

Über eine partikuläre Lösung des biharmonischen Problems für den Außenraum der Ellipse.

Von

Theodor Pöschl in Prag.

I. Vorbemerkung.

Im Anschluß an die einschlägigen Arbeiten von Maxwell hat F. Klein schon vor längerer Zeit eine geometrische Auffassung zur Lösung von „ebenen“ Spannungsaufgaben gegeben, die daraufhin von einigen seiner Schüler, insbesondere von Wieghardt¹⁾ und Timpe²⁾ ausführlich dargestellt und an vielen Beispielen erläutert wurde. Insbesondere hat F. Klein gezeigt, daß die Aufgabe, die Spannungsverteilung zu finden, welche in einer einfach zusammenhängenden, homogenen, elastisch-isotropen Scheibe durch ein am Rand angreifendes Gleichgewichtssystem von Kräften erzeugt wird, identisch ist mit der Aufgabe: Man konstruiere zunächst die — bis auf eine beliebig hinzuzufügende Ebene völlig bestimmte — (abwickelbare) „äußere Belastungsfläche“³⁾ und sodann diejenige Fläche $\psi = \psi(x, y)$, die sich über den Scheibenrand überall stetig und ohne Knick an diese Fläche anschließt, und über dem Innern der Scheibe überall der Differentialgleichung $\Delta\Delta\psi = 0$ genügt; die Spannungen selbst sind dann gegeben durch die Gleichungen:

$$(1) \quad X_x = \psi_{yy}, \quad Y_y = \psi_{xx}, \quad X_y = -\psi_{xy}.$$

¹⁾ Vgl. Klein und Wieghardt, Über Spannungsfächen und reziproke Diagramme, mit besonderer Berücksichtigung der Maxwellschen Arbeiten. Archiv d. Math. III. Reihe, 8 (1904), S. 1 und 95 und die dort angegebene Literatur.

²⁾ Probleme der Spannungsverteilung in einem System, einfach gelöst mit Hilfe der Airyschen Spannungsfunktion, Zeitschr. f. Math., 52 (1905), S. 348.

³⁾ Dieser Ausdruck wurde von P. Funk eingeführt, vgl. dessen Arbeiten: Über eine geometrische Auffassung bei Aufgaben über Fachwerke, Sitzungsberichte d. Wiener Ak. d. W., IIa, 127 (1918), S. 1 und dessen Buch: Die linearen Differenzengleichungen u. ihre Anwendung in der Theorie der Baukonstruktionen, Berlin, Springer, 1920. Herrn Dr. Funk habe ich auch einige Hinweise zu verdanken, die mir bei der Ausführung dieser Arbeit von Nutzen waren.

Die Funktion $\psi = \psi(x, y)$ wird die zu dem Problem gehörige Airysche Funktion genannt.

Nach dieser Methode ist es leicht, die Airysche Funktion für den Fall eines kreisförmigen Loches in einer unendlich ausgedehnten Platte anzugeben, wie dies zuerst von Föppl⁴⁾ geschehen ist. Die vorliegende Arbeit enthält die Lösung für das analoge Problem des *elliptischen* Loches in einer unendlich ausgedehnten Scheibe und zwar für *beliebige* Neigung der Zugrichtung gegen die Achsen der Ellipse. Hierzu verwenden wir naturgemäß elliptische Koordinaten und entwickeln zu Beginn die Ausdrücke für die durch die Airysche Funktion ausgedrückten Spannungskomponenten in orthogonalen krummlinigen Koordinaten, die sich durch Verwendung der üblichen invarianten Schreibweise in einfachster Art ergeben; die betreffenden Ausdrücke für die Spannungskomponenten sind übrigens zuerst von Michell⁵⁾ angegeben worden.

