Sulle corrispondenze algebriche fra i punti di due curve algebriche.

(*Di* Carlo Rosati, *a Pisa.*)

Questa Nota si propone di portare qualche contributo alla teoria delle serie algebriche di gruppi di punti di una curva algebrica. Poichè la considerazione di una serie algebrica γ_n^1 di indice ν sopra una curva C di genere p è intimamente legata a quella della corrispondenza (n, ν) che viene indotta fra C ed una curva C' birazionalmente identica a γ_n^1, abbiamo cercato di approfondire lo studio delle corrispondenze algebriche fra due curve distinte, partendo dalle formule di Hurwitz che ne dànno la rappresentazione mediante gli integrali abeliani di 1.ª specie. Queste formule, com'è noto, associano alle due operazioni, che conducono da un punto di ciascuna delle due curve agli omologhi dell'altra, due matrici di numeri interi: nel n.º 2 vien data la dimostrazione delle relazioni che legano gli elementi di una matrice con quelli dell'altra. Usando poi dei procedimenti già adoperati per le corrispondenze fra i punti di una curva (*), si espone l'interpretazione geometrica delle dette formule di Hurwitz e si ritrova, per questa via, un interessante teorema dovuto al Severi. In seguito, si considerano le corrispondenze *laterali* della data, cioè le corrispondenze simmetriche che si hanno sulle due curve quando, su ciascuna di esse, si prendano come omologhi due punti che corrispondono allo stesso punto dell'altra, e si trova fra le loro valenze una relazione semplicissima, da cui segue immediatamente la formula di Zeuthen. Vengono poi studiate le curve contenenti due involu-

(*) Cfr. Rosati: a) *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e, in particolare, fra i punti di una curva di genere due* (Annali di Matematica, Tomo XXV, Serie III, 1915); b) *Sulle corrispondenze plurivalenti fra i punti di una curva algebrica* (Atti della R. Accademia di Torino, Vol. 51, 1916); c) *Sulle valenze delle corrispondenze algebriche fra i punti di una curva algebrica* (ibid., vol. 53, 1917).

Designeremo queste Note, nei richiami ulteriori, rispettivamente con *C.*, *C. P.*; e *V.*

zioni irrazionali, cioè le curve che sono immagini di corrispondenze fra due curve distinte, o trasformate razionali di tali immagini; e dall'esame della configurazione degli *assi* dei sistemi regolari riducibili che le involuzioni stesse individuano, si deduce la proprietà che *se le due involuzioni non sono componenti di una medesima involuzione, la curva possiede un'infinità (discontinua) di sistemi regolari riducibili.*

Intorno a questo risultato se ne raccolgono alcuni altri, fra cui l'osservazione che una involuzione di genere > 1 è individuata dai due sistemi regolari riducibili che essa determina sulla curva.

Infine si mettono in relazione le valenze delle corrispondenze laterali di una data corrispondenza con quelle che, sulla curva immagine, posseggono le corrispondenze ottenute moltiplicando l'una per l'altra le due involuzioni in essa esistenti.

1. Fra due curve C e C' dei generi p e ϖ ($p \geq \varpi$) si abbia una corrispondenza algebrica (n, ν); T indichi l'operazione che conduce da un punto x di C' agli n punti $y' y'' \dots y^n$ omologhi di C, e T^{-1} l'operazione, inversa di T, che conduce da un punto y di C ai ν punti omologhi $x' x'' \dots x^\nu$ di C'. Sulla curva C avremo una serie algebrica γ_n^1 di indice ν descritta dai gruppi G_n omologhi di un punto x variabile su C', ed una serie analoga γ_ν^1 di indice n avremo sulla curva C' (*). Con gli stessi simboli C e C' indicheremo pure le superficie di Riemann relative alle due curve.

Fissati allora su C e su C' due sistemi di retrosezioni $(\sigma_i\, \sigma_{p+i})$ $(i = 1, 2, \dots, p)$ e $(\tau_i\, \tau_{\varpi+i})$ $(i = 1, 2, \dots, \varpi)$, e indicando con $u_1\, u_2 \dots u_p$ gli integrali normali di 1.ª specie di C, con $v_1\, v_2 \dots v_\varpi$ quelli di C', con a_{ik} il periodo di u_i lungo il ciclo σ_{p+k} e con τ_{ik} il periodo di v_i lungo il ciclo $\tau_{\varpi+k}$, si hanno le relazioni di Hurwitz

$$u_k(y') + \cdots + u_k(y^n) = \sum_{i=1}^{i=\varpi} \pi_{ki}\, v_i(x) + \pi_k \qquad (k = 1, 2, \dots, p) \tag{1}$$

nelle quali le π_k sono costanti dipendenti dall'origine delle integrazioni e

(*) Nel caso in cui il gruppo G_n, omologo di x, è omologo anche di altri $\varepsilon - 1$ punti di C'; la γ_ν^1 è composta con una involuzione I_ε e la γ_n^1 ha l'indice $\frac{\nu}{\varepsilon}$. Possiamo tuttavia considerare la γ_n^1 come avente l'indice ν, contando ε volte ogni suo gruppo. Lo stesso dicasi invertendo le due curve.

le π_{kl} soddisfano alle $2\,p\,\varpi$ uguaglianze

$$\left.\begin{array}{l} \pi_{kl} = h_{kl} + \sum\limits_{i=1}^{i=p} g_{il}\, a_{ki} \\ \sum\limits_{i=1}^{i=\varpi} \pi_{ki}\, \tau_{il} = H_{kl} + \sum\limits_{i=1}^{i=p} G_{il}\, a_{ki} \end{array} \quad \begin{pmatrix} k = 1, 2, \ldots, p \\ l = 1, 2, \ldots, \varpi \end{pmatrix} \right\} \tag{2}$$

in cui i numeri h, g, H, G sono interi. Eliminando in esse le π_{kl} si ottengono fra i periodi $a_{ik}\ \tau_{ik}$ le $p\,\varpi$ relazioni bilineari

$$\left.\begin{array}{c} \sum\limits_{i=1}^{i=\varpi} h_{ki}\, \tau_{il} + \sum\limits_{i=1}^{i=\varpi} \sum\limits_{m=1}^{m=p} g_{mi}\, a_{km}\, \tau_{il} = H_{kl} + \sum\limits_{i=1}^{i=p} G_{il}\, a_{ki} \\ (k = 1, 2, \ldots, p;\quad l = 1, 2, \ldots, \varpi). \end{array}\right\} \tag{3}$$

La matrice $\begin{Vmatrix} h_{ik} & g_{ik} \\ H_{ik} & G_{ik} \end{Vmatrix}$ si chiamerà *matrice della operazione T.*

2. Per l'operazione T^{-1} valgono formule analoghe alle (1) (2) (3):

$$v_k(x') + \cdots + v_k(x^\nu) = \sum_{i=1}^{i=p} \overline{\pi}_{ki}\, u_i(y) + \overline{\pi}_k \tag{1'}$$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{\pi}_{kl} = h'_{kl} + \sum\limits_{i=1}^{i=\varpi} g'_{il}\, \tau_{ki} \\ \sum\limits_{i=1}^{i=p} \overline{\pi}_{ki}\, a_{il} = H'_{kl} + \sum\limits_{i=1}^{i=\varpi} G'_{il}\, \tau_{ki} \end{array} \quad \begin{pmatrix} k = 1, 2, \ldots, \varpi \\ l = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix} \right\} \tag{2'}$$

$$\sum_{i=1}^{i=p} h'_{ki}\, a_{il} + \sum_{i=1}^{i=p} \sum_{m=1}^{m=\varpi} g'_{mi}\, \tau_{km}\, a_{il} = H'_{kl} + \sum_{i=1}^{i=\varpi} G'_{il}\, \tau_{ki}. \tag{3'}$$

Ora è importante determinare il modo con cui, nota la matrice di T, si deduce quella di T^{-1}. Indicando perciò con $y'\,y'' \ldots y^n$ e con $y'_0\,y''_0 \ldots y^n_0$ i punti di C corrispondenti per la T ad un punto variabile x e ad un punto fisso x_0 della curva C', con y e y_0 un punto variabile e un punto fisso di C, si consideri con Hurwitz (*) il prodotto

$$C(x\,y) = \prod_{r=1}^{r=n} \frac{\vartheta\left[u_i(y) - u_i(y^r) - c_i\right]}{\vartheta\left[u_i(y_0) - u_i(y^r) - c_i\right]\, \vartheta\left[u_i(y) - u_i(y^r_0) - c_i\right]},$$

(*) Hurwitz, *Ueber algebraische Correspondenzen und das verallgemeinerte Correspondenzprincip* (Math. Annalen, Bd. 28, 1886, § 3).

in cui le trascendenti ϑ sono costruite coi periodi degli integrali normali u_i e le costanti c_i sono scelte in guisa che la funzione $\vartheta[u_i(y_1) - u_i(y_2) - c_i]$ della coppia di punti $y_1 y_2$ della curva C, come funzione della sola y_1 (o della sola y_2) si annulla del 1.° ordine per $y_1 = y_2$ (o per $y_2 = y_1$) e in $p-1$ punti dipendenti solo dalle costanti c_i.

