PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND XLVIII.

I. *Electromagnetische Theorie der Farbenzerstreuung; von H. von Helmholtz.*

Eine genügende Erklärung der Farbenzerstreuung auf Grundlage der electromagnetischen Theorie des Lichtes scheint mir bisher gänzlich zu fehlen. Dass eine solche nicht ohne Rücksichtnahme auf die ponderablen Massen, die dem Aether eingelagert sind, zu bilden ist, dürfte keinem Zweifel unterliegen, da die Dispersion des Lichtes zu denjenigen Vorgängen gehört, welche, wie auch die Brechung desselben, die galvanische Leitung, die Ansammlung wahrer Electricität und das Bestehen magnetischer Pole niemals im reinen Aether eines Vacuum, sondern nur in oder an der Grenze von Räumen vorkommen, die ausser dem Aether auch ponderable Masse enthalten. Nun zeigt die mathematische Theorie von Maxwell allerdings an, dass auch ponderomotorische Kräfte innerhalb des von electrischen Oscillationen durchzogenen Aethers wirksam werden müssen und eventuell schwere Atome, die im Aether liegen, in Bewegung setzen könnten. Aber wenn die ponderablen Theilchen nicht selbst electrisch sind, wären diese Kräfte den *Quadraten* der electrischen und magnetischen Momente des oscillirenden Aethers proportional, und also für negative Werthe derselben in Grösse und Richtung gleich denen für positive. Sie würden deshalb während jeder Schwingungsperiode zweimal ihren grössten und zweimal ihren kleinsten Werth erreichen, sodass sie in der Regel nicht Schwingungen von der Länge einer einfachen Periode hervorbringen oder unterstützen könnten.

Nur wenn die wägbaren Theilchen Ladungen wahrer Electricität enthalten, können die periodischen Wechsel der electrischen Momente im Aether ponderomotorische Kräfte der gleichen Periode hervorbringen. Die entsprechende Annahme,

dass eingelagerte Atome nur nördlichen oder nur südlichen Magnetismus enthalten sollten, lasse ich als zu unwahrscheinlich bei Seite liegen. Dagegen haben uns die electrolytischen Erscheinungen, namentlich Faraday's Gesetz der electrolytischen Aequivalente, schon längst zu der Annahme geführt, dass electriche Ladungen von bestimmter Grösse an den Valenzstellen chemisch verbundener Ionen haften, die bald positiv, bald negativ sein können, aber überall dieselbe absolute Grösse für jede Valenzstelle eines jeden Atoms haben müssen.

Obgleich diese Annahme die Electricität wieder an einen substantiellen Träger heftet, so ist sie in keiner Weise im Widerspruch mit Maxwell's mathematischer Formulirung seiner Theorie. Denn auch in dieser kommt die Möglichkeit unveränderlicher Ladung gewisser Volumenelemente in Isolatoren vor, und Maxwell's Gleichungen sagen aus, dass die Quanta bei allem Wechsel electricher, magnetischer und ponderomotorischer Bewegungen unverändert bleiben, wenn sie auch nach seiner Deutung der Erscheinungen nur als Integrationsconstanten, nicht als reelle Substanzen anzusehen sind.

Dass schliesst nicht aus, dass die Kräfte, die von diesen Ionen als ihren Centren ausgehend sich im Raume ausbreiten, bei eintretenden Lageänderungen der Molecüle sich in solcher Art verändern, und im Raume fortschieben, wie es Maxwell's Gleichungen beschreiben.

Das Einzige, was die electrochemische Theorie mehr verlangt, als bisher in Maxwell's Gleichungen vorgesehen ist, ist die Möglichkeit, dass diese Centralpunkte electricher Kräfte bei chemischen Umsetzungen von einem zum anderen Ion herübergleiten können, und zwar unter grosser Arbeitsleistung, so als ob sie an einem substantiellen Träger hafteten, der von den Valenzstellen verschiedenartiger Ionen mit verschiedener Kraft angezogen würde.

Wird der ein Paar verbundener Ionen umgebende Aether von electricen Kräften getroffen und dadurch dielectric polarisirt, so werden die entgegengesetzt polarisirten Ionen den in Richtung der Kraftlinien fallenden Spannungen ausgesetzt, also zwei gleich grossen, aber entgegengesetzt gerichteten Kräften, die mit einander ein Kräftepaar bilden, welches

den Schwerpunkt des Molecüls nicht in Bewegung setzen, wohl aber die electricische Axe des Molecüls verlängern oder verkürzen, sie der Richtung der Kraftlinie zu- oder ablenken würde.