2. Die Spannungskomponenten in orthogonalen krummlinigen Koordinaten.

Wir setzen zunächst allgemein einen n -dimensionalen Raum voraus und legen das Bogenelement durch den folgenden Ausdruck fest⁶⁾:

$$(2) \quad ds^2 = a_{ik} dx^{(k)} dx^{(i)};$$

ferner sei X_{ij} das zu diesem ds^2 kovariante doppelt symmetrische System — d. h. der Spannungstensor, — das die Spannungen auf die Seitenflächen des infinitesimalen Polytops gibt, welches durch die Hyperflächen $x^{(1)} = \text{konst.}$, $x^{(1)} + dx^{(1)} = \text{konst.}$, ..., $x^{(n)} = \text{konst.}$, $x^{(n)} + dx^{(n)} = \text{konst.}$ begrenzt wird. Bezeichnen ferner X_{ijl} die kovarianten ersten Ableitungen von X_{ij} nach $x^{(l)}$, weiters F_i die Komponenten der Massenkräfte nach den $x^{(i)}$, und ρ die Dichte, dann schreiben sich die Gleichgewichtsbedingungen im System der $x^{(i)}$, wie Ricci⁷⁾ gezeigt hat, in folgender kovarianter Form:

$$(3) \quad \rho F_i + a^{(jl)} X_{ijl} = 0;$$

wie üblich bedeutet dabei $a^{(jl)}$ das durch $a \equiv |a_{ij}|$ dividierte algebraische Komplement von a_{ij} in der Determinante a ; und also

$$(4) \quad X_{ijl} = \frac{\partial X_{ij}}{\partial x_l} - \left\{ \begin{matrix} ij \\ q \end{matrix} \right\} X_{aj} - \left\{ \begin{matrix} jl \\ q \end{matrix} \right\} X_{iq}.$$

4) S. etwa: Drang und Zwang I, S. 304–306.

5) Proc. Lond. Math. Soc., 31 (1900), S. 100–124.

6) Über gleiche Indizes ist — wie üblich — stets zu summieren.

7) Delle Derivazione covarianti e contravarianti e del loro uso nella analisi applicata, Studi offerti dalla Università Padovana alla Bolognese nell'ottavo centenario ecc., 3 (1888), S. 1–23. Vgl. auch Ricci u. Levi-Civita, Methodes de calcul différentiel absolu et leurs applications, Math. Ann., 54 (1899), S. 125.

Für den Fall zweier Dimensionen und unter Annahme fehlender Massenkräfte und orthogonaler Koordinaten, auf den wir im folgenden Bezug nehmen, erhalten wir die zwei Gleichungen:

$$(5) \quad \begin{cases} a^{(11)} X_{111} + a^{(22)} X_{122} = 0, \\ a^{(11)} X_{211} + a^{(22)} X_{222} = 0. \end{cases}$$

Ebenso wie bei rechtwinkligen kartesischen Koordinaten läßt sich durch Ausführung der angegebenen Operationen erkennen, daß die drei Größen X_{11} , $X_{12} = X_{21}$ und X_{22} durch die zweiten *kovarianten Ableitungen* einer Airyschen Spannungsfunktion $\psi \equiv \psi(x^{(1)}, x^{(2)})$ in folgender Form dargestellt werden können:

$$(6) \quad X_{11} = \frac{a^{(22)}}{a^{(11)}} \psi_{22}, \quad X_{22} = \frac{a^{(11)}}{a^{(22)}} \psi_{11}, \quad X_{12} = -\psi_{12}.$$

Schreiben wir für die krummlinigen Koordinaten $x^{(1)}$ und $x^{(2)}$ jetzt ξ und η , und für die Spannungskomponenten selbst (in der Loveschen Bezeichnungsweise) $\widehat{\xi\xi}$, $\widehat{\eta\eta}$, $\widehat{\xi\eta}$, so hängen diese mit den X_{ij} wie folgt zusammen⁸⁾:

$$(7) \quad \begin{cases} \widehat{\xi\xi} = a^{(11)} X_{11} = a^{(22)} \psi_{22}, & \widehat{\eta\eta} = a^{(22)} X_{22} = a^{(11)} \psi_{11}, \\ \widehat{\xi\eta} = \sqrt{a^{(11)} a^{(22)}} X_{12} = -\sqrt{a^{(11)} a^{(22)}} \psi_{12}, \end{cases}$$

und dabei ist zu setzen

$$(8) \quad \psi_{ij} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} - \left\{ \begin{matrix} ij \\ q \end{matrix} \right\} \frac{c \psi}{\partial x_q}.$$