Se $\overline{y}$ è un punto fissato sulla superficie di Riemann C, la $C(x\overline{y})$ è funzione del punto x scorrente sulla superficie di Riemann C'. Si faccia percorrere ad x su C' un ciclo lineare σ: i punti $y' y'' \dots y^n$ si permutano fra loro, e se diciamo y^s il punto in cui va y^r a circolazione compiuta, dando ad r i valori. 1, 2,..., n, anche s acquista, in altro ordine, gli stessi valori. Per effetto del ciclo σ, $u_i(y^r)$ diviene $u_i(y^s) + \lambda_1^s a_{i1} + \cdots + \lambda_p^s a_{ip} + \mu_i^s$, in cui λ_i e μ_i rappresentano numeri interi, onde se per brevità poniamo

$$\vartheta_{1r} = \vartheta[u_i(\overline{y}) - u_i(y^r) - c_i], \quad \vartheta_{2r} = \vartheta[u_i(y_0) - u_i(y^r) - c_i],$$
$$\vartheta_{3r} = \vartheta[u_i(\overline{y}) - u_i(y_0^r) - c_i],$$

si vede che ϑ_{3r} è costante, mentre $\vartheta_{1r}\,\vartheta_{2r}$ si trasformano rispettivamente in

$$\vartheta_{1s} \cdot e^{2\pi i\left\{\sum_i^{1\dots p} \lambda_i^s[u_i(\overline{y}) - u_i(y^s) - c_i] - \frac{1}{2}\sum_{ik}^{1\dots p} \lambda_i^s \lambda_k^s a_{ik}\right\}}$$

e in

$$\vartheta_{2s} \cdot e^{2\pi i\left\{\sum_i^{1\dots p} \lambda_i^s[u_i(y_0) - u_i(y^s) - c_i] - \frac{1}{2}\sum_{ik}^{1\dots p} \lambda_i^s \lambda_k^s a_{ik}\right\}};$$

la funzione $C(x\overline{y})$ acquista dunque il fattore

$$e^{2\pi i \sum_{s=1}^{s=n} \sum_{i=1}^{i=p} \lambda_i^s [u_i(\overline{y}) - u_i(y_0)]} = e^{2\pi i \sum_{i=1}^{i=p} [u_i(\overline{y}) - u_i(y_0)] \sum_{s=1}^{s=n} \lambda_i^s}.$$

Si osservi ora che la somma $\sum_{s=1}^{s=n} (\lambda_1^s a_{i1} + \cdots + \lambda_p^s a_{ip} + \mu_i^s)$, rappresentando l'accrescimento di $\sum_{r=1}^{r=n} u_i(y^r)$ per effetto del ciclo σ, è uguale al valore dell'integrale u_i esteso al ciclo σ' omologo di σ per la T.

Si supponga dapprima che σ sia un ciclo omologo a zero, poi che coincida coi cicli $\tau_l\, \tau_{\omega+l}$ costituenti la coppia di retrosezioni $(\tau_l\, \tau_{\omega+l})$: corrispondentemente alle tre ipotesi, si avrà

$$\sigma' \sim 0, \quad \sigma' \sim h_{1l}\sigma_1 + \cdots + h_{pl}\sigma_p + g_{1l}\sigma_{p+1} + \cdots + g_{pl}\sigma_{2p},$$
$$\sigma' \sim H_{1l}\sigma_1 + \cdots + H_{pl}\sigma_p + G_{1l}\sigma_{p+1} + \cdots + G_{pl}\sigma_{2p}$$

e quindi

$$\sum_{s=1}^{s=n} (\lambda_1^s a_{k1} + \cdots + \lambda_p^s a_{kp} + \mu_k^s) = 0,$$

$$\sum_{s=1}^{s=n} (\lambda_1^s a_{k1} + \cdots + \lambda_p^s a_{kp} + \mu_k^s) = h_{kl} + \sum_{i=1}^{i=p} g_{il} a_{ki},$$

$$\sum_{s=1}^{s=n} (\lambda_1^s a_{k1} + \cdots + \lambda_p^s a_{kp} + \mu_k^s) = H_{kl} + \sum_{i=1}^{i=p} G_{il} a_{ki}$$

cioè

$$\sum_{s=1}^{s=n} \lambda_\varepsilon^s = 0, \qquad \sum_{s=1}^{s=n} \lambda_\varepsilon^s = g_{\varepsilon l}, \qquad \sum_{s=1}^{s=n} \lambda_\varepsilon^s = G_{\varepsilon l}.$$

Risulta da ciò che la $C(x\,\overline{y})$ sulla superficie di Riemann C', resa semplicemente connessa mediante le retrosezioni $(\tau, \tau_{\varpi+l})$, è funzione uniforme; e che inoltre, se si indicano con C^+ e con C^- i valori che essa assume in punti corrispondenti dei bordi positivo o negativo di ciascun taglio, si ha lungo τ_l:

$$C^+ = C^- \, e^{2\pi i \sum_{k=1}^{k=p} g_{kl}[u_k(y) - u_k(y_0)]}, \tag{4}$$

e lungo $\tau_{\varpi+l}$:

$$C^+ = C^- \, e^{2\pi i \sum_{k=1}^{k=p} G_{kl}[u_k(y) - u_k(y_0)]} \tag{5}$$

Poichè la funzione $C(x\,\overline{y})$ ammette degli zeri del 1.° ordine nei punti $x' x'' \dots x^\nu$ omologhi di $\overline{y}$ nella T^{-1} e dei poli del 1.° ordine nei punti $x'_0 x''_0 \dots x_0^\nu$ omologhi di y_0, applicando alla funzione $v_k(x)\, d \log C(x\,\overline{y})$ il teorema di Cauchy, si avrà

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\tau v_k \, d \log C(x\,\overline{y}) = \sum_{r=1}^{r=\nu} \left\{ v_k(x^r) - v_k(x_0^r) \right\},$$

l'integrale essendo esteso al contorno τ della superficie C' resa semplicemente connessa. L'integrale si determina facilmente tenendo presenti le (4) e (5); onde la formula precedente diviene

$$\sum_{i=1}^{i=p} \left\{ u_i(\overline{y}) - u_i(y_0) \right\} \left(G_{ik} - \sum_{l=1}^{l=\varpi} g_{il} \tau_{kl} \right) = \sum_{r=1}^{r=\nu} \left\{ v_k(x^r) - v_k(x_0^r) \right\}. \tag{6}$$

Confrontando la (6) con la (1') e con la prima delle (2') si deduce

$$h'_{kl} = G_{lk} \qquad g'_{kl} = -g_{lk} \qquad (k = 1, 2, \dots, p;\ l = 1, 2, \dots, \varpi);$$

ma allora, sommando le (3) con le (3'), si ottiene

$$\sum_{i=1}^{i=\varpi} (h_{ki} - G'_{ik}) \tau_{li} = H_{kl} + H'_{lk} \quad (k = 1, 2, \ldots, p;\ l = 1, 2, \ldots, \varpi),$$

e perciò si avrà

$$G'_{kl} = h_{lk} \qquad H'_{kl} = -H_{lk} \qquad (k = 1, 2, \ldots, p;\ l = 1, 2, \ldots, \varpi).$$

Si ha dunque la proprietà:

Se $\begin{Vmatrix} h_{kl} & g_{kl} \\ H_{kl} & G_{kl} \end{Vmatrix}$ *è la matrice della operazione T, quella della operazione* T^{-1} *è* $\begin{Vmatrix} G_{lk} & -g_{lk} \\ -H_{lk} & h_{lk} \end{Vmatrix}$ $(h = 1, 2, \ldots, p;\ l = 1, 2, \ldots, \varpi)$ (*),

3. Delle formole (1) (2) (3) può darsi una interpretazione geometrica analoga a quella che abbiamo esposta altrove nel caso delle corrispondenze fra i punti di una curva (**).

Si osservi perciò che ad ogni ciclo σ descritto da un punto x su C' la T fa corrispondere un ciclo σ' di C, dovuto alla sostituzione che, per effetto del ciclo σ, si produce sui punti $y' y'' \ldots y^{n}$ omologhi di x, e che un integrale di 1.ª specie di C dà origine, sommandone i valori nei punti $y' y'' \ldots y^{n}$, ad un integrale di 1.ª specie di C'.

Considerando allora i due spazi S_{2p-1} $S_{2\varpi-1}$ rappresentativi delle due curve ed in essi i rispettivi spazi dei periodi $S_{p-1} = \alpha$ $S_{\varpi-1} = \tau$, corrispondenti ai fissati sistemi di retrosezioni, possiamo dire che la T associa ad un punto razionale di $S_{2\varpi-1}$ un punto razionale di S_{2p-1} e ad un iperpiano della stella (α) un iperpiano della stella (τ).

Indichiamo ora con $x_i \xi_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 2p)$ le coordinate omogenee di punto e di iperpiano in S_{2p-1}, con $y_i \eta_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 2\varpi)$ quelle di punto e di iperpiano in $S_{2\varpi-1}$ e con $\bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2 \ldots \bar{\xi}_p$ e $\bar{\eta}_1 \bar{\eta}_2 \ldots \bar{\eta}_\varpi$ le coordinate entro le stelle (α) e (τ) di due iperpiani delle stelle stesse, assunti in esse come elementi di riferimento gli iperpiani $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p$ e $\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_\varpi$ immagini degli integrali normali. Siano inoltre r e q le caratteristiche delle matrici $\begin{Vmatrix} h_{ik} & g_{ik} \\ H_{ik} & G_{ik} \end{Vmatrix}$

(*) Nella citata Memoria di Hurwitz questa proprietà è solamente enunciata e nel solo caso di corrispondenze fra i punti di una curva. Abbiamo perciò creduto utile darne la dimostrazione.

(**) Rosati, *C.*, § 1.

e $\| \pi_{rs} \|$; escludendo il caso che la corrispondenza data sia a valenza zero, si avrà $0 < r \leq 2\varpi$, $0 < q \leq \varpi$.

È chiaro allora che la corrispondenza indotta da T fra i cicli delle due curve si traduce nelle relazioni lineari

$$\left.\begin{aligned} \rho\, x_i &= h_{i1}\, y_1 + \cdots + h_{i\varpi}\, y_\varpi + H_{i1}\, y_{\varpi+1} + \cdots + H_{i\varpi}\, y_{2\varpi} \\ \rho\, x_{p+i} &= g_{i1}\, y_1 + \cdots + g_{i\varpi}\, y_\varpi + G_{i1}\, y_{\varpi+1} + \cdots + G_{i\varpi}\, y_{2\varpi} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

che definiscono in S_{2p-1} uno spazio ρ' di dimensione $r-1$. Tale spazio, se è $r = 2\varpi$, è riferito collinearmente ad $S_{2\varpi-1}$; se invece è $r < 2\varpi$, è riferito collinearmente ad una stella di $S_{2\varpi-1}$, avente per centro uno spazio ρ'' di dimensione $2\varpi - 1 - r$; i punti razionali di ρ'' sono immagini dei cicli di C' che hanno per omologhi su C dei cicli nulli. L'omografia Ω definita dalle (7) si dirà *immagine* di T.