Wir wollen im Folgenden die Bezeichnungsweise meines letzten Aufsatzes vom Mai d. J. beibehalten, und also die Componenten der electricischen Momente der Volumeneinheit mit $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ bezeichnen. Dabei ist aber zu bemerken, dass in den dort aufgestellten Gleichungen die Momente $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ betrachtet werden, als nur abhängig von den electricischen Kräften X , Y , Z , und diesen proportional. Die möglicherweise in einzelnen Stellen des Raumes lagernde *wahre Electricität*, deren Dichtigkeit in Gleichung (1) mit

$$(1) \quad \sigma = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}$$

bezeichnet wurde, spielt dort allerdings eine Rolle, indem sie Vertheilung und Richtung der Momente mit bestimmt. Aber sie wird nicht derjenigen Electricität zugerechnet, welche die Polarisirung der Volumenelemente bewirkt. So sind auch in den nun zu bildenden Bewegungsgleichungen die electricischen Momente, welche durch die wahre Electricität der Ionen gebildet werden, da sie von veränderlicher Grösse und Richtung sind, und auch von nicht electricischen Kräften, Beharrungsvermögen, Reibung etc. angegriffen werden, von denen des freien Aethers zu trennen; wir bezeichnen sie mit $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, für die Volumeneinheit. Ein solcher mit Aether und Ionenpaaren gefüllter Raum würde für die theoretische Betrachtung nach der älteren Vorstellung von der Existenz bipolarer magnetischer Molecüle, dem Innern eines magnetisirten Körpers ganz analog sein, und da die Gesetze der Vertheilung magnetischer und electricischer Kräfte für ruhende Zustände aus Maxwell's Theorie sich vollkommen übereinstimmend mit denen von Poisson's Theorie ergeben, die mit magnetischen Molecülen und Fernkräften rechnet, so lassen sich auch die aus jener älteren Theorie hergeleiteten Berechnungen des Energievorrathes in den Volumenelementen eines solchen Raumes mit molecularer Vertheilung der Electricität hier verwenden. Dass sowohl die Erscheinungen der dielectricischen Polarisirung, wie die der ponderomotorischen Kräfte solcher

polarisirter Massen auf denselben Werth der Energie zurückführen, habe ich in einem früheren Aufsatz erwiesen.¹⁾

Nach der hier aufgestellten Hypothese unterscheiden sich unsere Ionenpaare von den dielectrisch polarisirten Molecülen isolirender Substanzen nur dadurch, dass sie träge Masse haben und deshalb nicht immer in der Gleichgewichtslage sich befinden, vielmehr um diese oscilliren können, sodass die x , y , z unabhängig von den X , Y , Z sich verändern können, und dass also die potentielle Energie der Electrisirung nicht bloß von den letzteren drei Grössen, sondern auch von den ersteren abhängt. Ich habe es vorgezogen, statt von den Maxwell'schen Gleichungen auszugehen, die neu hinzukommenden Einflüsse in die von mir für die Electrodynamik entwickelte Form des Principes der kleinsten Wirkung aufzunehmen, weil man dadurch vor dem Uebersehen einzelner nothwendig vorhandener Gegenwirkungen in dem hier schon ziemlich verwickelten Spiel der Kräfte geschützt wird, und dadurch die Anzahl der unabhängigen Hypothesen von zweifelhafter Richtigkeit wesentlich vermindert wird.