Die durch (7) gegebenen Ausdrücke ergeben sich auch direkt durch kovariante Ausführung der in (1) gegebenen zweiten Differentialquotienten. Ausführlich geschrieben lauten die Ausdrücke für die Spannungskomponenten durch die Spannungsfunktion ψ (vgl. Michell a. a. O.), wenn wir noch $a_{11} = h_1^2$, $a_{22} = h_2^2$ setzen,

$$(9) \quad \begin{cases} \widehat{\xi\xi} = \frac{1}{h_2^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \frac{1}{h_1^2 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \xi} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} - \frac{1}{h_2^3} \frac{\partial h_2}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \\ \widehat{\eta\eta} = \frac{1}{h_1^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - \frac{1}{h_1^3} \frac{\partial h_1}{\partial \xi} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{1}{h_1 h_2^2} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \\ \widehat{\xi\eta} = -\frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{h_1^2 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{1}{h_1 h_2^2} \frac{\partial h_2}{\partial \xi} \frac{\partial \psi}{\partial \eta}. \end{cases}$$

⁸⁾ Die ersten Teile der Gleichungen (7) (ohne Bezugnahme auf die Spannungsfunktion) sind schon von Beltrami gegeben worden: Sull' uso delle coordinate curvilinee, Mem. dell' Acc. di Bologna, Serie IV, t. VI, S.401-448. S. auch Ricci, a. a. O. S. 21 (S. Anm. 7), Delle Derivazione...).

Beiläufig sei bemerkt, daß die durch die Gleichungen (6) gegebene Darstellung der Spannungskomponenten durch die kovarianten Ableitungen einer bestimmten Funktion ψ nur dann möglich ist, wenn das Krümmungsmaß von (2) identisch verschwindet.

Ähnlich wie für den Fall kartesischer Koordinaten läßt sich auch für beliebige Koordinaten ξ, η zeigen, daß $\psi = \psi(\xi, \eta)$ im ganzen Gebiete der Gleichung $\Delta \Delta \psi = 0$ genügt, welche Gleichung in den Koordinaten ξ und η zu schreiben ist.

3. Lösung der Spannungsaufgabe für das elliptische Loch.

In einem unendlich ausgedehnten Blech sei ein Loch in der Form einer Ellipse vorhanden, deren Achsen wir mit x, y bezeichnen (Fig. 1).

Die Belastung sei im Unendlichen ein einfacher Zug, der gegen die große Achse unter dem Winkel $\alpha + \frac{\pi}{2}$ geneigt ist. Naturgemäß führen wir elliptische Koordinaten ein durch die komplexe Funktion:

$$(10) \quad x + iy = c \mathfrak{C} \mathfrak{O} f(\xi + i\eta),$$

so daß

$$(10) \quad \begin{cases} x = c \mathfrak{C} \mathfrak{O} f \xi \cos \eta, \\ y = c \mathfrak{S} \mathfrak{I} n \xi \sin \eta. \end{cases}$$

In diesem Falle ist

$$h_1^2 = h_2^2 = \frac{c^2}{2} (\mathfrak{C} \mathfrak{O} f 2\xi - \cos 2\eta),$$

und die Gleichung $\Delta \Delta \psi = 0$ nimmt, wenn

$$\psi_{\xi\xi} + \psi_{\eta\eta} = \Delta^* \psi$$

gesetzt wird, die Form an:

$$(11) \quad \Delta \Delta \psi = \frac{4}{c^4 (\mathfrak{C} \mathfrak{O} f 2\xi - \cos 2\eta)^3} \left[(\mathfrak{C} \mathfrak{O} f 2\xi - \cos 2\eta) \Delta^* \Delta^* \psi - 4 \left(\mathfrak{S} \mathfrak{I} n 2\xi \frac{\partial \Delta^* \psi}{\partial \xi} + \sin 2\eta \frac{\partial \Delta^* \psi}{\partial \eta} \right) + 4 (\mathfrak{C} \mathfrak{O} f 2\xi + \cos 2\eta) \Delta^* \psi \right].$$