La corrispondenza indotta da T fra gli integrali di 1.ª specie delle due curve si traduce in una trasformazione proiettiva Π della stella (α) nella stella (τ), definita dalle relazioni lineari

$$\sigma\, \bar{\eta}_i = \pi_{1i}\, \bar{\xi}_1 + \pi_{2i}\, \bar{\xi}_2 + \cdots + \pi_{pi}\, \bar{\xi}_p \qquad (i = 1, 2, \ldots, \varpi);$$

essa è tale che esiste un $S_{p-1+q} = \alpha'$, uscente da α, centro di una stella d'iperpiani che hanno nella stella (τ) l'omologo indeterminato, mentre l'omologo di ogni altro iperpiano di (α) passa costantemente per un $S_{2\varpi-1-q} = \tau'$ uscente da τ, spazio che viene a coincidere con τ quando è $q = \varpi$.

Alla trasformazione proiettiva Ω se ne associ un'altra, che diremo Ω^{-1}, operante sugli iperpiani di S_{2p-1} e di $S_{2\varpi-1}$, rappresentata dalla sostituzione trasposta della (7):

$$\begin{aligned} \rho\, \eta_i &= h_{1i}\, \xi_1 + \cdots + h_{pi}\, \xi_p + g_{1i}\, \xi_{p+1} + \cdots + g_{pi}\, \xi_{2p} \\ \rho\, \eta_{\varpi+i} &= H_{1i}\, \xi_1 + \cdots + H_{pi}\, \xi_p + G_{1i}\, \xi_{p+1} + \cdots + G_{pi}\, \xi_{2p} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \varpi); \end{aligned}$$

per essa ogni iperpiano di S_{2p-1} uscente da ρ' ha l'omologo indeterminato, mentre l'omologo di ogni altro iperpiano di S_{2p-1} descrive in $S_{2\varpi-1}$ la stella di centro ρ''.

Ciò posto, è facile vedere che il significato geometrico delle relazioni (1) (2) (3) di Hurwitz consiste in ciò che Π *è una trasformazione proiettiva subordinata in* Ω^{-1}.

Ed invero i primi membri delle (2) per un fissato valore di k sono le coordinate in $S_{2\bar{\omega}-1}$ dell'iperpiano che corrisponde ad α_k nella proiettività Π, mentre i secondi membri sono le coordinate dell'omologo di α_k in Ω^{-1}; dando a k i valori $1, 2, \ldots, p$, l'asserto resta provato.

4. Da quanto precede discende facilmente la seguente proprietà:

Fra le caratteristiche r e q delle matrici $\begin{Vmatrix} h_{ik} & g_{ik} \\ H_{ik} & G_{ik} \end{Vmatrix}$ *e* $\| \pi_{rs} \|$ *relative alla operazione T sussiste la relazione $r = 2q$, e alla T vengono associati due sistemi regolari riducibili: uno ∞^{p-q-1} della curva C, costituito dagli integrali che dànno somma costante nei gruppi della serie γ_n^1; l'altro ∞^{q-1} di C', generato dalle somme degli integrali di C nei gruppi della serie stessa* (*).

Si supponga anzitutto $q = \varpi$. In tal caso lo spazio τ', inviluppo degli iperpiani omologhi in Π degli iperpiani della stella (α), coincide con τ; si vede allora che dovrà essere $r = 2\varpi$, perchè, se fosse $r < 2\varpi$, esisterebbe in $S_{2\bar{\omega}-1}$ uno spazio ρ'' di dimensione $2\varpi - 1 - r \geqq 0$, inviluppo degli iperpiani omologhi in Ω^{-1} di ogni iperpiano di S_{2p-1}, il quale, per essere Π subordinata in Ω^{-1}, dovrebbe giacere in τ. Ciò è assurdo, perchè ρ'' è uno spazio razionale e τ non può contenere alcun punto reale.

Sia ora $q < \varpi$. Lo spazio razionale ρ', inviluppo degli iperpiani di S_{2p-1} che per la Ω^{-1} hanno in $S_{2\bar{\omega}-1}$ l'omologo indeterminato, dovrà, sempre per essere Π subordinata in Ω^{-1}, giacere in α'; donde segue, in virtù di una proprietà nota (**), che

$$r \leqq 2q. \tag{8}$$

Per la stessa ragione dovrà lo spazio razionale ρ'', di dimensione $2\varpi - 1 - r \geqq 0$, essere contenuto in τ'; ed allora, per la stessa proprietà, si avrà

$$2\varpi - r \leqq 2\varpi - 2q. \tag{9}$$

Dalle disuguaglianze (8) (9) segue allora $r = 2q$.

Lo spazio α', contenente uno spazio razionale ρ' di dimensione $2q - 1$, è centro di una stella immagine di un sistema regolare riducibile ∞^{p-q-1} della curva C; e lo spazio τ', contenendo uno spazio razionale ρ'' di dimen-

(*) Nel caso $q = \bar{\omega} < p$, e nell'altro $q = \bar{\omega} = p$ uno od entrambi i sistemi coincidono col rispettivo sistema totale d'integrali. Tuttavia, per non complicare l'enunciato del teorema continuiamo, anche nei casi suddetti, a parlare di sistemi regolari riducibili.

(**) Rosati, *C.*, § 2.

sione $2(\varpi - q) - 1$, è centro di una stella immagine di un sistema regolare riducibile della curva C'. Ed è chiaro, per l'ufficio che i detti spazi hanno nella proiettività Π, che i sistemi regolari medesimi hanno le proprietà contenute nell'enunciato.

5. D'ora innanzi diremo *asse* di un sistema regolare riducibile (*) lo spazio razionale contenuto nel centro della stella d'iperpiani immagine del sistema.

Nel n.° precedente abbiamo visto che l'operazione T individua due sistemi regolari riducibili, uno ∞^{q-1} della curva C' e l'altro ∞^{p-q-1} della curva C; gli assi $\overline{R}_{2(\varpi-q)-1}$, R_{2q-1} dei due sistemi si chiameranno *primo* e *secondo asse* della operazione T.

Poichè la matrice $\begin{Vmatrix} G_{ki} & -g_{ki} \\ -H_{ki} & h_{ki} \end{Vmatrix}$ di T^{-1} ha la stessa caratteristica $2q$ di quella di T (**), la T^{-1} avrà per primo asse un $R_{2(p-q)-1}$ di S_{2p-1} e per secondo asse un $\overline{R}_{2q-1}$ di $S_{2\varpi-1}$, ed essi saranno assi di due sistemi regolari riducibili ∞^{q-1} $\infty^{\varpi-q-1}$, appartenenti rispettivamente alle curve C e C'. L'omografia Ω', immagine di T^{-1}, la quale è definita dalle formule

$$\rho\, y_i = G_{1i}\, x_1 + \cdots + G_{pi}\, x_p - H_{1i}\, x_{p+1} - \cdots - H_{pi}\, x_{2p}$$

$$\rho\, y_{\varpi+i} = - g_{1i}\, x_1 - \cdots - g_{pi}\, x_p + h_{1i}\, x_{p+1} + \cdots + h_{pi}\, x_{2p}$$

trasforma collinearmente la stella di centro $R_{2(p-q)-1}$ nello spazio $\overline{R}_{2q-1}$.

Dal fatto che i sistemi regolari riducibili, aventi per assi i primi assi di T e di T^{-1} hanno la stessa dimensione $q-1$, segue subito la proprietà, osservata dal COMESSATTI (***), che le somme indipendenti date dagli integrali di C nei gruppi della serie γ_n^1 sono tante quante le somme indipendenti che gli integrali di C' dànno nei gruppi della serie γ_ν^1.

(*) Denominazione introdotta dal prof. SCORZA nella sua importante Memoria: *Intorno alla teoria generale delle matrici di Riemann e ad alcune sue applicazioni* (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, Tomo XLI, 1916).

(**) Invero, con una permutazione di righe e di colonne ed uno scambio delle righe nelle colonne la matrice $\begin{Vmatrix} h_{ik} & g_{ik} \\ H_{ik} & G_{ik} \end{Vmatrix}$ diviene $\begin{Vmatrix} G_{ki} & g_{ki} \\ H_{ki} & h_{ki} \end{Vmatrix}$; e da questa, mutando il segno alle prime p righe ed alle prime ϖ colonne, si ottiene l'altra $\begin{Vmatrix} G_{ki} & -g_{ki} \\ -H_{ki} & h_{ki} \end{Vmatrix}$. Ora è chiaro che le suddette operazioni lasciano invariata la caratteristica della matrice.

(***) COMESSATTI, *Sulle serie algebriche semplicemente infinite di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica* (Rendiconti di Palermo, Tomo XXXVI, 1913).

Nel seguito diremo che una corrispondenza (n, ν) fra due curve $C\, C'$ è di *rango* q, quando le matrici delle relative operazioni T e T^{-1} hanno la caratteristica comune $2q$.

Data fra due curve C e C' una corrispondenza (n, ν) di rango q, restano individuati sulla curva C due sistemi regolari riducibili ∞^{p-q-1} e ∞^{q-1}; l'asse del primo è definito dalle formule

$$\begin{aligned} \rho\, x_i &= h_{i1}\, y_1 + \cdots + h_{i\varpi}\, y_\varpi + H_{i1}\, y_{\varpi+1} + \cdots + H_{i\varpi}\, y_{2\varpi} \\ \rho\, x_{p+i} &= g_{i1}\, y_1 + \cdots + g_{i\varpi}\, y_\varpi + G_{i1}\, y_{\varpi+1} + \cdots + G_{i\varpi}\, y_{2\varpi}\,, \end{aligned} \qquad (i = 1,\, 2, \ldots,\, p)$$

quello del secondo dalle equazioni

$$\begin{aligned} G_{1i}\, x_1 + \cdots + G_{pi}\, x_p - H_{1i}\, x_{p+1} - \cdots - H_{pi}\, x_{2p} = 0 \\ -g_{1i}\, x_1 - \cdots - g_{pi}\, x_p + h_{1i}\, x_{p+1} + \cdots + h_{pi}\, x_{2p} = 0. \end{aligned} \qquad (i = 1,\, 2, \ldots,\, \varpi)$$

Ora è importante notare che questi due spazi razionali R_{2q-1} ed $R_{2(p-q)-1}$ sono l'uno polare dell'altro nel sistema nullo fondamentale Λ della curva C; da ciò si deduce, in virtù di una nota proprietà (*), che essi sono indipendenti. In modo analogo si vede che sono indipendenti, perchè polari l'uno dell'altro nel sistema nullo fondamentale Λ' della curva C', gli assi $\overline{R}_{2q-1}$ $\overline{R}_{2(\varpi-q)-1}$ dei due sistemi regolari riducibili individuati sulla curva C'.