Uebereinstimmend mit Poisson und Maxwell setzen wir die electriche Kraft, welche nothwendig ist um ein Moment x in der Volumeneinheit einer mit bipolaren Molecülen beladenen Substanz hervorzubringen, diesem Momente proportional also

$$(11) \quad X = \frac{1}{\vartheta} \cdot x, \quad Y = \frac{1}{\vartheta} \cdot y, \quad Z = \frac{1}{\vartheta} \cdot z.$$

Darin ist. wenigstens innerhalb gewisser Grenzen der Polarisationsstärke, ϑ eine Constante. Wenn wir mit δx , δy , δz verschwindend kleine Aenderungen dieser Werthe bezeichnen, so erhalten wir

$$(11a) \quad X \cdot \delta x + Y \cdot \delta y + Z \cdot \delta z = \frac{1}{2\vartheta} \delta [x^2 + y^2 + z^2].$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist offenbar gleich der Arbeit, welche die polarisirenden Kräfte bei der Aenderung der Momente gethan haben, und deshalb stellt die rechte Seite der

1) Vgl. meinen Aufsatz: „Ueber die auf das Innere magnetisch oder dielectrisch polarisirter Körper wirkenden Kräfte“ in Monatsber. d. Berl. Akad., 17. Febr. 1881. — Wied. Ann. 13. p. 385—400. Gleichung (2) und (4c), nebst den Bemerkungen am Schlusse.

Gleichung die Aenderung der durch die Polarisation gewonnenen Energie dar, ohne dass die Gültigkeit dieses Ausdruckes, wie in meiner früheren Arbeit, auf den Fall des Gleichgewichts zwischen den polarisirenden Kräften und der dadurch gewonnenen Polarisation beschränkt ist.

Denken wir uns die beweglichen Molecüle, deren Momente wir mit x, y, z bezeichnet haben, eingelagert in ein continuirliches Medium, dessen dielectrische Constante wir mit ϵ bezeichnen, sodass seine Momente und electricischen Spannungen zusammenhängen durch die Gleichungen

$$\mathfrak{X} = \epsilon \cdot X, \quad \mathfrak{Y} = \epsilon \cdot Y, \quad \mathfrak{Z} = \epsilon \cdot Z,$$

so wird der Werth der electricischen Energie (Gleichung 3a entsprechend):

$$(11b) \quad \Phi_e = \iiint dx \cdot dy \cdot dz \cdot \left\{ \frac{\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2}{2\epsilon} - \frac{\mathfrak{X} \cdot x + \mathfrak{Y} \cdot y + \mathfrak{Z} \cdot z}{\epsilon} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2\epsilon} \right\}$$

Denkt man sich den Aether zwischen den Molecülen ungemischt mit inducirbarer ponderabler Substanz, so wäre $\epsilon = 4\pi$ zu setzen.

Der zweite, mit Φ_m bezeichnete, magnetische Theil des kinetischen Potentials kann unverändert bleiben, da die Ionen nicht nothwendig ein anderes magnetisches Inductionsvermögen zu haben brauchen als der Aether, und die Unterschiede in Wirklichkeit meist sehr klein sind. Die Anwesenheit permanent magnetisirter Substanz brauchen wir nicht zu berücksichtigen. Also

$$(11c) \quad \Phi_q = \iiint \frac{dx \cdot dy \cdot dz}{2\mu} \left\{ \left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} \right)^2 \right\}$$

Der dritte, *electromagnetische*, Theil Φ_q reducirt sich, indem wir die Glieder dritten Grades kleiner Grössen (zu denen aber σ nicht gehört) weglassen auf:

$$(11d) \quad \Phi_q = A \iiint dx \cdot dy \cdot dz \cdot \left\{ u \left(\frac{\partial x}{\partial t} + \alpha \sigma \right) + \mathfrak{X} \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial t} + \beta \sigma \right) + \mathfrak{Y} \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial t} + \gamma \sigma \right) \right\}$$

Das σ ist überall gleich Null ausser an den electricisch geladenen Stellen der Ionen: also kommen auch deren Geschwindigkeiten in Betracht. Da die electricischen Kräfte, die auf sie wirken, reine Kräftepaare sind, so muss, wie schon bemerkt, der Schwerpunkt der Molecüle in Ruhe bleiben, und unter diesen Umständen ist zu setzen

$$(11e) \quad \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t} = \alpha \cdot \sigma, \quad \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t} = \beta \cdot \sigma, \quad \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial t} = \gamma \cdot \sigma.$$

und also:

$$(11f) \quad \Phi_q = A \iiint dx \cdot dy \cdot dz \left\{ \mathfrak{U} \frac{\partial}{\partial t} (\mathfrak{x} + x) + \mathfrak{V} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\mathfrak{y} + y) + \mathfrak{W} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\mathfrak{z} + z) \right\}$$