Die gegebene Ellipse sei durch den Wert $\xi = \xi_0$ gekennzeichnet. Wir denken uns unter dem Winkel α gegen die x -Achse die x' -Achse eines neuen Systems (x', y') gelegt, dann wird der angegebenen Belastung der folgende Ansatz für die Spannungsfunktion im Unendlichen entsprechen:

$$\psi \rightarrow \frac{p}{2} x'^2 = \frac{p}{2} (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2,$$

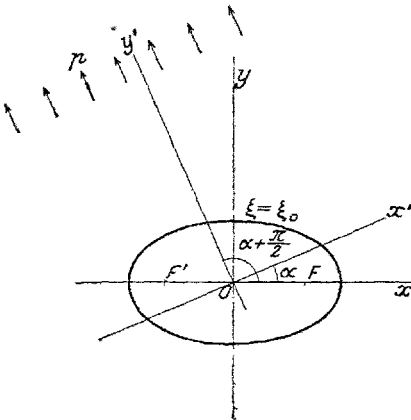


Fig. 1.

oder in den neuen Koordinaten ξ, η geschrieben (für $\xi \rightarrow \infty$)

$$(12) \quad \psi \rightarrow \frac{p}{16} c^2 e^{2\xi} [1 + \cos 2(\eta - \alpha)].$$

Im Unendlichen muß sonach die Differenz der zweiten kovarianten Ableitungen der gesuchten Funktion und der zweiten Ableitungen von (12) gegen Null konvergieren.

Als weitere Grenzbedingungen sind ferner in Übereinstimmung mit der in der Vorbemerkung angegebenen Methode die folgenden anzusetzen, da im Innern des elliptischen Loches keine Spannungen herrschen, dort also die äußere Belastungsfläche eine Ebene ist,

$$(13) \quad \psi = \text{konst. und } \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = 0 \text{ für } \xi = \xi_0^9).$$

Was die gesuchte Lösung betrifft, so ist von vornherein zu erwarten, daß sie sich nur aus Funktionen von der Form

$$F_1(\xi) + F_2(\xi) \cos 2\eta + F_3(\xi) \sin 2\eta$$

zusammensetzen wird, somit kommen nur die folgenden Potentiale

$$\xi, \quad \text{Cos } 2\xi \cos 2\eta, \quad \text{Sin } 2\xi \cos 2\eta, \quad \text{Cos } 2\xi \sin 2\eta, \quad \text{Sin } 2\xi \sin 2\eta$$

und die folgenden Bipotentiale

$$\text{Cos } 2\xi + \cos 2\eta (\sim r^2), \quad \text{Sin } 2\xi, \quad \sin 2\eta$$

in Betracht, wobei die zwei letzteren, wie man leicht bestätigt, die einzigen Lösungen von (11) sind, die nur von je einer der beiden Veränderlichen ξ und η abhängen und nicht zugleich auch eigentliche Potentiale sind.

Die durch (12) und (13) gegebenen Grenzbedingungen führen unmittelbar auf die folgende Form von ψ :

$$(14) \quad \psi = \frac{pc^2}{8} \left\{ \text{Sin } 2\xi - \cos 2\alpha e^{-2(\xi - \xi_0)} - 2(\text{Cos } 2\xi_0 + \cos 2\alpha) \xi \right. \\ \left. + [\text{Cos } 2(\xi - \xi_0) - 1] e^{2\xi_0} \cos 2(\eta - \alpha) \right\}.$$

Von besonderem Interesse ist nun die Größe der sogenannten *Tangentialspannung* längs des elliptischen Loches, die sich nach (9) für $\xi = \xi_0$ in folgender Gestalt ergibt¹⁰⁾:

$$(15) \quad \widehat{\eta\eta} = p \cdot \frac{\text{Sin } 2\xi_0 - \cos 2\alpha e^{2\xi_0} + \cos 2(\eta - \alpha)}{\text{Cos } 2\xi_0 - \cos 2\eta}.$$

⁹⁾ Nach den üblichen Methoden wäre noch der Eindeutigkeitsbeweis zu erbringen, doch glauben wir dies hier übergehen zu können.