Si consideri ora su C la corrispondenza $T^{-1}\, T$ nella quale un punto y ha per omologo il gruppo costituito dai ν gruppi della serie γ_n^1 uscenti da y (**); l'omografia razionale $\Omega'\, \Omega$, che ne è l'immagine, è singolare e ammette, per l'indipendenza notata degli spazi $\overline{R}_{2q-1}$ ed $\overline{R}_{2(\varpi-q)-1}$, come primo e secondo spazio singolare rispettivamente $R_{2(p-q)-1}$ ed R_{2q-1}. Analogamente, per la indipendenza degli spazi R_{2q-1} ed $R_{2(p-q)-1}$, si riconosce che l'omografia $\Omega\, \Omega'$, immagine della corrispondenza $T\, T^{-1}$ della curva C', è, nell'ipotesi $q < \omega$, singolare, ed ammette come primo e secondo spazio singolare $\overline{R}_{2(\varpi-q)-1}$ ed $\overline{R}_{2q-1}$. Allora, chiamando Σ la serie algebrica della curva C i cui gruppi si ottengono dall'insieme dei ν gruppi di γ_n^1 uscenti da un punto y variabile su C, e Σ' la serie della curva C' ottenuta nello stesso modo dalla γ_ν^1, vediamo che il sistema regolare riducibile di asse R_{2q-1} è costituito

(*) Rosati, *C.*, nota al n.° 8.

(**) Le corrispondenze fra i punti di una curva che consideriamo in questa Nota sono tali che il gruppo omologo di un punto può contenere una o più volte il punto stesso.

dagli integrali che dànno somma costante sia nei gruppi della serie γ^1_n, sia nei gruppi della serie Σ. Si ha cioè la proprietà, dovuta al SEVERI (*), secondo cui *la serie* Σ *e la serie* γ^1_n *della curva* C (e lo stesso dicasi per le serie Σ' e γ^1_ν della curva C') *sono di livello costante per lo stesso sistema regolare riducibile.*

6. Diremo corrispondenze *laterali* della corrispondenza data (n, ν) le corrispondenze simmetriche S ed S' delle curve C e C' ottenute rispettivamente assumendo come omologhi due punti di C appartenenti allo stesso gruppo della serie γ^1_n e due punti di C' appartenenti allo stesso gruppo della serie γ^1_ν.

Indicando con I la corrispondenza identica tanto su C come su C', si hanno le relazioni

$$T^{-1}\,T = \nu\,I + S \qquad T\,T^{-1} = n\,I + S', \tag{10}$$

dalle quali e dall'osservazione fatta in fine del n.° precedente si deduce che lo spazio $R_{2(p-q)-1}$ e, quando è $q < \varpi$, lo spazio $\overline{R}_{2(\varpi-q)-1}$ sono per le omografie immagini di S e di S' spazi fondamentali di punti uniti corrispondenti alle radici $-\nu$ e $-n$ delle rispettive equazioni caratteristiche ed hanno come coniugati gli spazi R_{2q-1} ed $\overline{R}_{2q-1}$. In altri termini, chiamando *dimensione* di una valenza il numero degli integrali indipendenti del sistema lineare associato ad essa, possiamo dire che *le corrispondenze S ed S' posseggono le valenze ν ed n delle rispettive dimensioni $p - q$ e $\varpi - q$.*

7. Si faccia ora l'ipotesi $\nu = 1$; si supponga cioè che C' sia l'immagine di una involuzione K di ordine n e genere ϖ della curva $C\,(p > \varpi)$, e K indichi pure la corrispondenza della curva C nella quale un punto ha per omologo il gruppo della detta involuzione uscente da esso. Le relazioni precedenti assumono in tal caso la forma

$$T^{-1}\,T = K = I + S \qquad T\,T^{-1} = n\,I,$$

e l'omografia $\Omega\,\Omega'$, immagine di $T\,T^{-1}$, diviene l'omografia identica. Dovrà quindi essere $q = \varpi$, e la $\Omega'\,\Omega$, immagine di K, è un'omografia singolare i

(*) SEVERI, *Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche* (Annali di Matematica, Serie III, tomo XII, 1905, n.° 1).

cui spazi singolari (1.° e 2.°) sono un $R_{2(p-\bar\omega)-1}$ e un $R_{2\bar\omega-1}$ polari l'uno dell'altro nel sistema nullo Λ; e nel 2.° di questi essa dovrà subordinare l'omografia identica. Inoltre, poichè dalla relazione $K^2 = nK$ si deduce che l'equazione minima (*) della corrispondenza K è $z^2 - nz = 0$, si vede che le radici dell'equazione caratteristica dell'omografia immagine di K corrispondenti agli spazi fondamentali $R_{2(p-\bar\omega)-1}$ ed $R_{2\bar\omega-1}$ sono rispettivamente 0 ed n. Segue di qui che la corrispondenza S ha per immagine un'omografia coi due soli spazi fondamentali $R_{2(p-\bar\omega)-1}$ $R_{2\bar\omega-1}$, corrispondenti alle radici -1 ed $(n-1)$ dell'equazione caratteristica; cioè la S possiede le due sole valenze 1 ed $(1-n)$ delle rispettive dimensioni $p - \varpi$ e ϖ (**).

8. Ritornando al caso generale, si indichi con $(c_r\, l'_s)$ il prodotto della colonna r^{ma} della matrice di T per la riga s^{ma} della matrice di T^{-1} $(r, s = 1, 2, \ldots, 2p)$, e con $(c'_r\, l_s)$ il prodotto della colonna r^{ma} della matrice di T^{-1} per la riga s^{ma} della matrice di T $(r, s = 1, 2, \ldots, 2\bar\omega)$. L'omografia $\Omega'\Omega$, immagine di $T^{-1}\,T$, sarà allora definita dalle equazioni

$$\rho\, x'_i = (c_i\, l'_1)\, x_1 + (c_i\, l'_2)\, x_2 + \cdots + (c_i\, l'_{2p})\, x_{2p} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2p),$$

e la $\Omega\Omega'$, immagine di $T\,T^{-1}$, dalle altre

$$\rho\, y'_i = (c'_i\, l_1)\, y_1 + (c'_i\, l_2)\, y_2 + \cdots + (c'_i\, l_{2\bar\omega})\, y_{2\bar\omega} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2\varpi);$$

la prima è, come abbiamo visto, un'omografia singolare avente $A_1 = R_{2(p-q)-1}$ ed $A_2 = R_{2q-1}$ come 1.° e 2.° spazio singolare; la seconda è pure, nell'ipotesi $q < \varpi$, singolare, con gli spazi singolari $B_1 = \overline{R}_{2(\bar\omega-q)-1}$ e $B_2 = \overline{R}_{2q-1}$.

La Ω riferisce collinearmente la stella (B_1) allo spazio A_2; segando la detta stella con B_2, nasce un'omografia ω fra gli spazi B_2 ed A_2. In modo analogo dall'omografia Ω', immagine di T^{-1}, nasce un'omografia ω' fra gli spazi A_2 e B_2. Ora è chiaro che le omografie $\Omega'\Omega$ ed $\Omega\Omega'$ subordinano rispettivamente entro gli spazi A_2 e B_2 le omografie non singolari $\omega'\omega$ ed $\omega\omega'$; e poichè è $\omega'\omega = \omega^{-1}(\omega\omega')\,\omega$, si deduce che tali omografie subordinate sono proiettivamente identiche ed hanno perciò la stessa caratteristica e gli stessi invarianti assoluti. D'altra parte, dovendo le corrispondenze simmetriche $T^{-1}\,T$ e $T\,T^{-1}$ possedere valenze tutte semplici e reali (***), la $\omega'\omega$ e

(*) Rosati, *C. P.*, n.° 11.
(**) Rosati, *C. P.*, n.° 17.
(***) Rosati, *V.*, n.° 8.

la $\omega\omega'$ saranno omografie generali, con gli spazi fondamentali tutti reali. Risulta da ciò che l'equazione caratteristica di $\Omega'\Omega$ ammette, oltre la radice 0 di molteplicità $2(p-q)$, delle radici reali $-\rho_1\ -\rho_2 \dots -\rho_l$ di molteplicità $2q_1\ 2q_2 \dots 2q_l$, e che l'equazione caratteristica di $\Omega\Omega'$, oltre alla radice 0 di molteplicità $2(\varpi - q)$, ammette radici reali $-\rho'_1\ -\rho'_2 \dots -\rho'_l$ proporzionali alle prime e delle stesse molteplicità. Sarà inoltre $q_1 + q_2 + \cdots + q_l = q$, e corrispondentemente alle radici $-\rho_i\ -\rho'_i$ le omografie $\omega'\omega$ ed $\omega\omega'$ posseggono due spazi fondamentali reali $S_{2q_i-1}\ \overline{S}_{2q_i-1}$, appoggiati agli spazi α e τ dei periodi lungo spazi di dimensione $q_i - 1$. Osservando poi che

$$-2q_1\rho_1 - 2q_2\rho_2 - \cdots - 2q_l\rho_l = (c_1 l'_1) + (c_2 l'_2) + \cdots$$
$$\cdots + (c_{2p} l'_{2p}) = 2 \sum_i^{1\dots p} \sum_k^{1\dots\varpi} (h_{ik} G_{ik} - H_{ik} g_{ik})$$
$$-2q_1\rho'_1 - 2q_2\rho'_2 - \cdots - 2q_l\rho'_l = (c'_1 l_1) + (c'_2 l_2) + \cdots$$
$$\cdots + (c'_{2\varpi} l_{2\varpi}) = 2 \sum_i^{1\dots p} \sum_k^{1\dots\varpi} (h_{ik} G_{ik} - H_{ik} g_{ik}),$$

si deduce che $\rho_i = \rho'_i\ (i = 1, 2, \dots, l)$.

Dunque le corrispondenze $T^{-1}T$ e TT^{-1} posseggono oltre ad una eventuale valenza nulla, uguali valenze semplici e reali, ciascuna delle quali ha per le due corrispondenze la stessa dimensione.