Endlich in den letzten Theil der Arbeit R_1 haben wir einzusetzen mit negativem Vorzeichen, die lebendige Kraft und die Reibung der bewegten Ionen.

$$(11g) \quad \left\{ \begin{aligned} R = & -\frac{1}{2} \iiint m_1 \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial t} \right)^2 \right] \\ & + \iiint [x \cdot r_1 + y \cdot r_2 + z \cdot r_3] dx \cdot dy \cdot dz \end{aligned} \right\}$$

wo r_1 , r_2 und r_3 die der Variation nicht unterworfenen Componenten der Reibungskraft darstellen, deren Werth durch

$$(11h) \quad r_1 = k_1 \cdot \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t}, \quad r_2 = k_1 \cdot \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t}, \quad r_3 = k_1 \cdot \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial t}$$

ausgedrückt werden mag.

Wenn man nun die Bedingungen dafür sucht, dass

$$(12) \quad \delta \{ \Phi_e + \Phi_m + \Phi_q + R \} = 0$$

werde, so ergibt sich:

1. Bei Variation der $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$

$$(12a) \quad \frac{\mathfrak{x} - x}{\epsilon} = A \cdot \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t}, \quad \frac{\mathfrak{y} - y}{\epsilon} = A \cdot \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial t}, \quad \frac{\mathfrak{z} - z}{\epsilon} = A \cdot \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial t},$$

woraus auch in der schon früher angewendeten Weise (vgl. Gleichungen (2), (4c) und (4d) der früheren Abhandlung) die Gleichungen gewonnen werden können:

$$(12b) \quad \left\{ \begin{aligned} A \cdot \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mathfrak{z} - z}{\epsilon} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mathfrak{y} - y}{\epsilon} \right) \\ A \cdot \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mathfrak{x} - x}{\epsilon} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mathfrak{z} - z}{\epsilon} \right) \\ A \cdot \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mathfrak{y} - y}{\epsilon} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mathfrak{x} - x}{\epsilon} \right) \end{aligned} \right.$$

2. Bei Variationen der $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{Z}$:

$$(12c) \quad \begin{cases} A \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\mathfrak{X} + \mathfrak{x}) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mathfrak{M}}{\mu} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mathfrak{N}}{\mu} \right) \\ A \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\mathfrak{Y} + \mathfrak{y}) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mathfrak{N}}{\mu} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mathfrak{Q}}{\mu} \right) \\ A \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\mathfrak{Z} + \mathfrak{z}) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mathfrak{Q}}{\mu} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mathfrak{M}}{\mu} \right) \end{cases}$$

3. Endlich bei der Variation nach x , y , z

$$- \left(\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} \right) + \frac{1}{\vartheta} x - A \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t} - m_1 \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + r_1 = 0,$$

was combinirt mit den Gleichungen (11h) und (12a) gibt:

$$(12d) \quad \begin{cases} + \frac{2\mathfrak{X}}{\varepsilon} = \frac{1+\vartheta}{\vartheta} x + m_1 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + k_1 \cdot \frac{\partial x}{\partial t} \\ \text{und entsprechend} \\ + \frac{2\mathfrak{Y}}{\varepsilon} = \frac{1+\vartheta}{\vartheta} y + m_1 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + k_1 \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \\ + \frac{2\mathfrak{Z}}{\varepsilon} = \frac{1+\vartheta}{\vartheta} z + m_1 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + k_1 \cdot \frac{\partial z}{\partial t} \end{cases}$$

Der kürzeren Schreibweise halber setzen wir

$$(12e) \quad \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1+\vartheta}{\vartheta} = a^2, \quad \frac{\varepsilon}{2} m_1 = m, \quad \frac{\varepsilon}{2} k_1 = k,$$

somit wird

$$(12f) \quad \begin{cases} + \mathfrak{X} = a^2 x + m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + k \frac{\partial x}{\partial t} \\ + \mathfrak{Y} = a^2 y + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + k \frac{\partial y}{\partial t} \\ + \mathfrak{Z} = a^2 z + m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + k \frac{\partial z}{\partial t} \end{cases}$$

System ebener Wellen in Richtung der x -Axe ablaufend.