¹⁰⁾ Die von G. Kolossoff in seiner Arbeit: Über einige Eigenschaften des ebenen Problems der Elastizitätstheorie [Z. f. Math. 62 (1904), S. 384–409], S. 404 auf schwer kontrollierbarem Wege für den Sonderfall $\alpha = 0$ gefundene Formel stimmt mit Gl. (15) nicht überein und dürfte unrichtig sein.

Wie man leicht nachrechnet, treten die größten Werte von $\widehat{\eta\eta}$ nur für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ in den Endpunkten der großen Achsen der betreffenden Ellipsen auf, für andere Werte von α liegen die Maxima nicht mehr in diesen

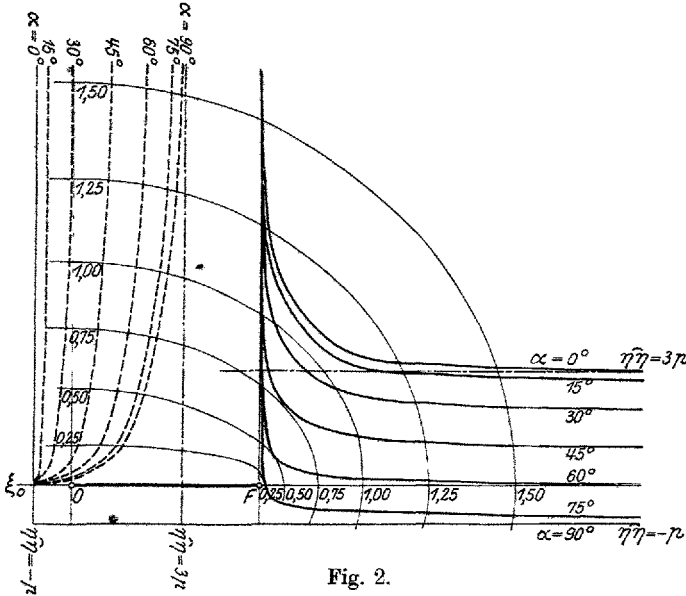


Fig. 2.

Punkten. In Fig. 2 sind die Werte von $\widehat{\eta\eta}$ in den Endpunkten der Achsen der Ellipsen aufgetragen, und zwar für verschiedene Werte des Winkels α . Aus dieser Figur ist ersichtlich, daß sich die großen Ellipsen wie Kreise

verhalten, die Spannung an den Endpunkten ihrer großen Achsen ist (wie beim kreisförmigen Loch, s. u.) $3p$, an den Endpunkten der kleinen Achsen $-p$. Mit zunehmender Schlankheit der Ellipsen nehmen diese Werte an den Endpunkten der großen Achsen fortgesetzt über alle Grenzen zu.

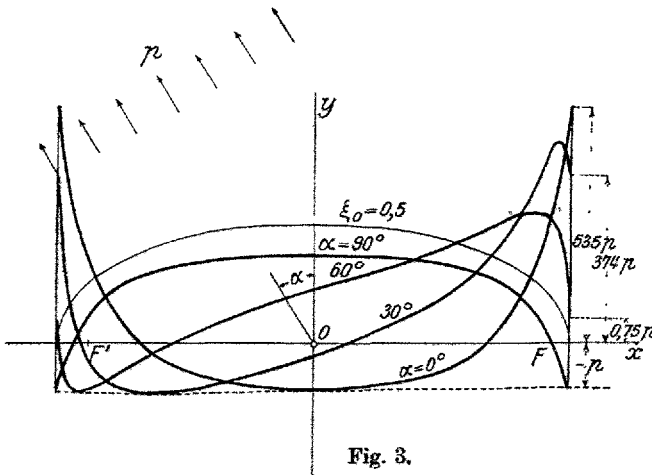


Fig. 3.

In Fig. 3 ist die Spannungsverteilung längs des Umfanges der Ellipse $\xi_0 = 0,5$ für verschiedene Werte des Winkels α als Funktion der Abszissen aufgetragen.