Infine, dalle relazioni (10) del n.° 6 si trae che *la corrispondenza S possiede, oltre alla valenza semplice ν di dimensione $p-q$, le valenze semplici e reali $r_1 = \rho_1 + \nu, \dots, r_l = \rho_l + \nu$ di dimensioni $q_1\, q_2 \dots q_l$ (essendo $q_1 + q_2 + \cdots + q_l = q$), e che la corrispondenza S', oltre alla valenza semplice n di dimensione $\varpi - q$, possiede le valenze semplici e reali $r'_1 = \rho_1 + n, \dots, r'_l = \rho_l + n$ delle stesse dimensioni $q_1\, q_2 \dots q_l$.*

Osservazione. La proprietà dimostrata conduce immediatamente alla formula di Zeuthen. Se infatti y e y' sono i numeri dei punti di diramazione della corrispondenza (n, ν) sulle due curve C e C', od anche i numeri delle coincidenze delle corrispondenze laterali S' ed S, si avrà (*)

$$y' = 2\nu(n-1) + 2\nu(p-q) + 2(\nu+\rho_1)q_1 + \cdots$$
$$\cdots + 2(\nu+\rho_l)q_l = 2\nu(n+p-1) + 2(\rho_1 q_1 + \cdots + \rho_l q_l)$$
$$y = 2n(\nu-1) + 2n(\varpi-q) + 2(n+\rho_1)q_1 + \cdots$$
$$\cdots + 2(n+\rho_l)q_l = 2n(\nu+\varpi-1) + 2(\rho_1 q_1 + \cdots + \rho_l q_l);$$

(*) Rosati, *V.*, n.° 9.

da cui, sottraendo, si ottiene

$$y - y' = 2\,n\,(\varpi - 1) - 2\,\nu\,(p - 1).$$

Le precedenti uguaglianze dicono inoltre che il difetto di equivalenza z delle due serie algebriche $\gamma_n^1\,\gamma_\nu^1$ è espresso, in funzione delle valenze delle corrispondenze $T^{-1}\,T$ e $T\,T^{-1}$, mediante la formula

$$z = -\rho_1\,q_1 - \cdots - \rho_l\,q_l = \sum_i^{1\ldots p}\sum_k^{1\ldots\varpi}(h_{ik}\,G_{ik} - H_{ik}\,g_{ik}).$$

9. Facciamo ora alcune altre considerazioni che saranno utili per ciò che diremo fra breve.

Mantenendo ai simboli i significati stabiliti nei n.[i] precedenti, si eseguiscano i prodotti $\Omega\,\Lambda$ ed $\Omega'\,\Lambda'$. Si ottengono allora due trasformazioni reciproche: una della stella (B_1) nella stella (A_1) rappresentata dalle formule

$$\left.\begin{aligned}\rho\,\xi_i &= -g_{i1}\,y_1 - \cdots - g_{i\varpi}\,y_\varpi - G_{i1}\,y_{\varpi+1} - \cdots - G_{i\varpi}\,y_{2\varpi}\\ \rho\,\xi_{p+i} &= h_{i1}\,y_1 + \cdots + h_{i\varpi}\,y_\varpi + H_{i1}\,y_{\varpi+1} + \cdots + H_{i\varpi}\,y_{2\varpi}\,,\end{aligned}\right\}\qquad(11)$$

l'altra della stella (A_1) nella stella (B_1) rappresentata dalle altre

$$\left.\begin{aligned}\rho\,\eta_i &= -g_{1i}\,x_1 - \cdots - g_{pi}\,x_p + h_{1i}\,x_{p+1} + \cdots + h_{pi}\,x_{2p}\\ \rho\,\eta_{\varpi+i} &= -G_{1i}\,x_1 - \cdots - G_{pi}\,x_p + H_{1i}\,x_{p+1} + \cdots + H_{pi}\,x_{2p}\,.\end{aligned}\right\}\qquad(12)$$

E poichè la sostituzione (12) è la trasposta della (11), queste reciprocità, che diremo pure *immagini* di T e di T^{-1}, saranno l'una inversa dell'altra. Se dunque λ e λ' indicano i sistemi nulli (non singolari) ottenuti segando Λ e Λ' con gli spazi $A_2 = R_{2q-1}$ e $B_2 = \overline{R}_{2q-1}$, ed $\omega\,\omega'$ le omografie di cui si è detto al n.° precedente, $\omega\,\lambda$ ed $\omega'\,\lambda'$ rappresentano due reciprocità (non degeneri), l'una inversa dell'altra, fra gli spazi A_2 e B_2; si ha cioè $\omega\,\lambda = \lambda'\,\omega'^{-1}$.

La reciprocità $\Omega'\,\Omega\,\Lambda$, immagine della corrispondenza simmetrica $T^{-1}\,T$, è un sistema nullo singolare avente per spazio singolare $R_{2(p-q)-1}$; la sua sezione con A_2 è $\omega'\,\omega\,\lambda = \omega'\,\lambda'\,\omega'^{-1}$, cioè il trasformato di λ' mediante ω'^{-1}.

Analogamente si vede che il sistema nullo immagine di $T\,T^{-1}$ si ottiene proiettando da $\overline{R}_{2(\varpi-q)-1}$ il sistema nullo di B_2 trasformato di λ mediante la ω^{-1}.

Nel caso $\nu = 1$, cioè nel caso in cui la serie γ_n^1 è una involuzione di genere ϖ, si ha $q = \varpi$, $\Lambda' = \lambda'$, $\omega = \Omega = \omega'^{-1}$ e, come facilmente si vede,

$\lambda = \Omega^{-1} \Lambda \Omega$. In questo caso dunque l'omografia Ω, immagine di T, trasforma il sistema nullo Λ' fondamentale di C' nel sistema nullo sezione di Λ col 2.° asse $R_{2\varpi-1}$ dell'involuzione.

10. Data sopra una curva C di genere p una serie algebrica γ_n^1 (irriducibile) di indice ν e di genere ϖ, due suoi gruppi $G\,G'$ si diranno *concatenati* se possono riguardarsi come estremi di una serie di gruppi, tale che due gruppi consecutivi di essa abbiano almeno un punto comune.

Due gruppi concatenati ad un terzo sono tra loro concatenati.

Una serie tale che due suoi gruppi qualunque siano sempre concatenati, si dirà *transitiva; intransitiva* se il detto fatto non si verifica (*). Se il gruppo generico G di una serie intransitiva è concatenato con altri $h-1$ (≥ 0) gruppi, si dirà h il suo *grado di intransitività*. Una involuzione è una serie intransitiva che ha 1 per grado di intransitività. Una serie i cui gruppi sono parzialmente contenuti nei gruppi di una involuzione è intransitiva.

La serie γ_n^1 sia intransitiva di grado $h > 1$ d'intransitività, e siano $G_1\, G_2 \ldots G_{h-1}$ i gruppi concatenati con un suo gruppo generico G; i punti appartenenti ai gruppi $G\, G_1 \ldots G_{h-1}$ sono in numero di $k = \dfrac{h\,n}{\nu}$ e costituiscono un gruppo il quale, al variare di G, descrive una involuzione J_k; ed è chiaro che se γ_n^1 è composta con una involuzione, anche J_k è composta con la stessa involuzione. Sia ora C' una curva, di genere ϖ, birazionalmente identica a γ_n^1. Fra le due curve C e C' intercede una corrispondenza (n, ν) e su C' resta individuata una serie algebrica γ_n^1; questa ha l'indice n ed è birazionalmente identica a C quando γ_n^1 è semplice; se invece γ_n^1 è composta con una involuzione θ_ε, la γ_n^1 ha l'indice $\dfrac{n}{\varepsilon}$ ed è birazionalmente identica a θ_ε. I punti della curva C' che hanno per omologhi i gruppi $G\,G_1 \ldots G_{h-1}$ formano un gruppo il quale, al variare di G, descrive un'involuzione J_h; le due involuzioni $J_k\, J_h$ sono birazionalmente identiche. Se $\overline{G_k}$ e $\overline{G_h}$ sono due gruppi omologhi delle due involuzioni $J_k\, J_h$, il gruppo di γ_ν^1 omologo di un punto di $\overline{G_k}$ è contenuto in $\overline{G_h}$, onde la serie γ_ν^1, contenuta parzialmente in una involuzione, è intransitiva. Osservando poi che due gruppi di γ_ν^1 sono

(*) Queste denominazioni sono state, in un caso analogo, adoperate dal compianto professore R. Torelli nella Nota: *Osservazioni di Geometria sopra una varietà algebrica* (Rendiconti della R. Accademia di Napoli, 1911).

o no concatenati quando sono omologhi di punti appartenenti o no allo stesso gruppo $\overline{G}_k$, si deduce che, se γ^1_n è semplice, il grado di intransitività di γ^1_ν è k; quando invece γ^1_n è composta con una involuzione θ_ϵ, poichè a due punti coniugati in θ_ϵ corrisponde lo stesso gruppo di γ^1_ν, il grado di intransitività di questa serie è $\frac{k}{\varepsilon}$.

Una corrispondenza (n, ν) fra due curve $C\, C'$ si dirà poi *transitiva* o *intransitiva* secondochè sono transitive o intransitive le due serie $\gamma^1_n\, \gamma^1_\nu$ che vengono indotte da essa sulle due curve.

11. Si consideri ora la curva Γ, di genere π, immagine della corrispondenza data, cioè la curva i cui punti rappresentano le coppie di punti omologhi della corrispondenza stessa. Indichiamo con θ e τ le corrispondenze $(1, \nu)$ ed $(1, n)$ che intercedono fra C e Γ, e fra C' e Γ, e siano $K\, K'$ le due involuzioni di ordine ν ed n, birazionalmente identiche a C ed a C', esistenti su Γ. È chiaro inversamente che una curva Γ contenente due involuzioni $K\, K'$ degli ordini ν ed n, e dei generi p e ϖ, non composte con una stessa involuzione, è immagine di una corrispondenza (n, ν) fra due curve di generi p e ϖ, birazionalmente identiche a K e a K'.

Nello spazio rappresentativo $S_{2\pi-1}$ di Γ si avranno due assi M ed N, di dimensioni rispettive $2(\pi - p) - 1$ e $2p - 1$, relativi all'involuzione K, e due assi P e Q di dimensioni $2(\pi - \varpi) - 1$ e $2\varpi - 1$, relativi all'involuzione K': vogliamo ora studiarne la configurazione.

