dunklen Interferenzstreifen bei gekreuzten Nicols in der ersten Hauptlage, ist ebenfalls $B^2 = 4 \cdot \sin^2 \pi (\epsilon + \zeta)$, zugleich aber nach (II) $\operatorname{tg} 2\pi \epsilon = 0$. Das Licht ist an diesen Stellen nach dem Durchgange durch die Glasplatte wieder geradlinig polarisiert in der ursprünglichen Richtung. Die Interferenzstreifen des Gipskeiles haben daher ihre ursprünglichen Lagen, die sie ohne die Glasplatte zwischen den gekreuzten Nicols haben würden.

3. Da, wo $A = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ etc. ist, d. h. für die Mitten der hellen Interferenzstreifen, gilt ebenfalls die Gleichung $\operatorname{tg} 2\pi \epsilon = 0$. Hier ist aber

$$B^2 = 2 (1 - \cos 4p_m \cdot \cos 2\pi (\epsilon + \zeta)).$$

An diesen Stellen ist das Licht nach dem Durchgange durch die Glasplatte ebenfalls wieder geradlinig polarisiert, aber seine Schwingungsrichtung ist gegen die X -Axe um den (im allgemeinen kleinen) Winkel $2p_m$ gedreht. Daher liegt auch an diesen Stellen ein Minimum der Intensität an der Stelle des unverschobenen Streifens, ist aber nicht gleich Null, sondern gleich $J^2 \sin^2 2p_m$. In der Tat kann man wahrnehmen, daß der Streifen an diesen Stellen, wenigstens in der Nähe der Mitte, wo $\sin 2p_m$ noch merkwürdige Werte hat, nicht völlig verschwindet (vgl. Fig. 5, Taf. V).

4. Danach hat also der Streifen keine Verschiebung in den Punkten, denen die Werte $A = k/2$ zukommen. Dazwischen wird der Streifen Verschiebungen aufweisen, deren Größe nach (II) durch den Betrag von ϵ bestimmt ist. Für die Fälle, in denen die Erscheinung in der durch Fig. 3, Taf. V dargestellten Weise auftritt, ist es, wie schon mehrfach hervorgehoben, charakteristisch, daß p_m von der Mitte aus sehr schnell abnimmt. Daher wird sich für Punkte, die nicht in unmittelbarer Nähe der Mitte liegen, die Gleichung (II) vereinfachen zu

$$\operatorname{tg} 2\pi \epsilon = \sin 2p_m \cdot \sin 2\pi A.$$

Daraus folgt, daß ϵ durchgehends nur kleine Werte haben und daß es zwischen positiven und negativen Werten hin- und herschwanken wird, und zwar werden die Grenzwerte angenähert für

$$\sin 2\pi A = \pm 1,$$

d. h. für $A = 2k + 1/4$ erreicht werden.

In den Punkten, für die $\Delta = 2k + 1/4$ ist, wird

$$B^2 = 2 \cdot \left\{ 1 - \sqrt{1 - \frac{\sin^2 4 p_m}{4}} \cdot \cos 2\pi(\varepsilon + \zeta) \right\},$$

also an der Stelle des um $\zeta = -\varepsilon$ verschobenen Streifens

$$B^2 = 2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\sin^2 4 p_m}{4}} \right)$$

und bei Berücksichtigung der Kleinheit von p_m

$$B^2 = \sin^2 2 p_m \cdot \cos^2 2 p_m.$$

Die Intensität ist also in diesen Minimumstellen ebenfalls nicht streng gleich Null, aber jedenfalls sehr klein. Die Lage des Minimums, d. h. die Streifenverschiebung ist für diese Stellen gegeben durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} 2\pi\varepsilon = \mp \frac{\sin 2 p_m}{\cos^2 2 p_m},$$

wobei das $-$ Zeichen für $k = 1, 3, 5 \dots$, das $+$ Zeichen für $k = 2, 4, 6 \dots$ gilt. Über die Größe dieser Streifenverschiebung im Verhältnis zur Verschiebung Δ_m läßt sich ein angenähertes Urteil auf Grund folgender Näherungsrechnung finden. Da

$$\operatorname{tg} 2 p_m = C \frac{1 - \eta^2}{\eta}$$

ist, so ergibt sich

$$\operatorname{tg} 2\pi\varepsilon = \mp C \cdot \frac{1 - \eta^2}{\eta^2} \sqrt{\eta^2 + C^2(1 - \eta^2)^2}$$

oder unter Berücksichtigung des Umstandes, daß C eine kleine Größe ist

$$\operatorname{tg} 2\pi\varepsilon = \mp C \frac{1 - \eta^2}{\eta}.$$

Für C aber kann man auch Δ_m/Δ_r setzen und für $\Delta_r \times \eta$ in erster Annäherung den nur wenig größeren Wert Δ . Dann ist also

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \mp \frac{\Delta_m}{2\pi\Delta} (1 - \eta^2) \\ &= \mp \frac{2\Delta_m}{(2k+1)\pi} (1 - \eta^2), \end{aligned}$$

wobei

$$\eta^2 = \frac{(2k+1)^2}{16\Delta_r^2}$$

zu setzen ist. Also ist z. B. für $k = 1$

$$\varepsilon = - \frac{2 A_m}{3 \pi} \left(1 - \frac{9}{16 A_r^2} \right) = - 0,21 \cdot \left(1 - \frac{0,56}{A_r^2} \right) A_m,$$

für $k = 2$

$$\varepsilon = + \frac{2 A_m}{5 \pi} \left(1 - \frac{25}{16 A_r^2} \right) = + 0,13 \cdot \left(1 - \frac{1,56}{A_r^2} \right) A_m,$$

für $k = 3$

$$\varepsilon = - \frac{2 A_m}{7 \pi} \left(1 - \frac{49}{16 A_r^2} \right) = - 0,091 \cdot \left(1 - \frac{3,06}{A_r^2} \right) A_m$$

etc. Dabei würde z. B. für die in Fig. 3, Taf. V wieder-
gegebenen Aufnahmen $A_r = \frac{3}{2}$, $= 3$ und $= 6$ zu setzen sein.

