**4. Das Rayleighsche Strahlungsgesetz
und die Geschwindigkeitsverteilung der Leitungselektronen;
von Erich Kretschmann.**

Seitdem H. A. Lorentz¹⁾ das Gesetz der schwarzen Strahlung für lange Wellen durch Berechnung der Ausstrahlung und des Absorptionsvermögens eines metallischen Leiters mittels der Elektronentheorie abgeleitet hat, ist dies „Rayleighsche“ Gesetz in gleicher Art, aber unter mehr oder weniger allgemeinen Voraussetzungen über die Bewegungsgesetze der Leitungselektronen mehrfach von anderen Autoren hergeleitet worden.²⁾ Während Lorentz bei seiner Ableitung mit gleicher Geschwindigkeit aller Elektronen rechnete, wurde später, wie es scheint durchweg, das Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilungsgesetz zugrunde gelegt, ohne daß sich das Endergebnis änderte. Daraus mußte man schließen, daß die Gültigkeit des Rayleighschen Gesetzes von der Geschwindigkeitsverteilung der emittierenden und absorbierenden Elektronen in weitem Maße unabhängig sei.

Demgegenüber wird in der vorliegenden Arbeit gezeigt, daß *von allen denkbaren allgemeingültigen Geschwindigkeitsverteilungen der Leitungselektronen allein die Maxwellsche mit dem Rayleighschen Strahlungsgesetz verträglich ist*. Das abweichende Ergebnis von H. A. Lorentz erklärt sich daraus, daß der von ihm wie auch sonst vielfach³⁾ übernommene be-

1) H. A. Lorentz, Versl. Amsterdam. XI. 1903. S. 787. Enz. d. Math. Wiss. V. 3, S. 326 (W. Wien).

2) In bisher allgemeinster Weise wohl von McLaren, Phil. Mag. (6) 21. S. 66. 1911 u. 25. S. 43. 1913. Vgl. aber hierzu und zu H. A. Lorentz, die Kritik von C. W. Oseen, Ann. d. Phys. 49. S. 71. 1916 u. 50. S. 270. 1916.

3) Z. B. Enz. d. Math. Wiss. V. 3, S. 326. Müller-Pouillet IV. 2, 3. S. 1174. Gl. 4. 1914. Abraham, Theorie d. Elektrizität. Bd. II.

kannte *Drudesche Ausdruck der elektrischen Leitfähigkeit*

$$\kappa = \frac{e^2 \cdot l \cdot N}{2 \pi m v}$$

fehlerhaft ist, und zwar im Verhältnis $\frac{3}{2}$ zu groß, ganz abgesehen natürlich von der Unzulänglichkeit der zu seiner Ableitung benutzten Annahmen. Diese sonderbare Tatsache, auf die ich durch Spezialisierung meines unten abgeleiteten, ganz allgemein geltenden Ausdrucks für die Leitfähigkeit stieß, ist noch dazu *bereits im Jahre 1898* — vor Drudes Arbeit — von E. Riecke¹⁾ mitgeteilt. Riecke führt eine Bemerkung eines Hrn. van Everdingen an des Inhalts, daß die vom äußeren Felde verzögerten Elektronen im Mittel etwas länger zwischen zwei Zusammenstößen mit Atomen unterwegs und darum in jedem Augenblicke zahlreicher sind als die beschleunigten und daß infolgedessen bei annähernd gleichem Betrage aller Elektronengeschwindigkeiten die mittlere gerichtete Geschwindigkeit sich um ein Drittel kleiner ergibt als ohne Berücksichtigung dieses Umstandes. Von der Richtigkeit dieser Bemerkung kann man sich durch eine einfache Rechnung überzeugen.²⁾ Der bei Berechnung des zu κ proportionalen Absorptionsvermögens begangene Fehler gleicht sich bei H. A. Lorentz zufällig dadurch aus, daß auch die Ausstrahlung für gleiche Geschwindigkeit aller Elektronen gerade $\frac{3}{2}$ mal so groß herauskommt wie für die Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung.

1) E. Riecke, Wied. Ann. **66**, S. 1199, 1898.

2) Ist v die Grundgeschwindigkeit, V_z die dagegen kleine mittlere Zusatzgeschwindigkeit, die das äußere Feld bei jedem einzelnen Elektron erzeugt, und ϑ der Winkel zwischen den Richtungen v und V_z , so ist die relative Häufigkeit der Elektronen, deren Bewegungsrichtung in den Winkelbereich ϑ bis $\vartheta + d\vartheta$ fällt, also nicht gleich $\frac{1}{2} \sin \vartheta d\vartheta$, sondern bis auf Größen höherer als erster Ordnung in V_z/v gleich

$$\frac{\sin \vartheta d\vartheta}{2 \left(1 + \frac{V_z}{v} \cos \vartheta \right)}$$

und die mittlere gerichtete Geschwindigkeit aller Elektronen

$$\bar{v}_z = \int_0^\pi \frac{d\vartheta \sin \vartheta (v \cos \vartheta + V_z)}{2 \left(1 + \frac{V_z}{v} \cos \vartheta \right)} = \frac{V_z}{2} \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta (1 - \cos^2 \vartheta) = V_z \left(1 - \frac{1}{3} \right)$$

und daher auch die Leitfähigkeit um $\frac{1}{3}$ kleiner als der angegebene Wert.