Si osservi perciò che l'omografia immagine di θ trasforma gli assi A_1 e A_2 dell'S_{2p-1} rappresentativo di C in due assi A^*_1 e A^*_2 contenuti nell'asse N ed in esso complementari, e che questi vengono trasformati nei primi dall'omografia immagine di θ^{-1} (n.° 7); analogamente l'asse Q contiene due assi $B^*_1\, B^*_2$ in esso complementari, corrispondenti a B_1 e B_2 nell'omografia immagine di τ, mentre questi corrispondono a quelli nell'omografia immagine di τ^{-1}.

Su Γ si considerino poi due serie algebriche di ordine $n\nu$: la prima, che diremo $K\,K'$, è generata dall'insieme dei gruppi di K' uscenti dai punti di un gruppo variabile di K; la seconda, che diremo $K'K$, è generata dall'insieme dei gruppi di K uscenti dai punti di un gruppo variabile di K'. È chiaro che la prima serie è composta con l'involuzione K', la seconda con l'involuzione K. Con gli stessi simboli $K\,K'$ e $K'K$ intendiamo inoltre di rappresentare le due corrispondenze di Γ nelle quali un punto x ha per omologo il gruppo della 1.ª o della 2.ª serie che nascono rispettivamente dal gruppo di K o dal gruppo di K' uscente da x. Tali corrispondenze sono manifestamente l'una inversa dell'altra e si hanno le relazioni

$$KK' = \theta^{-1}\, T^{-1}\, \tau \qquad K'K = \tau^{-1}\, T\, \theta.$$

Dalla prima di queste si deduce che l'omografia singolare immagine di KK' ha per 1.° spazio singolare lo spazio di $S_{2\pi-1}$ luogo dei punti il cui omologo per l'omografia immagine di θ^{-1} o è indeterminato o è giacente nello spazio A_1, e per 2.° spazio singolare quello corrispondente a B_2 nell'omografia immagine di τ. Il 1.° è dunque lo spazio (MA^*_1), di dimensione $2(\pi - q) - 1$, congiungente M con A^*_1; il 2.° è lo spazio B^*_2. Analogamente l'omografia immagine di $K'K$ ha per 1.° spazio singolare l'$R'_{2(\pi-q)-1} = (PB^*_1)$ e per 2.° spazio singolare A^*_2.

Gli integrali dei sistemi regolari riducibili aventi per assi B^*_2 e A^*_2 hanno la proprietà di dar somma costante nei gruppi delle serie KK' e $K'K$; dunque:

I sistemi regolari riducibili rispetto a cui sono di livello costante le due serie algebriche KK' e $K'K$ hanno la stessa dimensione $\pi - q - 1$, se q è il rango della corrispondenza di cui è immagine la curva sostegno delle due involuzioni.

Si osservi ora che ogni punto di N è unito nell'omografia immagine di K (n.° 7); un tale punto avrà dunque l'omologo indeterminato nell'omografia immagine di KK' quando e soltanto quando sarà indeterminato il suo omologo nell'omografia immagine di K'. Questa considerazione dice che lo spazio A^*_1 è l'intersezione di N con P; analogamente B^*_1 sarà l'intersezione di Q con M. D'altra parte il 2.° spazio singolare dell'omografia immagine di KK' è quello che nell'omografia immagine di K' corrisponde allo spazio congiungente N con P; e poichè in questa omografia ogni spazio uscente da P ha per corrispondente la sua traccia nello spazio Q (n.° 7), segue che B^*_2 è l'intersezione di Q con lo spazio (NP) congiungente N con P; ed analogamente A^*_2 sarà l'intersezione di N con lo spazio (MQ) congiungente M con Q.

Risulta allora che gli spazi (MA^*_1) e B^*_2, singolari per l'omografia immagine di KK' (e lo stesso dicasi per quelli dell'omografia immagine di $K'K$), sono tra loro indipendenti. Invero, poichè B^*_1 è contenuto in M, lo spazio che congiunge M, A^*_1, B^*_2 contiene $Q = (B^*_1\, B^*_2)$ e quindi A^*_2, intersezione di (MQ) con N. L'asserto è dunque provato, perchè M, A^*_1, A^*_2 appartengono ad $S_{2\pi-1}$.

Si noti infine che gli spazi M ed N, e così pure P e Q, sono l'uno polare dell'altro nel sistema nullo Λ^* fondamentale di Γ. E poichè l'omografia immagine di θ trasforma il sistema nullo Λ di C in quello che si ottiene segando con N il sistema nullo Λ^* (n.° 9), segue che A^*_1 A^*_2 sono spazi polari l'uno dell'altro nel detto sistema nullo sezione e quindi sono l'uno polare dell'altro rispetto a Λ^* gli spazi (MA^*_1) e A^*_2. Analogamente sono polari rispetto a Λ^* gli spazi (PB^*_1) e B^*_2.

12. Dall'esame della configurazione degli assi delle due involuzioni K e K', abbiamo dedotto che i due sistemi regolari riducibili $\infty^{\pi-q-1}$ di assi A^*_2 e B^*_2 sono entrambi complementari di quello ∞^{q-1} avente per asse lo spazio (MA^*_1). Se dunque i due sistemi regolari suddetti non sono coincidenti, se cioè non coincidono i loro assi A^*_2 e B^*_2, essi appartengono, in virtù di un teorema di Severi (*), ad una infinità (discontinua) di sistemi regolari della stessa dimensione. Si ha dunque la proprietà:

Se i sistemi regolari riducibili rispetto a cui sono di livello costante le due serie algebriche KK' e $K'K$ sono distinti, essi appartengono ad una infinità discontinua di sistemi regolari della stessa dimensione.

13. Supponiamo ora che gli spazi A^*_2 e B^*_2 coincidano; in tal caso coincideranno anche gli spazi (MA^*_1) e (PB^*_1) polari dei primi rispetto al sistema nullo Λ^*, e le omografie singolari immagini delle corrispondenze KK' e $K'K$ avranno gli stessi spazi singolari. Ricerchiamo ora quali omografie essi inducono nel loro secondo spazio singolare. Si osservi perciò che nell'omografia immagine di K ogni punto non giacente in M ha per omologo la sua proiezione fatta dal centro M sullo spazio N, e che nell'omografia immagine di K' ogni punto esterno a P ha per omologo la sua proiezione fatta dal centro P nello spazio Q (n.° 7).

Ne segue che ogni punto comune agli spazi N e Q è unito nelle omografie immagini di KK' e di $K'K$. Dunque, nell'ipotesi che A^*_2 e B^*_2 coincidano, le suddette omografie subordinano nel loro 2.° spazio singolare l'o-

---

(*) Severi, *Sugli integrali abeliani riducibili* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, Vol. XXIII, serie 5.ª, 1914, Nota II, n.° 4). — Scorza, *Intorno alla teoria generale delle matrici di Riemann, ecc.* (l. c., Parte I, n.° 41).

mografia identica. Le due corrispondenze KK' e $K'K$, inverse l'una dell'altra, posseggono allora la valenza 0 rispetto al sistema regolare riducibile avente per asse $A^*_2 = B^*_2$ ed una ulteriore valenza intera, che dovrà essere la medesima per entrambe, rispetto al sistema regolare riducibile di asse $(MA^*_1) = (PB^*_1)$. Applicando allora un teorema che abbiamo dimostrato altrove (*), si deduce che le dette corrispondenze sono equivalenti (in particolare coincidenti); si ha cioè

$$KK' - K'K \equiv 0.$$

Dunque la differenza dei gruppi omologhi di un punto x nelle corrispondenze KK' e $K'K$ descrive (al variare di x) una serie lineare (virtuale). E poichè il gruppo corrispondente ad x in KK' non varia quando x percorre un gruppo di K, si deduce che i gruppi corrispondenti in $K'K$ ai punti di uno stesso gruppo di K sono equivalenti (in particolare coincidenti); cioè sono equivalenti i gruppi della serie $K'K$ contenenti uno stesso gruppo dell'involuzione K. Sulla curva C, immagine di K, i gruppi della serie $K'K$ sono dalla θ^{-1} trasformati nei gruppi della serie γ^1_n contati ν volte; la serie stessa è dunque tale che due suoi gruppi aventi un punto comune dànno origine, ripetuti ν volte, a gruppi equivalenti; più in generale, se G_n e G'_n sono due gruppi concatenati di γ^1_n, sarà $\nu G_n \equiv \nu G'_n$. Si deduce allora che la serie γ^1_n è intransitiva, chè altrimenti, dovendo i suoi gruppi ripetuti ν volte dare origine a gruppi equivalenti, sarebbero essi stessi equivalenti, e la corrispondenza $(n\nu)$ fra le due curve C e C' sarebbe a valenza zero, cioè sarebbe $q = 0$.

Rileviamo intanto il risultato:

La curva immagine di una corrispondenza transitiva, che non sia a valenza zero, possiede una infinità (discontinua) di sistemi regolari riducibili.