Setze

$$(13) \quad \mathfrak{Y} = B \cdot e^{in(t+px)}, \quad \mathfrak{N} = C \cdot e^{in(t+px)}, \quad \mathfrak{y} = b \cdot e^{in(t+px)}$$

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{Z} = \mathfrak{Q} = \mathfrak{M} = x = z = 0,$$

so geben die Gleichungen (12b) für die Werthe der Coefficienten:

$$(13a) \quad \begin{cases} p \frac{(B-b)}{\varepsilon} = AC; \quad \text{und (12c):} \\ A(B+b) = C \frac{p}{\mu}; \end{cases}$$

endlich (12f):

$$(13b) \quad B = a^2 b - m n^2 b + i n k b.$$

Setzt man

$$(13c) \quad \begin{cases} b = h B, & \text{also:} \\ h = \frac{1}{a^2 - m n^2 + i n k}, \end{cases}$$

so geben die Gleichungen (13a):

$$(13d) \quad \frac{p}{A} \cdot \frac{1-h}{1+h} = \frac{\epsilon \mu A}{p}.$$

Nach der Art des Vorkommens in den Gleichungen (14) ist offenbar $1/p$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen. Wenn nicht $k = 0$ ist, wird deren Werth complex sein, was bekanntlich Dämpfung der fortlaufenden Wellen anzeigt.

Um die physikalische Bedeutung dieses Ausdruckes deutlicher zu machen und um die reellen und imaginären Theile voneinander zu trennen, bemerken wir zunächst, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\mathfrak{G}_0$ im continuirlichen Aether gegeben ist durch:

$$(14) \quad \mathfrak{G}_0^2 = \frac{1}{A^2 \cdot \epsilon \cdot \mu}.$$

Setzen wir dann

$$(14a) \quad p = -\frac{q}{i n} + \frac{1}{\mathfrak{G}},$$

so ist nach der oben gemachten Anwendung des Exponenten p offenbar $\mathfrak{G}$ die reelle Fortpflanzungsgeschwindigkeit der von uns betrachteten Wellen und q der Dämpfungscoefficient für die Längeneinheit des Weges.

Dadurch wird Gleichung (13d)

$$(14b) \quad p = -\frac{q}{i n} + \frac{1}{\mathfrak{G}} = \frac{1}{\mathfrak{G}_0} \cdot \sqrt{\frac{1+h}{1-h}} \\ \frac{1+h}{1-h} = \frac{a^2 - m n^2 + k i n + 1}{a^2 - m n^2 + k i n - 1}.$$

Setze

$$(14c) \quad \begin{cases} a^2 - m n^2 + 1 = \varrho_0 \cdot \cos \vartheta_0 \\ a^2 - m n^2 - 1 = \varrho_1 \cdot \cos \vartheta_1 \\ k n = \varrho_0 \cdot \sin \vartheta_0 = \varrho_1 \cdot \sin \vartheta_1, \end{cases}$$

wobei ϱ_0 und ϱ_1 immer positiv genommen werden können, und die Winkel ϑ_0 und ϑ_1 in den zwei ersten Quadranten, sodass $\sin \vartheta_0$ und $\sin \vartheta_1$ immer positive Grössen sind, so wird

$$(14d) \quad p = \frac{1}{\mathfrak{C}_0} \cdot \sqrt{\frac{\mathfrak{C}_0}{\mathfrak{C}_1}} \cdot e^{\frac{1}{2} i (\vartheta_0 - \vartheta_1)}$$

und

$$(14e) \quad + \frac{q}{i n} = \frac{1}{\mathfrak{C}_0} \cdot \sqrt{\frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_0}} \sin \frac{1}{2} (\vartheta_0 - \vartheta_1),$$

$$(14f) \quad \frac{\mathfrak{C}_0}{\mathfrak{C}} = \sqrt{\frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_0}} \cdot \cos \frac{1}{2} (\vartheta_0 - \vartheta_1).$$

Dieses letztere Verhältniss ist zugleich das Brechungsverhältniss schwach gedämpfter Wellen für die betreffenden Schwingungen bei dem Uebergang aus dem mit beweglichen Molecülen beladenen Aether in den davon freien.

Zu bemerken ist, dass der Wurzelausdruck, der in den beiden Gleichungen (14e) und (14f) vorkommt, in beiden dasselbe Vorzeichen haben muss.