Bei der nachfolgenden Ableitung der obengenannten Beziehung zwischen dem Gesetz der schwarzen Strahlung für lange Wellen und der Geschwindigkeitsverteilung der Leitungselektronen werden hinsichtlich der Wechselwirkungen dieser miteinander und mit den Atomen des Leiters keinerlei dynamische Voraussetzungen gemacht und sowohl das Leit- und Absorptionsvermögen wie die spektrale Intensität der Ausstrahlung auf denselben rein kinematischen und äußerst einfachen Begriff der Beharrungszeit zurückgeführt. (Gleichung (2) und (3).)

Zur mathematischen Zerlegung der von den Leitungselektronen ausgesandten Strahlung in harmonische Teilschwingungen verwende ich statt der gewöhnlich benutzten über große Zeiten erstreckten Fourierschen Summen Fouriersche Integrale über unmeßbar kleine Zeitabschnitte. Damit gewinne ich unmittelbaren Anschluß an den physikalischen Begriff der spektralen Strahlungsintensität, und weiche zugleich dem von C. W. Oseen¹⁾ gegen die übliche Art der Rechnung erhobenen Einwand von vornherein aus.

I. Die elektrische Leitfähigkeit.

Unabhängig davon, ob man sich die Elektronen im Innern eines metallisch leitenden Körpers unter der Wirkung irgendwelcher Kräfte zwischen ruhenden und für sie undurchdringlichen Atomen hin- und herfliegend denkt oder ob man annimmt, daß sie von den Atomen oder Molekülen, auf die sie treffen, mehr oder weniger oft für längere oder kürzere Zeit festgehalten werden, oder ob man sich die Elektrizitätsleitung als Verschiebung zusammenhängender Elektronengitter innerhalb mikroskopisch kleiner kristallinischer Teile des Körpers vorstellt²⁾, kann man die von den Elektronen herrührende Leitfähigkeit eines makroskopisch isotropen und homogenen Körpers in folgender Weise ausdrücken.

In der Raumeinheit des Körpers gebe es

$$(1) \quad N = \int f \, d\sigma$$

1) C. W. Oseen, Ann. d. Phys. 49. S. 71. 1916 u. 50. S. 270. 1916.

2) Einen zusammenfassenden Bericht über neuere Theorien der Leitfähigkeit mit Literaturnachweisen gibt W. Meißner, Jahrb. Rad. u. Elektr. 17. S. 229. 1921.

„Leitungselektronen“ (Masse m , Ladung e), die dauernd oder zeitweise bei der Elektrizitätsleitung mitwirken. Hier bezeichne $d\sigma$ ein Element des Geschwindigkeitsraumes (v_x, v_y, v_z) und f die Anzahl der in ihm gleichzeitig enthaltenen Elektronen. Ist, wie angenommen werde, die Raumeinheit so groß gewählt, daß die mikroskopischen Anisotropien des Körpers sich in ihr ausgleichen, Temperatur, Druck und sonstige Zustandsgrößen räumlich konstant und zunächst auch kein äußeres elektrisches oder magnetisches Feld vorhanden, so kann man mit $d\sigma = 4\pi v^2 dv$ schreiben:

$$(1a) \quad N = 4\pi \int_0^{\infty} f \cdot v^2 \cdot dv,$$

wo die Verteilungsfunktion f nur von dem Betrage v der Elektronengeschwindigkeit abhängt. Von den N Elektronen der Raumeinheit greife ich in einem beliebigen Augenblicke die $f d\sigma$ heraus, deren Geschwindigkeiten v demselben unendlich wenig ausgedehnten Bereiche $d\sigma$ angehören, also nach Betrag und Richtung nahezu gleich sind, und verfolge ihre weitere Bewegung. Die Geschwindigkeiten werden sich dabei in unregelmäßiger Weise über einen allmählich wachsenden Bereich verteilen, aber bei der vorausgesetzten Isotropie muß die mittlere Geschwindigkeit $\bar{v}$ der herausgegriffenen Elektronen nach Verlauf jeder beliebigen Zeit τ die gleiche Richtung wie die Anfangsgeschwindigkeit v haben und kann in ihrem Betrage nur von v und τ abhängen. Man hat daher:¹⁾