Sempre nell'ipotesi che gli spazi A^*_2 B^*_2 coincidano, indichiamo con h il grado di intransitività di γ^1_n e con k quello di γ^1_ν. Dovrà essere $k\nu = hn$ e sulle curve C e C' si avranno due involuzioni J_k ed J_h degli ordini k ed h, birazionalmente identiche e tali che, se $\overline{G_k}$ e $\overline{G_h}$ sono due loro gruppi corrispondenti, due punti appartenenti ad uno dei due gruppi hanno per omo-

(*) Rosati, *V.*, n.º 8. L'ulteriore valenza intera posseduta dalle due corrispondenze KK' e $K'K$ è poi facile a determinarsi. Infatti, poichè nel caso che stiamo esaminando si ha $(KK')^2 \equiv K^2K'^2 = \nu K \,.\, nK' = n\nu \,.\, KK'$, l'equazione minima a cui soddisfano le corrispondenze stesse sarà $z^2 - n\nu z = 0$, dal che si deduce che esse posseggono le valenze 0, $-\nu n$.

loghi nella corrispondenza (n, ν) due gruppi concatenati ed appartenenti all'altro (n.° 10). Sulla curva Γ alle coppie di punti omologhi appartenenti ai gruppi $\overline{G}_k$ e $\overline{G}_h$ corrisponde un gruppo di $k\nu = hn$ punti, il quale descrive, al variare di $\overline{G}_k$ e di $\overline{G}_h$, una involuzione L, trasformata di J_k mediante la corrispondenza θ e di J_h mediante la τ. La involuzione L, birazionalmente identica a J_k ed a J_h, è manifestamente composta con le due involuzioni K e K'. Si determini il genere dell'involuzione L, o, ciò che è lo stesso, delle involuzioni $J_k J_h$. Indichiamo perciò con u un integrale di 1.ª specie della curva C, con G un gruppo generico della serie γ_n^1, con $G_1 G_2 \dots G_{h-1}$ i gruppi della serie stessa concatenati con G; se $\overline{G}_k$ è il gruppo dell'involuzione J_k contenente $G\, G_1 \dots G_{h-1}$, si ha la congruenza

$$u(G) + u(G_1) + \cdots + u(G_{h-1}) \equiv \nu\, u(\overline{G}_k),$$

nella quale $u(G)$, $u(G_1) \dots$ rappresentano le somme, determinate a meno di periodi di u, dei valori che l'integrale u possiede nei punti dei gruppi $G, G_1, \dots$

Da essa si deduce l'altra

$$\nu\, u(G) + \nu\, u(G_1) + \cdots + \nu\, u(G_{h-1}) \equiv \nu^2\, u(\overline{G}_k),$$

e poichè, come sopra si è visto, i gruppi $G\, G_1 \dots G_{h-1}$ dànno origine, ripetuti ν volte, a gruppi equivalenti, si avrà

$$h\nu \,.\, u(G) \equiv \nu^2 \,.\, u(\overline{G}_k).$$

Segue di qui che, al variare con continuità di G e quindi di $\overline{G}_k$, un integrale u che dia somma costante nei punti del gruppo variabile $\overline{G}_k$ deve dare somma costante nei punti del gruppo G e viceversa. Ma gli integrali indipendenti che dànno somma costante nei punti del gruppo variabile G sono in numero di $p - q$, dunque il genere di J_k e quindi di L è q. Si ha dunque la proprietà:

Se i due sistemi riducibili $\infty^{\pi-q-1}$ rispetto a cui sono di livello costante le due serie algebriche $K K'$ e $K' K$ sono coincidenti, le due involuzioni K e K' sono componenti di una stessa involuzione di genere q, la quale è di livello costante per lo stesso sistema regolare riducibile.

Osservazione I. Un caso in cui si verificano le condizioni dell'ultimo enunciato si ha quando le due involuzioni K e K' sono *permutabili,* cioè quando ogni gruppo di $n\nu$ punti costituito dai gruppi di K' uscenti dai punti di un gruppo di K può pensarsi anche costituito dai gruppi di K

uscenti dai punti di un gruppo di K'. Le due serie algebriche KK' e $K'K$ sono allora coincidenti e si riducono ad una involuzione di ordine $n\nu$. Si ottiene questo caso considerando due curve C e C' contenenti due involuzioni J_n ed J_ν di genere q birazionalmente identiche, cioè due curve che siano trasformate razionali di una stessa curva di genere q. Chiamando omologhi un punto di C ed uno di C' quando appartengono a gruppi omologhi delle due involuzioni, viene stabilita fra le due curve una corrispondenza (n, ν) e la curva Γ immagine della corrispondenza contiene due involuzioni permutabili K e K', degli ordini ν ed n.

Osservazione II. È facile provare che i risultati precedenti valgono anche nel caso, finora escluso, in cui le due involuzioni K e K' siano composte con una medesima involuzione I_ε di ordine ε e di genere π'. Considerando infatti la curva $\overline{\Gamma}$ immagine di I_ε, essa sarà sostegno di due involuzioni $\overline{K}$ e $\overline{K}'$ degli ordini $\nu' = \frac{\nu}{\varepsilon}$ ed $n' = \frac{n}{\varepsilon}$ e dei generi p e ϖ, non composte con una terza.

La $\overline{\Gamma}$ è dunque immagine di una corrispondenza (n', ν') fra due curve C e C' dei generi p e ϖ; e se questa corrispondenza è di rango q, le due serie algebriche $\overline{K}\,\overline{K}'$ e $\overline{K}'\,\overline{K}$ sono di livello costante per due sistemi regolari riducibili $\infty^{\pi'-q-1}$. Indicando con θ la corrispondenza $(1, \varepsilon)$ che intercede fra le due curve $\overline{\Gamma}$ e Γ, l'omografia immagine di θ trasforma lo spazio $S_{2\pi'-1}$ rappresentativo di $\overline{\Gamma}$ nel 2.° asse $R_{2\pi'-1}$ dell'involuzione I_ε (n.° 7), e gli assi A^*_2 e B^*_2 dei due sistemi regolari riducibili per cui sono di livello costante le due serie $\overline{K}\,\overline{K}'$ e $\overline{K}'\,\overline{K}$ in due assi R_{2q-1} R'_{2q-1} contenuti in $R_{2\pi'-1}$. Ma ora è facile vedere, servendosi delle relazioni $KK' = \theta^{-1}\,\overline{K}\,\overline{K}'\,\theta$, $K'K = \theta^{-1}\,\overline{K}'\,\overline{K}\,\theta$, che questi due assi sono i secondi spazi singolari delle omografie immagini delle corrispondenze KK' e $K'K$, cioè gli assi dei due sistemi regolari riducibili per cui sono di livello costante le serie KK' e $K'K$. Questi sistemi hanno dunque la dimensione $\pi - q - 1$ e coincidono quando, e solo quando, coincidono i sistemi analoghi della curva $\overline{\Gamma}$. Se sono distinti, essi apparterranno ad una infinità discontinua di sistemi regolari $\infty^{\pi-q-1}$, i cui assi sono gli omologhi, nell'omografia immagine di θ, di quelli dei sistemi esistenti su $\overline{\Gamma}$; se sono coincidenti, le due involuzioni $\overline{K}$ e $\overline{K}'$ della curva $\overline{\Gamma}$ e quindi le due involuzioni K e K' di Γ saranno componenti di una stessa involuzione di genere q.

14. Studiando la configurazione degli assi delle due involuzioni K e K', abbiamo visto che lo spazio (MQ) sega N in A^*_2 e che lo spazio (NP) sega

Q in B^*_2. Si deduce da ciò che l'intersezione dei secondi assi N e Q delle due involuzioni coincide con l'intersezione dei due spazi A^*_2 e B^*_2. Indicando con $R_{2\varepsilon-1}$ tale intersezione, dovrà dunque essere $0 \leq \varepsilon \leq q$. Supposto allora che il 2.° asse Q di K' sia contenuto nel 2.° asse N di K, dovrà essere $q = \varpi$, i due spazi A^*_2 e B^*_2 coincideranno in N, e le due involuzioni saranno componenti di una stessa involuzione di genere ϖ. Tale involuzione, nell'ipotesi $\varpi > 1$, dovrà essere la K' stessa, cioè K' è composta con K. Si ha dunque il risultato:

Se gli assi omonimi di due involuzioni irrazionali, nessuna delle quali è ellittica, si appartengono, una delle involuzioni è composta con l'altra.

La proprietà inversa è di immediata dimostrazione: basta infatti osservare che, se K e K' sono due involuzioni (irrazionali) di una curva Γ e K è composta con K', ogni integrale che dia somma costante nei gruppi di K' deve dare somma costante nei gruppi di K.

Nel caso particolare che K e K' abbiano lo stesso genere $\varpi > 1$, l'ipotesi che gli assi dell'una coincidano con quelli dell'altra conduce alla conseguenza che le due involuzioni coincidono; dunque:

Sopra una curva Γ due involuzioni distinte dello stesso genere $\varpi > 1$ non possono essere di livello costante per lo stesso sistema regolare riducibile.

15. Dell'ultima proposizione, la quale afferma che *sopra una curva Γ una involuzione di genere $\varpi > 1$ è individuata dai suoi assi*, diamo anche la seguente semplice dimostrazione diretta.

Siano K_n e K_ν due involuzioni della curva Γ, degli ordini n e ν e dello stesso genere $\varpi > 1$, aventi gli assi in comune; esse dànno origine a due corrispondenze (speciali) aventi rispettivamente le valenze $0 - n$, $0 - \nu$ rispetto ai medesimi sistemi d'integrali riducibili. Ma allora le corrispondenze νK_n ed $n K_\nu$, avendo rispetto a quei due sistemi complementari le stesse valenze $0 - n\nu$, saranno equivalenti, cioè si avrà $\nu K_n - n K_\nu \equiv 0$. Dunque, se $G_n G'_n$ e $G_\nu G'_\nu$ sono i gruppi di K_n e di K_ν uscenti da due punti qualunque P e P' di Γ, sarà $\nu G_n - n G_\nu \equiv \nu G'_n - n G'_\nu$. Supposto ora che P e P' appartengano allo stesso gruppo G_ν, si avrà $G_\nu = G'_\nu$; ed allora dalla equivalenza precedente discende $\nu G_n \equiv \nu G'_n$. Cioè due gruppi di K_n uscenti da due punti coniugati in K_ν dànno origine, ripetuti ν volte, a gruppi equivalenti. Così pure due gruppi di K_ν uscenti da due punti coniugati in K_n dànno origine, ripetuti n volte, a gruppi equivalenti. Siano ora C e C' due curve, di genere ϖ, birazionalmente identiche alle due involuzioni K_ν e K_n.

Se si assumono come omologhi due punti di C e C' immagini di due gruppi di K_ν e di K_n uscenti da uno stesso punto di Γ, e supposto che le due involuzioni siano composte con la stessa involuzione K_ε ($\varepsilon \geqq 1$), si avrà fra le due curve C e C' una corrispondenza di indici $n' = \frac{n}{\varepsilon}$ e $\nu' = \frac{\nu}{\varepsilon}$. Proveremo che è $n' = \nu' = 1$, dal che seguirà che le due involuzioni coincidono.