Aus den Gleichungen ergeben sich die Werthe der Tangenten:

$$(14g) \quad \operatorname{tg} \vartheta_0 = \frac{k n}{a^2 - m n^2 + 1}, \quad \operatorname{tg} \vartheta_1 = \frac{k n}{a^2 - 1 - m n^2},$$

oder wenn wir

$$(15) \quad N^2 = \frac{a^2 + 1}{m}, \quad P^2 = \frac{a^2 - 1}{m}$$

setzen,

$$(15a) \quad \operatorname{tg} \vartheta_0 = \frac{k}{m N} \cdot \frac{1}{\frac{N}{n} - \frac{n}{N}}, \quad \operatorname{tg} \vartheta_1 = \frac{k}{m P} \cdot \frac{1}{\frac{P}{n} - \frac{n}{P}},$$

welche zeigen, dass der Winkel ϑ_0 ein rechter wird, wenn $n = N$. N ist aber der Werth, den n annehmen würde, wenn die Phasen der electricischen Verschiebungen $\mathfrak{E}$ im Aether und $\mathfrak{r}$ im Molecül gleiche Richtung haben und ohne Reibung unter dem Einflusse ihrer eigenen Anziehungskräfte vor sich gehen, die in der Constante a^2 zusammengefasst sind.

Wenn $a^2 > m/\varepsilon$ und daher P reell ist, bezeichnet P eine andere kleinere Schwingungszahl, welche eintreten würde, wenn die genannten beiden electricischen Kräfte einander gerade entgegenwirken.

Die in den Gleichungen (15a) für die beiden Tangenten gegebenen Werthe zeigen, dass, wenn die Reibungsconstante k sehr klein ist, die Tangenten nur dann endliche Grösse haben können, wenn auch ihr Nenner nahe gleich Null wird, d. h. n nahehin gleich N oder gleich P wird. Wenn dies eintritt, so

wird für $n = P$ der Winkel $\vartheta_1 = \pi/2$, für $n = N$ dagegen $\vartheta_0 = \pi/2$.

Das Verhältniss der beiden in (14g) und (15a) gegebenen Tangenten findet sich:

$$\operatorname{tg} \vartheta_1 : \operatorname{tg} \vartheta_0 = (N^2 - n^2) : (P^2 - n^2).$$

Da zum absolut grösseren Werthe der Tangente auch der grössere Sinus gehört, und für Winkel die nahehin $= 0$ oder $= \pi$ sind, das Verhältniss der Sinus mit dem der Tangenten zusammenfällt, so ergibt sich hieraus, dass der in den Gleichungen (14e) und (14f) vorkommende Factor $\sin \vartheta_1 / \sin \vartheta_0$ für $n = 0$ den Werth N^2 / P^2 hat, also grösser als Eins ist; für $n = \infty$ dagegen wird $\sin \vartheta_1 = \sin \vartheta_0$.

Der genannte Factor wird steigen, bis $n = P$ geworden ist, wird $= 1$ sein, wenn $n^2 = \frac{1}{2}(P^2 + N^2)$; wird noch weiter abnehmen, bis $n = N$ geworden, endlich wenn n sehr gross, wieder zunehmen, bis er für $n = \infty$ wieder $= 1$ geworden ist.

Wie schon früher hervorgehoben, ist $\mathfrak{C}_0 / \mathfrak{C} = n$ das Brechungsverhältniss zwischen leerem und belastetem Aether, dagegen

$$(16) \quad q = \frac{q \cdot \mathfrak{C}}{n}$$

ist der Erlöschungscoefficient für eine Wellenlänge der betreffenden Strahlen, dessen Werth sich auch aus (14e) und (14f) ergibt, gleich

$$(16a) \quad q = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\vartheta_0 - \vartheta_1),$$

$$n^2(1 + q^2) = \frac{\sin(\vartheta_1)}{\sin(\vartheta_0)} = \frac{\varrho_0}{\varrho_1}.$$

Für kleine Werthe von k ergibt sich aus den vorher angestellten Betrachtungen, dass der hier vorkommende Winkel $\frac{1}{2}(\vartheta_1 - \vartheta_0)$ bei $n \doteq 0$ sehr klein ist, bei $n = P$ ziemlich schnell bis nahe an $\pi/2$ steigt und bei $n = N$ wieder ebenso schnell auf seinen früheren Werth zurückgeht. Sein Sinus ist also für $n = 0$, wie für $n = \infty$, sehr klein, zwischen $n = P$ und $n = N$ dagegen wird er nahe gleich 1, und wird also nach Gleichung (16a) zwischen beiden Linien starke Absorption hervorbringen.