$$(2) \quad \bar{v} = \lambda(v, \tau) \cdot v.$$

Die Funktion $\lambda(v, \tau)$ mißt hiernach die mittlere Nachwirkung der Anfangsgeschwindigkeit v über die Zeit τ . Es werde angenommen, daß diese Nachwirkung bei allen vorkommenden Geschwindigkeiten innerhalb einer festen „Bremszeit“ T_m praktisch verschwindet, so daß man mit hinreichender Annäherung

$$(3) \quad \lambda(v) \equiv \int_0^{\infty} \lambda \cdot d\tau = \int_0^{T_m} \lambda d\tau$$

1) Für anisotrope Körper wäre einfach $\bar{v}_x = \lambda_{11} v_x + \lambda_{12} v_y + \lambda_{13} v_z$ usw. anzusetzen.

setzen darf. Des weiteren werde angenommen, daß keine Anfangsgeschwindigkeit v eine ihr entgegengerichtete mittlere Geschwindigkeit $\bar{v}$ erzeugt oder daß stets

$$(3a) \quad \lambda > 0$$

sei.¹⁾ Diese Annahmen werden im folgenden, wo sie nur bei den Ableitungen der Gleichungen (4) und (20) verwertet werden, durchaus nicht vollständig ausgenutzt, doch schien es wegen ihrer Einfachheit und inneren Wahrscheinlichkeit unzweckmäßig, sie den Erfordernissen der vorliegenden Untersuchung genau anzupassen und sie so zwar einzuschränken, aber zugleich unübersichtlicher zu machen.

Die durch (3) bestimmte Größe $\Lambda(v)$ ergibt mit v malgenommen nach (2) den von den Elektronen mit der Anfangsgeschwindigkeit v im Mittel in der Richtung v durchlaufenen Weg und werde demgemäß als die „Beharrungszeit“ der Geschwindigkeit v bezeichnet.

Es wirke nun in der z -Richtung ein konstantes äußeres elektrisches Feld $\mathfrak{E}_z$ auf den Körper. Dieses erzeugt während des Zeitelementes $t - (\tau + d\tau)$ bis $t - \tau$ bei allen Elektronen den Geschwindigkeitszuwachs

$$dv_z = \frac{e \cdot \mathfrak{E}_z}{m} \cdot d\tau,$$

aus dem zur Zeit t , wenn v in den Mittelwert $\bar{v}$ — der jetzt $\pm \lambda_{10}$ sein mag — übergegangen ist, der Zuwachs

$$d\bar{v}_z = \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial v_z} \cdot \frac{e \cdot \mathfrak{E}_z}{m} \cdot d\tau$$

entsteht. Mittelt man über alle Elektronen, deren Gesamtzahl und Geschwindigkeitsverteilung jetzt N' und f' seien, und integriert nach τ von 0 bis ∞ , so erhält man in

$$\int_0^\infty d\tau \cdot \frac{1}{N'} \int f' d\sigma \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial v_z} \cdot \frac{e \cdot \mathfrak{E}_z}{m} = \frac{e \cdot \mathfrak{E}_z}{m N'} \int f' d\sigma \frac{\partial}{\partial v_z} \int_0^\infty d\tau \bar{v}_z$$

den Mittelwert der ganzen von $\mathfrak{E}_z$ erzeugten gerichteten Elektronengeschwindigkeit und durch Multiplikation mit $e \cdot N'$ die zugehörige Stromdichte i_z . Die Leitfähigkeit ist demnach:

$$\kappa = \left(\frac{d i_z}{d \mathfrak{E}_z} \right)_{\mathfrak{E}_z=0} = \frac{e^2}{m} \int f d\sigma \frac{\partial}{\partial v_z} \int_0^\infty d\tau \cdot \bar{v}_z,$$

1) Man überzeugt sich leicht, daß diese Annahme auch erfüllt ist, wenn in jedem Augenblicke ein beliebig großer Teil der Leitungselektronen an Gleichgewichtslagen gebunden ist, sofern nur die Frequenzen ihrer Schwingungen um diese Gleichgewichtslagen hinreichend verschieden sind.