Für $k = 0$ oder $A = \frac{1}{4}$ gelten diese Betrachtungen nicht mehr. Hier, in der Nähe der Mitte, würden die abgekürzten Formeln keine Berechtigung mehr haben. An dieser Stelle tritt aber auch überhaupt kein Grenzwert für ε mehr auf. Nähert man sich von der Stelle, für die $A = \frac{1}{2}$, $\varepsilon = 0$ ist, der Mitte, so wächst wegen des hier erfolgenden starken Anwachsens von $2 p_m \varepsilon$ andauernd über den Wert, den es für $A = \frac{1}{4}$ erreicht, hinaus, bis zu dem Werte A_m , den es für $\eta = 0$ erlangt.

Vergleicht man in Fig. 3, Taf. V die rechtsstehenden Aufnahmen mit dem Gipskeil mit den linksstehenden Aufnahmen für die erste Nicollage, so findet man den im vorstehenden entwickelten Charakter der Erscheinung in den wesentlichen Zügen an den Tatsachen bestätigt. Der Interferenzstreifen des Gipskeils zeigt außer der stärkeren Verschiebung in der Mitte eine Reihe kleinerer Ausbuchtungen nach beiden Seiten hin. Die Spitzen dieser Zacken fallen angenähert auf diejenigen Stellen, die in den linksstehenden Interferenzbildern an der Grenze zwischen den hellen und dunklen Interferenzlinien liegen, d. h. da wo $A = 2k + 1/4$ ist; und zwar liegen die nach derselben Seite wie A_m gerichteten Zacken auf den äußeren Rändern der dunklen Streifen des linken Bildes, d. h. da, wo $A = \frac{5}{4}, \frac{9}{4}, \frac{13}{4}$ ist, die nach der entgegengesetzten Seite gerichteten auf den inneren Rändern, d. h. da, wo $A = \frac{3}{4}, \frac{7}{4}, \frac{11}{4}$ ist. Endlich entsprechen auch die Größen dieser Zacken im Verhältnis zur mittleren Verschiebung A_m — wenigstens der Größenordnung nach — dem, was man nach den obigen Formeln darüber aussagen könnte.

Die vorliegende Untersuchung gibt eine vervollständigte Lösung des Problems der in einem gebogenen Glasstabe auftretenden Doppelbrechung. Sie bildet damit zugleich ein Beispiel für die Möglichkeit, die Spannungsverteilung in einem elastisch beanspruchten Körper auch in ihren feineren Einzelheiten auf optischem Wege zu untersuchen, ein Verfahren, das mir ebenso nützlich zu sein scheint als Mittel zur Demonstration des Zusammenhanges der Kräfte in den bekannten Fällen elastischer Deformationen wie als Untersuchungsmethode für andere komplizierte Probleme der Elastizität. Allerdings hat die Anwendbarkeit der Methode ihre Grenze in dem Umstande, daß sie eigentlich nur für zweidimensionale Fälle gilt. Denn sie gibt eine vollkommen eindeutige Bestimmung der Kräfte nur, wenn auf dem Wege, den der Lichtstrahl im Körper durchläuft, die Kräfte und damit die Doppelbrechung überall die gleichen sind. Auch in dem hier behandelten Falle ist diese Bedingung nicht erfüllt. Die Kräfte variieren nach der Theorie de Saint-Venants auch in derjenigen Richtung, die auf der Biegungsebene senkrecht steht und in der der Lichtstrahl die Platte durchsetzt. Der in den obigen Darlegungen benutzte Wert für die Schiebungskräfte ist nur der Mittelwert, der sich aus der Integration über die durchstrahlte Dicke ergibt. Diese Kräfte variieren auf dem Wege des Lichtstrahles von Punkt zu Punkt, und mit ihnen werden die Größen der Doppelbrechung und die Lage ihrer Achsen von Punkt zu Punkt variieren. Das Problem ist also in Wahrheit noch wesentlich verwickelter, als es hier dargestellt ist. Vielleicht würden genauere Messungen, als ich sie mit den mir zu Gebote stehenden Glasplatten anstellen konnte, in demjenigen Gebiete, in dem Schubkräfte und Längsspannungen zusammenwirken, systematische Abweichungen aus den oben entwickelten Formeln ergeben, deren Erklärung eine Berücksichtigung dieser weiteren Komplikation verlangen würde. Da die Rechnungen außerordentlich verwickelt sind, nehme ich davon Abstand, die Untersuchung nach dieser Richtung weiter zu führen.

Greifswald, März 1903.

(Eingegangen 31. März 1903.)

Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 4.

Fig. 5.