Die Werthe des Brechungsverhältnisses dagegen ergeben sich aus obigen Gleichungen:

$$(16b) \quad n = \sqrt{\frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_0 (1 + q^2)}},$$

sie werden also in dem ganzen Streifen starker Absorption herabgedrückt gegen die durch den Ausdruck $\sqrt{\sin \vartheta_1 / \sin \vartheta_0}$ dargestellten Werthe. Letztere sind aber, wie wir gesehen, auf der Seite vom Absorptionsstreifen gegen das Roth hin höher, als auf der Seite gegen das Violett hin. Es zeigt dieses Verhalten also *anomale Dispersion* an für die neben dem Absorptionsstreifen sichtbar bleibenden Farben.

Bei den farblos durchsichtigen Körpern, bei denen gewöhnlich die Brechungsverhältnisse untersucht worden sind, finden wir in dem sichtbaren Theile des Spectrums keine deutliche Absorption, diese kann nur jenseits der Grenzen desselben vorkommen. Der Verlauf der Curve der Brechungsverhältnisse, wie er der viel gebrauchten Formel von Cauchy zu Grunde liegt, stimmt in unserer Theorie mit dem Theil der Curve für Werthe von n , welche kleiner sind, als P . Es wären also im allgemeinen die Absorptionsstreifen, welche dies veranlassen, jenseits des Ultraviolett zu suchen. Natürlich ist nicht ausgeschlossen, dass auch Moleculé vorkommen können mit mehreren eigenen Schwingungsperioden, die mehrere Absorptionsstreifen und entsprechend verwickeltere Brechungsverhältnisse geben.

Zu bemerken ist noch, dass in stark absorbirten Stellen des Spectrums, wo der Factor $\cos \frac{1}{2}(\vartheta_0 - \vartheta_1)$ sehr klein wird, unsere Theorie die Möglichkeit offen lässt, dass Brechungsverhältnisse kleiner als 1, oder Geschwindigkeiten höher als im leeren Aether vorkommen, wie das nach den Untersuchungen von Hrn. Kundt in einigen Metallen der Fall ist.

Fälle mit imaginärem P .

Die Fälle, wo

$$a^2 < 1,$$

bei denen P imaginär wird, ergeben einen anderen Verlauf. In diesen wird $\tan(\vartheta_1)$ immer negativ, also $\vartheta_1 > \pi/2$, und desto grösser, je höher n ; wenn k klein ist, ist ϑ_1 immer nur wenig von π unterschieden. Dagegen verhält sich ϑ_0 wie in den früher besprochenen Fällen. Sobald n den Werth N passirt hat, wird auch ϑ_0 sich schnell dem Werthe π nähern. $(\vartheta_2 - \vartheta_0)/2$, welches vorher immer wenig kleiner war als ein Rechter, wird für $n > N$ klein werden, und erst für solche

Werthe würde also die Dämpfung schwach werden, sodass die betreffenden Strahlen gesehen werden könnten. Die Brechung würde ein Minimum in der Gegend von $n = N$ erreichen, von da ab, wo die Strahlen anfangen sichtbar zu werden, weiter steigen und endlich für $n = \infty$ den festen Werth $= 1$ asymptotisch erreichen. Körper von diesem Typus der Brechung lassen sich unter den bisher untersuchten noch nicht erkennen.

Phasendifferenz.

Zu bemerken ist noch, dass aus Gleichung (13c) folgt:

$$(16c) \quad \frac{b}{B+b} = \frac{e^{-i\vartheta_0}}{q_0}.$$

Aus (13a) aber folgt:

$$\frac{B+b}{C} = \frac{p}{A\mu},$$

da andererseits

$$p = \frac{1}{\mathfrak{C}_0} \sqrt{\frac{q_0}{q_1}} \cdot e^{\frac{1}{2}i(\vartheta_0 - \vartheta_1)}$$

gefunden ist, ergibt sich

$$\frac{b}{C} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \cdot \mu \cdot q_0 \cdot q_1}} e^{-\frac{1}{2}i(\vartheta_0 + \vartheta_1)}.$$