wo wieder die für $\mathfrak{E} = 0$ geltenden Werte von f und $\bar{v}_z$ einzusetzen sind. Die Erfahrung lehrt bekanntlich, daß dieser für $\mathfrak{E} = 0$ bestimmte Wert der Leitfähigkeit zugleich für alle praktisch in Betracht kommenden elektromotorischen Kräfte gilt, was sich aus dem verhältnismäßig geringen Einfluß des äußeren Feldes auf die Elektronenbewegung leicht erklärt.¹⁾ Nach (2) und (3) wird:

$$\kappa = \frac{e^2}{m} \int d\sigma f \cdot \left(A + \frac{v_z^2}{v} \frac{\partial A}{\partial v} \right)$$

und wegen der Isotropie von f :

$$(4) \quad \kappa = \frac{4\pi e^2}{m} \int_0^\infty dv f \cdot v^2 \left(A + \frac{v}{3} \frac{\partial A}{\partial v} \right)$$

oder:

$$(4a) \quad \kappa = \frac{4\pi e^2}{m} \int_0^\infty dv f \cdot \frac{\partial}{\partial v} (v^3 A).$$

Würde, wie die ältere Theorie annimmt, die Bewegung der Elektronen nur durch Stöße an harten elastischen Atomen unterbrochen, bei denen im Mittel die Bewegungsrichtung nach dem Stoße unabhängig von der vor dem Stoß wird, so wäre die Beharrungszeit A einfach die mittlere Zeit bis zum nächsten Stoße oder, wenn l die mittlere freie Weglänge bezeichnet:²⁾

$$(5) \quad A = \frac{l}{2v} \quad \text{und} \quad A + \frac{v}{3} \frac{\partial A}{\partial v} = \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2v}.$$

Damit wird nach (4):

$$(5a) \quad \kappa = \frac{2}{3} \cdot \frac{4\pi e^2}{m} \int_0^\infty dv f \cdot v^2 \cdot \frac{l}{2v}.$$

Für annähernd gleiche Geschwindigkeit aller Elektronen ergibt sich mit

$$(6a) \quad \frac{m}{2} v^2 = \frac{3}{2} k T = \alpha T$$

$$\kappa = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2 \cdot l \cdot N}{2m v} = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2 N \cdot l \cdot v}{4\alpha T}.$$

1) Auszunehmen ist vermutlich die sogenannte Überleitung.

2) Der Ansatz (5) ergibt für $v = 0$ eine unendliche Beharrungszeit und nach (2) einen endlichen mittleren Weg und wäre daher streng genommen wohl durch einen Ansatz etwa der Form $A = l/2(v - v_0)$ zu ersetzen, wo v_0 eine gegen die mittlere Elektronengeschwindigkeit sehr kleine Geschwindigkeit bezeichnet.

Das ist nur $\frac{2}{3}$ des von Drude¹⁾ angegebenen und vielfach übernommenen²⁾ Wertes. Der Unterschied erklärt sich leicht, und zwar zugunsten des obenstehenden Ergebnisses auf die in der Einleitung angegebene Weise.

Bei Maxwellscher Geschwindigkeitsverteilung

$$f = f_0 \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}}, \quad f_0 = N \left(\frac{m}{2\pi k T} \right)^{3/2}, \quad \begin{array}{l} (k = 1,37 \cdot 10^{-10} \text{ Boltz-} \\ \text{mannsche Konstante,} \\ T \text{ absolute Temperatur}) \end{array}$$

folgt aus (4a) und (5):

$$(6b) \quad \kappa = \frac{4\pi}{3} \frac{e^2 \cdot l f_0}{m} \cdot \frac{2kT}{m} = \frac{4}{8} \frac{e^2 \cdot l N}{(2\pi m k T)^{1/2}}$$

übereinstimmend mit dem von H. A. Lorentz³⁾ angegebenen Ausdrucke.

Indessen dürfte in Wirklichkeit bei den vermutlich sehr verwickelten dynamischen Verhältnissen im Innern der festen Körper der einfache Ansatz (5) für die Beharrungszeit nur ausnahmsweise genügen. Vielmehr ist λ als eine von Stoff zu Stoff wechselnde Funktion von v (und T) anzusehen.⁴⁾

II. Die spektrale Intensität der von den Leitungselektronen ausgesandten langwelligen Strahlung.

Im folgenden soll mittels des oben eingeführten Begriffs der Beharrungszeit auch die von den Leitungselektronen einer unendlich dünnen ebenen Stoffschicht senkrecht zu dieser ausgesandte langwellige Strahlung bestimmt werden. Um das Strahlungsgesetz des schwarzen Körpers für lange Wellen zu erhalten, hat man dann nur noch das Absorptionsvermögen der Stoffschicht in bekannter Weise aus der Leitfähigkeit zu berechnen.

Die Schicht stehe senkrecht zur x -Achse. Ihre Dicke sei dx . Wir rechnen so, als ob die Schicht beiderseits an das Vakuum grenzte, obwohl sie tatsächlich nur Teil eines auch in der x -Richtung weiter ausgedehnten homogenen Stoffes sein möge. Dann braucht keine Anisotropie der Elektronen-

1) P. Drude, Ann. d. Phys. 1. S. 566. 1900.