Ed invero, supposto $\nu' > 1$ e quindi anche $n' > 1$ (*), sulle due curve C e C' si avranno due serie $\gamma'_{n'}$ e $\gamma'_{\nu'}$, e, per la proprietà precedentemente osservata, due punti appartenenti ad uno stesso gruppo di ciascuna di esse, dànno origine, ripetuti $n\nu$ volte, a gruppi equivalenti. Ma allora le due serie dovranno essere intransitive (altrimenti seguirebbe $\varpi = 0$) e sulle due curve C e C' si avranno due involuzioni $J_k\, J_h$ birazionalmente identiche, i cui gruppi sono generati dai gruppi delle due serie concatenati con un gruppo variabile; e le due involuzioni hanno inoltre la proprietà che due punti appartenenti ad uno stesso gruppo dànno origine, ripetuti $n\nu$ volte, a gruppi equivalenti. Indicando allora con x_1 un punto generico di C, con $x_2 \dots x_h$ gli ulteriori punti del gruppo di J_h uscente da x_1 e con $u(x)$ un integrale di 1.ª specie qualsiasi di C, si avrà

$$u(x_1) + u(x_2) + \cdots + u(x_h) = \frac{n\nu\, u(x_1) + \cdots + n\nu\, u(x_h)}{n\nu} =$$

$$= \frac{h\, n\nu\, u(x_1) + m_1\, \omega_1 + \cdots + m_{2\varpi}\, \omega_{2\varpi}}{n\nu},$$

in cui $m_1 \dots m_{2\varpi}$ sono numeri interi e $\omega_1 \dots \omega_{2\varpi}$ i periodi normali di $u(x)$.

Poichè al variare con continuità di x_1 gli *interi* $m_1 \dots m_{2\varpi}$ restano fissi, dall'uguaglianza precedente si deduce che un integrale il quale dia somma costante nei punti del gruppo variabile $(x_1\, x_2 \dots x_h)$ deve ridursi ad una costante, cioè l'involuzione J_h non è di livello costante per alcun integrale di C. Ciò porta alla conseguenza $\varpi = 1$ contraria all'ipotesi, e l'asserto è dunque provato.

16. Vogliamo ora mettere in relazione le valenze delle corrispondenze laterali della data corrispondenza (n, ν) con quelle che sulla curva immagine di essa hanno le corrispondenze $K K'$ e $K' K$.

(*) Ricordiamo che una corrispondenza unirazionale fra due curve dello stesso genere $\tilde{\omega} > 1$ è, per una osservazione di WEBER (*Journal für Math.*, t. 76, 1873), birazionale.

Si riprendano perciò le uguaglianze

$$K K' = \theta^{-1} T^{-1} \tau \qquad K' K = \tau^{-1} T \theta$$

stabilite al n.º 11 e si moltiplichino fra loro membro a membro. Tenendo conto che $K K = \nu K$, $K' K' = n K'$, $\theta \theta^{-1} = \nu I$, $\tau \tau^{-1} = n I$, si ottengono le altre

$$n . K K' K = n . \theta^{-1} T^{-1} T \theta \qquad \nu . K' K K' = \nu . \tau^{-1} T T^{-1} \tau,$$

dalle quali si deduce

$$K K' K = \theta^{-1} T^{-1} T \theta \qquad K' K K' = \tau^{-1} T T^{-1} \tau. \tag{13}$$

Si osservi poi che le due corrispondenze $K K'$ e $K' K$, l'una inversa dell'altra, soddisfano alla stessa equazione minima; e questa, per il fatto che le corrispondenze stesse sono speciali, deve mancare di termine noto. Indichiamo con

$$\psi(z) = z^{l+1} + a_1 z^l + \cdots + a_l z = 0$$

questa equazione ($l \geqq 1$) e vediamo come da essa si deducono le equazioni minime delle corrispondenze simmetriche $K K' K$ e $K' K K'$.

Eseguendo perciò le successive potenze di $(K K' K)$, si hanno le relazioni

$$\left.\begin{aligned} &(K K' K) = K . (K' K), \quad (K K' K)^2 = \nu K . (K' K)^2, \\ &(K K' K)^3 = \nu^2 K (K' K)^3, \ldots, \quad (K K' K)^{l+1} = \nu^l K (K' K)^{l+1} \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

dalle quali subito si deduce

$$(K K' K)^{l+1} + \nu a_1 (K K' K)^l + \cdots + \nu^l a_l (K K' K) =$$
$$= \nu^l K . \left\{ (K' K)^{l+1} + a_1 (K' K)^l + \cdots + a_l (K' K) \right\} \equiv 0.$$

La corrispondenza $(K K' K)$ soddisfa dunque all'equazione $\psi\left(\frac{Z}{\nu}\right) = 0$, ottenuta trasformando $\psi(z) = 0$ mediante la trasformazione $Z = \nu z$. Proviamo ora che ogni altra equazione a cui soddisfi $(K K' K)$ ha il grado $\geqq l + 1$, dal che seguirà che $\psi\left(\frac{Z}{\nu}\right) = 0$ è l'equazione minima di $(K K' K)$. Sia infatti

$$z^{m+1} + b_1 z^m + \cdots + b_m z = 0$$

una tale equazione ($m \geqq 1$), mancante pure di termine noto perchè $(K K' K$

è una corrispondenza speciale; si avrà allora l'equivalenza

$$(KK'K)^{m+1} + b_1 (KK'K)^m + \cdots + b_m (KK'K) \equiv 0,$$

la quale, in virtù delle (14), diviene

$$K \left\{ \nu^m (K'K)^{m+1} + \nu^{m-1} b_1 (K'K)^m + \cdots + b_m (K'K) \right\} \equiv 0.$$

Segue di qui che la corrispondenza

$$U = \nu^m (K'K)^{m+1} + \nu^{m-1} b_1 (K'K)^m + \cdots + b_m (K'K),$$

funzione razionale di $(K'K)$, ha per immagine un'omografia singolare, il cui 1.° spazio singolare contiene il 2.° spazio singolare dell'omografia immagine di K, cioè lo spazio N. E poichè la corrispondenza stessa può scriversi sotto la forma $U = (K'K) \left\{ \nu^m (K'K)^m + \nu^{m-1} b_1 (K'K)^{m-1} + \cdots + b_m I \right\}$, il 1.° spazio della omografia stessa dovrà contenere anche il 1.° spazio singolare dell'omografia immagine di $(K'K)$, cioè lo spazio (PB^*_1). Siccome N e (PB^*_1) appartengono ad $S_{2\pi-1}$, la U deve avere per immagine un'omografia nulla, e la $(K'K)$ soddisfa quindi all'equazione

$$\nu^m z^{m+1} + \nu^{m-1} b_1 z^m + \cdots + b_m z = 0.$$

Dovrà dunque essere $m \geqq l$, il che prova quanto sopra abbiamo asserito.

Siano ora $\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_l$ le valenze reali che posseggono le corrispondenze $T^{-1}T$ e TT^{-1} oltre alle eventuali valenze nulle. Poichè, in forza delle relazioni (13), le corrispondenze $KK'K$ e $K'KK'$ della curva Γ si ottengono rispettivamente trasformando mediante θ la $T^{-1}T$ della curva C e mediante τ la TT^{-1} della curva C', si deduce, applicando un teorema noto (*), che l'equazione minima di $KK'K$ ammette le radici 0, $\nu\rho_1, \ldots, \nu\rho_l$, e quella di $K'KK'$ le radici 0, $n\rho_1, \ldots, n\rho_l$. Ma allora le radici dell'equazione $\psi(z) = 0$ saranno i numeri reali 0, $\rho_1, \ldots, \rho_l$ e questi numeri saranno le valenze delle corrispondenze KK' e $K'K$.

Determiniamo ora le dimensioni di queste valenze.

Poichè le omografie immagini di KK' e di $K'K$ sono tali che il 2.° spazio singolare dell'una è indipendente dal 1.° dell'altra, dalla relazione

(*) Rosati, *C. P.*, n.° 18.

$KK'.K'K = n.KK'K$ si deduce che l'omografia immagine di $KK'K$ ha comune il 1.° spazio singolare con quella immagine di KK' ed il 2.° con quella immagine di $K'K$. Tali spazi sono dunque rispettivamente (MA^*_1) e A^*_2. Riprendendo le notazioni del n.° 8, si ricordi che l'omografia $\omega'\omega$, subordinata in A_2 dall'omografia immagine di $T^{-1}T$, ammette gli spazi fondamentali reali $S_{2q_1-1}\, S_{2q_2-1} \dots S_{2q_l-1}$; dicendo dunque $S^*_{2q_1-1}\, S^*_{2q_2-1} \dots S^*_{2q_l-1}$ gli spazi di A^*_2 che corrispondono ai primi nell'omografia immagine di θ, saranno questi gli spazi fondamentali dell'omografia subordinata in A^*_2 da $KK'K$. Se infine si osserva che ogni punto di A^*_2, essendo unito nell'omografia immagine di K (n.° 7), sarà unito nell'omografia immagine di $KK'K$ quando e solo quando è unito in quella immagine di $K'K$, si deduce che i detti spazi $S^*_{2q_1-1} \dots S^*_{2q_l-1}$ sono pure fondamentali per l'omografia subordinata in A^*_2 dall'omografia immagine di $K'K$, e che quindi le valenze $\rho_1\, \rho_2 \dots \rho_l$ di $K'K$ (e lo stesso può dirsi delle valenze di KK') hanno le dimensioni rispettive $q_1\, q_2 \dots q_l$. Si ottiene dunque il risultato:

Le valenze reali che le corrispondenze $T^{-1}T$ e TT^{-1} hanno oltre la eventuale valenza nulla sono uguali e della stessa dimensione di quelle che sulla curva immagine della corrispondenza (n, ν) appartengono alle corrispondenze KK' e $K'K$.

Osservazione. Nel caso in cui gli assi $A^*_2\, B^*_2$ coincidono, le corrispondenze KK' e $K'K$ posseggono oltre la valenza nulla, la sola valenza $-\nu n$ (Cfr. la nota al n.° 13), onde, se q è il rango della corrispondenza (n, ν), il difetto di equivalenza delle due serie γ^1_n e γ^1_ν sarà $z = n\nu q$. Le corrispondenze laterali S ed S' hanno allora, oltre alle eventuali valenze ν ed n, una sola ulteriore valenza, di dimensione q, che per la S ha il valore $\nu(1-n)$ e per S' il valore $n(1-\nu)$. Si ha dunque la proprietà: *Se le corrispondenze laterali S ed S' di una corrispondenza (n, ν) di rango q posseggono, oltre alle eventuali valenze ν ed n, più di una ulteriore valenza, la curva immagine della corrispondenza contiene una infinità (discontinua) di sistemi regolari riducibili di dimensione $q-1$.*

Pisa, marzo 1918.