Für $\xi_0 = 0$ erhalten wir den Fall des unendlich schmalen Schlitzes, für den überdies in Fig. 4 die Spannungsverteilung längs des Randes für mehrere Werte von α noch besonders herausgezeichnet ist. Im Endpunkt des Schlitzes ($\eta = 0$) ergibt sich, was vorauszusehen ist, für alle Werte von α : $\widehat{\eta\eta} = \infty$ außer für $\alpha = 90^\circ$, d. h. wenn der Schlitz parallel zur Zugrichtung ist, für welchen Fall $\widehat{\eta\eta} = p$ folgt. Für $\alpha = 0$ ist $\widehat{\eta\eta} = -1$, nur an den Endpunkten folgt $\widehat{\eta\eta} = \infty$.

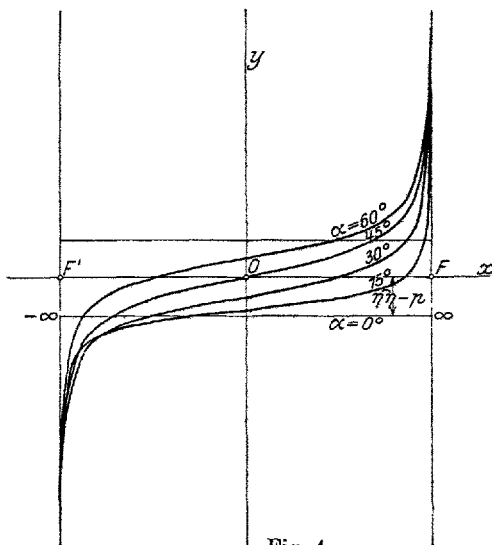


Fig. 4.

4. Allseitiger Zug.

Denken wir uns zwei Spannungszustände übereinandergelagert, die den Werten der Funktion ψ nach (14) für α und $\alpha + \frac{\pi}{2}$ entsprechen, so erhält die Spannungsfunktion, die jetzt mit ψ_1 bezeichnet werde im Unendlichen den Wert

$$\psi_1 \rightarrow \frac{p}{2} r^2, \quad \text{d. h.} \quad \psi_1 \rightarrow \frac{pc^2}{8} e^{2\xi}.$$

Die Addition der betreffenden Werte von ψ liefert unmittelbar den einfachen Ausdruck

$$(16) \quad \psi_1 = \frac{pc^2}{4} \{ \text{Sin } 2\xi - 2 \text{Cof } 2\xi_0 \cdot \xi \},$$

also unabhängig von η , während die Spannungskomponenten selbst wieder durch die Gleichungen (9) gegeben sind und von η abhängig bleiben.

5. Übergang zum kreisförmigen Loch.

Um aus (14) die analoge Form von ψ für den Fall des kreisförmigen Loches vom Halbmesser a zu erhalten, ist es erforderlich, den Grenzübergang für $c \rightarrow 0$ auszuführen und dabei $\xi \rightarrow \infty$ werden zu lassen, so daß gleichzeitig die folgenden Bedingungen erfüllt sind

$$\lim c^2 \text{Sin } 2\xi = \lim c^2 \text{Cof } 2\xi = 2r^2$$

und ebenso

$$\lim c^2 \text{Sin } 2\xi_0 = \lim c^2 \text{Cof } 2\xi_0 = 2a^2;$$

bei diesem Grenzübergang wird $\eta \rightarrow \varphi$, so daß r und φ Polarkoordinaten darstellen und

$$\xi \rightarrow 2 \log r,$$

ferner folgt

$$c^2 [\text{Co} 2(\xi - \xi_0) - 1] e^{3\xi_0} = \frac{c^4}{2} \cdot \frac{e^{4\xi} - 2e^{2\xi_0} \cdot e^{2\xi} + e^{4\xi_0}}{e^{2\xi_0}},$$

und dies wird in der Grenze

$$2 \frac{(r^2 - a^2)^2}{r^2};$$

also folgt aus (14) der bekannte Ausdruck für den Fall des kreisförmigen Loches

$$(17) \quad \psi = \frac{p}{4} \left\{ r^2 - 2a^2 \log r + \frac{(r^2 - a^2)^2}{r^2} \cos 2(\eta - \alpha) \right\}.$$

(Eingegangen am 6. Juli 1920).