2) Vgl. Einleitung S. 720, Anmerk. 3.

3) H. A. Lorentz, Versl. Amsterdam. XIII. 1905. S. 503.

4) Die nähere Bestimmung dieser Funktion wäre vermutlich die Hauptaufgabe einer eingehenderen Theorie der elektrischen Leitfähigkeit.

bewegung angenommen zu werden, und da Einstrahlungs- und Ausstrahlungsintensität mittels desselben Faktors (q^2/c^2) vom Vakuum auf den betrachteten Stoff umgerechnet werden, so muß sich trotzdem das richtige Strahlungsgesetz ergeben.

Ein Elektron der Schicht mit der Beschleunigung $\ddot{v}$ erzeugt in der Entfernung $r||x$ von seinem Orte das elektrische Feld:

$$(7) \quad \mathfrak{E}_x = 0, \quad \mathfrak{E}_y = \frac{e \cdot \dot{v}_y}{r \cdot c^2}, \quad \mathfrak{E}_z = \frac{e \cdot \dot{v}_z}{r \cdot c^2}$$

und im Mittel während der Zeit $t = 0$ bis $t = T$ in der x -Richtung den zur y -Komponente der Polarisisation gehörenden Energiestrom

$$(8) \quad \mathfrak{S}_x = \frac{e}{4\pi} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T \mathfrak{E}_z^2 \cdot dt = \frac{e^2}{4\pi c^3 r^2} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T \dot{v}_z^2 dt.$$

Während der Zeit 0 bis T sei, nach Fourier zerlegt:

$$(9) \quad \dot{v}_z = \int_0^\infty C_w' \cdot \cos(wt - \vartheta_w) dw.$$

Dann ist bekanntlich:

$$(10) \quad \int_0^T \dot{v}_z^2 dt = \pi \int_0^\infty dw C_w'^2.$$

Setzt man dies in (8) ein und summiert über alle

$$N \cdot dx = dx \int f d\sigma$$

Elektronen der Flächeneinheit der Schicht, wobei der Mittelwert von $C_w'^2$ über alle zur festen Summationszeit (etwa $t = 0$) im gleichen Geschwindigkeitsbereich $d\sigma$ befindlichen Elektronen durch $\overline{C_w'^2}$ bezeichnet werde — und ebenso der entsprechende Mittelwert jeder anderen Größe — so erhält man nach Multiplikation mit r^2 die auf die Einheit des körperlichen Winkels bezogene Intensität der Gesamtstrahlung (für eine Polarisationsrichtung).

$$(11) \quad \frac{1}{2} E = \frac{e^2 \cdot dx}{4c^3 T} \int_0^\infty dw \int \overline{C_w'^2} \cdot f d\sigma \equiv \int_0^\infty dw E_w.$$

Die hierdurch bestimmte Funktion $E_w(w)$ kann aber als Ausstrahlungsintensität der Frequenz w dann und nur dann

angesehen werden, wenn sie sich bei einer Vergrößerung von T nicht ändert.¹⁾

Um E_w in Beziehung zu der Beharrungszeit A zu setzen, zerlegen wir auch v_z nach Fourier. Während der Zeit 0 bis T sei:

$$(12) \quad v_z = \int_0^\infty C_w \cos(wt - \vartheta_w) \cdot dw$$

mit:

$$C_w = \sqrt{A_w^2 + B_w^2}, \quad A_w = \frac{1}{\pi} \int_0^T v_z \cos wt \, dt, \quad B_w = \frac{1}{\pi} \int_0^T v_z \sin wt \, dt.$$

Dann folgt, wenn man (12) und (9) vergleicht:

$$(13) \quad C_w' = w \cdot C_w.$$

Für hinreichend kleine Frequenzen:

$$(14) \quad w \ll 1/T$$

wird bei Vernachlässigung von $w^2 T^2$ gegen 1:

$$(15) \quad \begin{cases} A_w = \frac{1}{\pi} \int_0^T v_z \, dt = \frac{\Delta z}{\pi}, \\ B_w = \frac{1}{\pi} \int_0^T v_z \cdot wt \cdot dt = \frac{wT}{\pi} \{z(T) - z_m\}, \text{ wo } z_m = \frac{1}{T} \int_0^T z \, dt \end{cases}$$

und über die Elektronen eines Geschwindigkeitsbereichs $d\sigma$ gemittelt:

$$\overline{C_w^2} = \overline{A_w^2} = \frac{\overline{\Delta z^2}}{\pi^2}, \quad \text{da } \overline{\{z(T) - z_m\}^2} \lesssim \overline{\Delta z^2} \text{ sein muß.}$$

