ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

N^o. 2402.

Extrait d'une lettre de M. Hermite à M. Gylden.

Permettez moi de vous exposer la détermination par mes procédés de l'intégrale

$$t = \gamma \varepsilon_1^2 \int \frac{\operatorname{dn}^4 u}{(1 - n \operatorname{sn}^2 a)^2} du, \text{ ou plutôt de celle-ci: } \int \frac{\operatorname{dn}^4 u}{(\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 u)^2} du \text{ (} a \text{ étant votre quantité } \sigma).$$

J'observe que la fonction $F(u) = \frac{\operatorname{dn}^4 u}{(\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 u)^2}$, aux périodes $2K$ et $2iK'$, a les deux seuls pôles $u = a$ et $u = -a$. Par conséquent il me suffit de former la partie principale des développements suivant les puissances ascendantes de ε , de: $F(a + \varepsilon)$ et: $F(-a + \varepsilon)$, et je me bornerai au premier cas, le second en résultant par le changement de a en $-a$.

Or on a:

$$\operatorname{dn}^4(a + \varepsilon) = \operatorname{dn}^4 a - 4k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn}^3 a \varepsilon - \dots$$

$$[\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2(a + \varepsilon)]^2 = 4 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{cn}^2 a \operatorname{dn}^2 a \varepsilon^2 + 4 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a [1 - 2(1 + k^2) \operatorname{sn}^2 a + 3k^2 \operatorname{sn}^4 a] \varepsilon^3 + \dots$$

ce qui donne facilement:

$$F(a + \varepsilon) = \frac{\operatorname{dn}^2 a}{4 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{cn}^2 a} \frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{[1 - 2k'^2 \operatorname{sn}^2 a - k^2 \operatorname{sn}^4 a] \operatorname{dn} a}{4 \operatorname{sn}^3 a \operatorname{cn}^3 a} \frac{1}{\varepsilon}$$

puis, en changeant a en $-a$:

$$F(-a + \varepsilon) = \frac{\operatorname{dn}^2 a}{4 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{cn}^2 a} \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{[1 - 2k'^2 \operatorname{sn}^2 a - k^2 \operatorname{sn}^4 a] \operatorname{dn} a}{4 \operatorname{sn}^3 a \operatorname{cn}^3 a} \frac{1}{\varepsilon}$$

Cela étant et les éléments simples, qui correspondent aux deux pôles, ayant pour expressions: $\frac{H'(u-a)}{H(u-a)}$, $\frac{H'(u+a)}{H(u+a)}$,

il suffit de mettre $\frac{1}{\varepsilon^2}$, sous la forme canonique, $-D_\varepsilon \frac{1}{\varepsilon}$, pour obtenir:

$$F(u) = \text{const} + \frac{(1 - 2k'^2 \operatorname{sn}^2 a - k^2 \operatorname{sn}^4 a) \operatorname{dn} a}{4 \operatorname{sn}^3 a \operatorname{cn}^3 a} \left[\frac{H'(u+a)}{H(u+a)} - \frac{H'(u-a)}{H(u-a)} \right] - \frac{\operatorname{dn}^2 a}{4 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{cn}^2 a} D_u \left[\frac{H'(u+a)}{H(u+a)} + \frac{H'(u-a)}{H(u-a)} \right].$$

La constante reste aussi à déterminer; je supposerai pour l'obtenir $u = 0$. Remarquant alors que l'on a:

$$\frac{1}{\operatorname{sn}^2 x} = \frac{J}{K} - D_x \frac{H'(x)}{H(x)},$$

et par conséquent:

$$\frac{1}{\operatorname{sn}^2(u+a)} + \frac{1}{\operatorname{sn}^2(u-a)} = \frac{2J}{K} - D_a \left[\frac{H'(u+a)}{H(u+a)} + \frac{H'(u-a)}{H(u-a)} \right],$$

vous voyez qu'on obtient aisément la condition:

$$\frac{1}{\operatorname{sn}^4 a} = \text{Const.} - \frac{\operatorname{dn}^2 a}{4 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{cn}^2 a} \left[\frac{2J}{K} - \frac{2}{\operatorname{sn}^2 a} \right], \text{ d'où: } \text{Const.} = \frac{\operatorname{dn}^2 a}{2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{cn}^2 a} \frac{J}{K} + \frac{2 \operatorname{cn}^2 a + \operatorname{dn}^2 a}{2 \operatorname{sn}^4 a \operatorname{cn}^2 a}.$$

Dans les calculs de ce genre auxquels j'ai été conduit, mon attention s'est portée sur les cas particuliers, où l'intégrale est une fonction uniforme, ce qui arrive ici, lorsqu'on pose: $1 - 2k'^2 \operatorname{sn}^2 a - k^2 \operatorname{sn}^4 a = 0$. Cette équation détermine une valeur réelle, pour l'argument a , puisqu'on en tire pour $\operatorname{sn} a$ une valeur comprise entre zéro et l'unité, car le premier membre pour $\operatorname{sn} a = 0$, $\operatorname{sn} a = 1$, donne les résultats de signes contraires $+1$, $-k'^2$. Enfin vous voyez par la valeur de la constante, que quel que soit a , le terme proportionnel à u ne disparaîtra jamais de l'expression du temps.

Paris, 1880 Décembre 10.

Ch. Hermite.