Somit ist nach (13):

$$(16) \quad \overline{C_w'^2} = w^2 \cdot \overline{C_w^2} = \frac{w^2}{\pi^2} \cdot \overline{\Delta z^2}$$

und nach (11):

$$(17) \quad E_w = \frac{e^2 \cdot w^2}{4\pi^2 c^3} \cdot \frac{dx}{T} \int \overline{\Delta z^2} \cdot f \cdot d\sigma.$$

Hier ist nun die durch (3) gegebene Beharrungszeit A einzuführen. Nach (15) ist:

$$\Delta z^2 = \int_0^T dt \int_0^T dt' v_z \cdot v_z'$$

1) E. Kretschmann, Zeitschr. f. Phys. 5. S. 77. 1921. Für hinreichend kleine T wird E_w natürlich (vgl. (9)) stets von T abhängig.

wenn v_z und v_z' die Werte von v_z zu den Zeiten t und t' sind. Mit den Integrationsveränderlichen

$$(18) \quad t' - t = \tau \quad \text{und} \quad t' + t = \varrho$$

wird:

$$\Delta z^2 = \int_0^T d\tau \int_{\tau}^{2T-\tau} d\varrho \cdot v_z \cdot v_z'.$$

Die Summe von $v_z \cdot v_z'$ genommen über alle Elektronen der Raumeinheit hängt bei stationärem Zustande, den wir voraussetzen, nicht vom Zeitpunkte der Summation ab. Zur Zeit t von v_z ist sie nach (18) und (2) gleich:

$$\int v_z \overline{v_z'} \cdot f d\sigma = \int v_z^2 \cdot \lambda(v, \tau) f d\sigma = \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty v^4 \cdot \lambda \cdot f \cdot dv$$

und hängt demnach allgemein nur von τ (vermöge λ), aber nicht von ϱ ab. So folgt:

$$\begin{aligned} \int \Delta z^2 f d\sigma &= \int_0^T d\tau \int_{\tau}^{2T-\tau} d\varrho \cdot \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty v^4 \lambda \cdot f \cdot dv \\ &= \frac{8\pi}{3} \int_0^T d\tau (T - \tau) \int_0^\infty dv \cdot f \cdot v^4 \cdot \lambda, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{T} \int \Delta z^2 f d\sigma = \frac{8\pi}{3} \int_0^\infty dv f \cdot v^4 \left\{ \int_0^T \lambda d\tau - \int_0^T \lambda \frac{\tau}{T} d\tau \right\}.$$

Es sei:

$$(19) \quad T \gg T_m.$$

Dann verschwindet nach (3) und (3a) das zweite Integral in der geschweiften Klammer gegen das erste und es ergibt sich:

$$(20) \quad \frac{1}{T} \int \Delta z^2 f d\sigma = \frac{8\pi}{3} \int_0^\infty v^4 \cdot A \cdot f dv$$

und dies in (17) eingesetzt:

$$(21) \quad E_w = \frac{2e^2 \cdot w^2 dx}{3\pi c^3} \int_0^\infty v^4 \cdot A \cdot f \cdot dv.$$

Dieser Ausdruck ist unabhängig von T und stellt demnach, wie gesagt, die physikalische Intensität der Ausstrahlung der Leitungselektronen dar, vorausgesetzt, daß die Frequenz w

klein genug ist, um zugleich die Bedingungen (14) und (19) oder:

$$w \ll \frac{1}{T} \ll \frac{1}{T_m}$$

zu erfüllen, von denen die erste jedoch nur zur Vernachlässigung von $w^2 T^2$ gegen 1 benutzt ist. Wie klein w sein muß, hängt hiernach allein von der Größe der „Bremszeit“ T_m ab, die wir ganz unbestimmt gelassen haben. Ohne weitere Annahmen über die Gesetze der Elektronenbewegung kann daher nur die Erfahrung, nämlich durch Bestätigung des hier abzuleitenden Rayleighschen Strahlungsgesetzes, zeigen, daß es noch im Bereich der eigentlichen „Wärmestrahlung“ der obigen Bedingung genügende Frequenzen gibt.

III. Das Absorptionsvermögen der Leitungselektronen für lange Wellen.

Eine senkrecht auf die Schicht einfallende, etwa in der y -Richtung polarisierte elektromagnetische Welle der Frequenz w führt während einer der Bedingung (14) genügenden Zeit T , während deren ihre elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}_z$ nahezu gleich bleibt, der Flächeneinheit der Schicht die Energie:

$$\frac{c}{4\pi} \cdot \mathfrak{E}_z^2 \cdot T$$

zu. Die von $\mathfrak{E}_z$ während der Zeit T an den Leitungselektronen der Schicht pro Flächeneinheit geleistete Arbeit ist:

$$dx \cdot i_z \cdot \mathfrak{E}_z \cdot T = dx \cdot \kappa \cdot \mathfrak{E}_z^2 \cdot T$$

und das Absorptionsvermögen der Schicht für lange Wellen folglich

$$(22) \quad A = \frac{4\pi}{c} \kappa dx = \frac{16\pi^2 \cdot e^2 \cdot dx}{3cm} \int_0^\infty f \cdot \frac{\partial}{\partial v} (v^3 A) dv.$$

Das gilt annähernd unter der Voraussetzung, daß trotz (14) das elektrische Feld den Leitungselektronen während der Zeit T schon nahezu dieselbe mittlere Geschwindigkeit erteilt, wie wenn es unendlich lange konstant bliebe. Dazu muß T mindestens gleich der sogenannten Relaxationszeit sein, die jedenfalls nicht wesentlich verschieden von unserer „Bremszeit“ T_m ist. Daß die Beziehung (22) zwischen Absorptionsvermögen und Leitfähigkeit schon von gewöhnlicher Wärme-

strahlung erfüllt wird, erscheint wieder als reine Erfahrungstatsache.

Dagegen sind für hinreichend kurz — ohne irgendwelche Beschränkung — gewählte Frequenzen die Gleichungen (21) und (22) für Ausstrahlungsintensität und Absorptionsvermögen nach der obigen Ableitung mit beliebiger Annäherung bloße Folgen der gemachten Voraussetzungen.

IV. Rayleighsches Strahlungsgesetz und Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung.

Aus der Ausstrahlungsintensität E_w und dem Absorptionsvermögen A der Schicht erhält man nach dem Kirchhoffschen Satze die Intensität der schwarzen Strahlung für lange Wellen durch

$$(23) \quad \mathfrak{R}_w = \frac{E_w}{A}.$$

Es hängen E_w nach (21) und A nach (22) noch von der bisher unbestimmt gelassenen Geschwindigkeitsverteilungsfunktion $f(v)$ ab. Statt mittels einer als gegeben angenommenen Form von f die Strahlung $\mathfrak{R}_w$ zu bestimmen, wollen wir vielmehr im folgenden untersuchen, welche Verteilungsfunktion f zu dem bekannten und bewährten Rayleighschen Strahlungsgesetze

$$(24) \quad \mathfrak{R}_w = \frac{w^2 \cdot k T}{8 \pi^3 c^2}$$

für lange Wellen führt.

Setzt man demgemäß in (23) die Ausdrücke (21), (22) und (24) ein, so ergibt sich:

$$\frac{k T}{m} \int_0^{\infty} f \cdot \frac{\partial}{\partial v} (v^3 A) dv = \int f \cdot v^4 \cdot A dv,$$

oder durch partielle Integration des ersten Integrals:

$$0 = \int_0^{\infty} v^3 \cdot A \left(\frac{k T}{m} \frac{\partial f}{\partial v} + f \cdot v \right) dv - \frac{k T}{m} f \cdot v^3 \cdot A \Big|_0^{\infty}.$$

Da der Betrag $A \cdot v$ des mit der Anfangsgeschwindigkeit v nach (2) im Mittel zurückgelegten Weges für $v = 0$ jedenfalls verschwindet, so muß, sofern nur f für $v = 0$ nicht in höherer Ordnung als $1/v^2$ unendlich wird, was voraus-

gesetzt werde, für $v = 0$ auch $f \cdot v^3 \cdot A$ gleich Null sein. Das Gleiche ergibt sich für $v = \infty$ daraus, daß der Elektronengeschwindigkeit schon durch die endliche Größe der verfügbaren Gesamtenergie eine obere Schranke gesetzt ist, oberhalb deren $f(v)$ streng verschwinden muß. So folgt als notwendige Gültigkeitsbedingung des Rayleighschen Gesetzes:

$$(25) \quad 0 = \int_0^\infty v^3 A \left(\frac{k T}{m} \frac{\partial f}{\partial v} + f \cdot v \right) dv.$$

Die Beharrungszeit A hängt jedenfalls von vielen Einzelheiten der im Innern des betrachteten Stoffes auf das bewegte Elektron wirkenden Kraftfelder ab. Soll nun (27) für alle denkbaren Formen der Funktion $A(v)$ durch dieselbe Geschwindigkeitsverteilungsfunktion f erfüllt werden, so muß

$$0 = \frac{k T}{m} \frac{\partial f}{\partial v} + f \cdot v$$

sein oder integriert

$$(26) \quad f = f_0 \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}}.$$

Diese Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung ist also die einzige, die, in allen Stoffen geltend, zu dem Rayleighschen Strahlungsgesetz für lange Wellen führt.

Wenn z. B. alle Elektronen die gleiche Geschwindigkeit besäßen, so wäre mit $A = l/2v$ nach (21)

$$E_w = \frac{e^2 \cdot w^2 \cdot dx \cdot N \cdot l \cdot v}{12 \pi^2 \cdot c^3},$$

nach (22) und (6a)

$$A = \frac{2 \pi}{3} \frac{e^2 N l v dx}{c \cdot \alpha T}$$

und nach (23)

$$\mathfrak{R}_v = \frac{w^2 \cdot \alpha T}{8 \pi^3 \cdot c^2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{w^2 \cdot k T}{8 \pi^3 \cdot c^2},$$

also $3/2$ mal so groß als es das Rayleighsche Gesetz verlangt. Diese Abweichung wird bei Lorentz a. a. O. durch das im gleichen Verhältnis zu große Absorptionsvermögen, das aus dem falschen Leitfähigkeitswerte von Drude (vgl. Einleitung) folgt, zufällig gerade ausgeglichen.

Schluß.

Die Tragweite der obigen Ableitung des Maxwell'schen Geschwindigkeitsverteilungsgesetzes für die Leitungselektronen aus dem Rayleigh'schen Strahlungsgesetze beruht auf der Sicherheit der dazu gebrauchten physikalischen Annahmen. Es wurden benutzt:

A. Voraussetzungen rein kinematischen Inhalts:

1. Makroskopische Isotropie der Elektronenbewegung bei verschwindendem äußeren Felde (Gl. (1a), (2)).
2. Positive Geschwindigkeitsnachwirkung (Gl. (3a) $\lambda > 0$).
3. Existenz einer Bremszeit T_m für alle v (Gl. (3)).
4. $\lim_{v=0} (f \cdot v^3 \cdot A) = 0$ (zur Ableitung von Gl. (25)).

B. Voraussetzungen dynamischen Inhalts:

1. Die von $\mathfrak{E}_z$ erzeugte Beschleunigung der Elektronen ist gleich $\frac{e \mathfrak{E}_z}{m}$ (zur Ableitung der Gl. (4a) für κ).
2. Das klassische Strahlungsgesetz beschleunigter Ladungen für lange Wellen (Gleichung (7)).

Diese Voraussetzungen genügen zur theoretischen Ableitung des Ergebnisses für unendlich lange Wellen (bei beliebig tiefer Temperatur!) und verschwindende Intensität der Einstrahlung ($\kappa = \left(\frac{\partial i_z}{\partial \mathfrak{E}_z} \right)_{\mathfrak{E}=0}$) vgl. die Ableitung von (4)). Auf Grund von Erfahrungstatsachen kann die Anwendung auf Felder endlicher Stärke (Ohmsches Gesetz) und Wellen endlicher Länge (Beobachtungen von Hagen und Rubens, Rayleigh'sches Gesetz erfolgen).

Wichtig ist vor allem, daß keinerlei Annahmen über die Dynamik der Wechselwirkungen zwischen Elektron und Atom (oder Elektron und Elektron) gemacht sind, bei denen das Wirkungsquantum in noch unbekannter Weise eine Rolle spielen dürfte. Auch darf die Temperatur beliebig niedrig angenommen werden; denn es ist, wenigstens idealiter, stets möglich, durch entsprechende Verkleinerung der Frequenz in den Gültigkeitsbereich des Rayleigh'schen Gesetzes zu gelangen. Das unter B. 2. vorausgesetzte klassische Gesetz der

Ausstrahlung (Gleichung (7)) wird für lange Wellen bekanntlich auch von der Quantentheorie als gültig angesehen. Die Annahme B. 1. ließe sich ebenso wie voraussichtlich alle übrigen Gleichungen ohne Schwierigkeit auf eine der speziellen Relativitätstheorie genügende und für beliebige Geschwindigkeiten $v < c$ gültige Form bringen.¹⁾

1) Nimmt man demgemäß die Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung (26) für alle Temperaturen als gültig an, so ist damit allen Theorien der Leitfähigkeit der Boden entzogen, die der mittleren kinetischen Energie der Elektronen einen anderen als den aus (26) folgenden Wert $\frac{1}{2} k T$ zuschreiben. Ebenso dürfte die Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung schwer mit der Haber-Starkschen Vorstellung der als Ganzes bewegten Elektronengitter vereinbar zu sein. Dagegen besteht kein Widerspruch zu Lenards Annahme, daß die Leitelektronen oft von Atomen absorbiert werden. Es brauchte daraus keineswegs zu folgen, daß die mittlere Energie der gebundenen Leitelektronen für sich gleich $\frac{3}{2} k T$ sei; denn gerade die schnellsten Elektronen wird die Kraft der Bindung im allgemeinen nicht festhalten können.

(Eingegangen 15. Juli 1921.)