Daraus geht hervor, dass eine Phasendifferenz zwischen den magnetischen und den ponderablen Schwingungen besteht, welche $\frac{1}{2}(\vartheta_0 + \vartheta_1)$ beträgt. Das Verhältniss ihrer Amplituden wird durch den ersten Factor bestimmt:

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon \cdot \mu \cdot q_0 \cdot q_1}}.$$

Die Grössen q_0 und q_1 können nicht Null werden, aber sie werden bei kleinem Werthe von k sehr klein, wenn entweder $n = N$ oder $n = P$.

Die Gleichung (13e) lässt erkennen, dass zwischen der Oscillation der electrischen Momente und der der Ionen auch eine Phasendifferenz ist. Setzt man

$$a^2 - m n^2 = \varrho_2 \cdot \cos \vartheta_2$$

so ist

$$k n = \varrho_2 \cdot \sin \vartheta_2,$$

$$\frac{b}{B} = h = \frac{1}{q_2} \cdot e^{i\vartheta_2}.$$

Das Verhältniss der Amplituden wird ein Minimum, wenn

$$n^2 = \frac{1}{2}(P^2 + N^2).$$

Starke Schwingungen dieser Art würden möglicherweise die Ionen aus ihren Verbindungen reißen können, namentlich wenn noch eine electrostatische Ladung der Substanz hinzukommt, und bei allen Substanzen, wo starke Absorption an der Grenze des Ultraviolett vorkommt, würde die von Hrn. Hertz beobachtete Entweichung der Electricität unter dem Einflusse der ultravioletten Strahlen eintreten können. Dass überwiegend leicht negative Electricität ausströmt, weist allerdings auf eine besondere Beschaffenheit der negativen Ionen hin.

Verhalten der nicht absorbirenden Medien.

Wenn der Absorptionscoefficient $k = 0$ ist, ist h reell, und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$(17) \quad \mathfrak{C} = \frac{1}{p} = \mathfrak{C}_0 \sqrt{\frac{1-h}{1+h}}$$

wird alsdann rein reell. Der erste Factor dieses Werthes

$$(12) \quad \mathfrak{C}_0 = \frac{1}{A\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

ist bekanntlich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im continuirlichen Aether, und für reelle Werthe ist

$$(13) \quad \frac{1+h}{1-h} = \frac{a^2\varepsilon + 1 - mn^2}{a^2\varepsilon - mn^2 - 1}.$$

Dieser Factor ist positiv und das Verhältniss $\mathfrak{C} : \mathfrak{C}_0 = 1 : n$ demnach reell, wenn entweder

$$mn^2 < a^2\varepsilon - 1 \quad \text{oder} \quad mn^2 > a^2\varepsilon + 1.$$

Der erste Fall ergibt constant werdendes Brechungsverhältniss für langsamere Schwingungen; die Geschwindigkeit ist in durchsichtigen nicht absorbirenden Medien kleiner, als im Vacuum. Der zweite Fall ergibt constant werdendes Brechungsverhältniss für sehr schnelle Schwingungen, und das Brechungsverhältniss kleiner als Eins. Der erste Fall entspricht also besser den Beobachtungen an den bekannteren sehr durchsichtigen Medien.

Wenn wir bemerken, dass $a^2/m = N^2$ das Quadrat der Schwingungszahl der vom Aether befreiten Ionen bezeichnet, so wird

$$\left(\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}_0}\right)^2 = \frac{N^2 - n^2 - \frac{1}{m}}{N^2 - n^2 + \frac{1}{m}},$$

und da $\lambda = \mathfrak{C}/n$ ist, kann man setzen

$$\begin{aligned} (\mathfrak{C}^2 - \mathfrak{C}_0^2) \left(N^2 - \frac{\mathfrak{C}^2}{\lambda^2} \right) + (\mathfrak{C}^2 + \mathfrak{C}_0^2) \frac{1}{m} &= 0, \\ \mathfrak{C}^2 (N^2 \lambda^2 + \mathfrak{C}_0^2) - \mathfrak{C}^4 + \frac{\lambda^2 \mathfrak{C}_0^2}{m} - \mathfrak{C}_0^2 N^2 \lambda^2 + \mathfrak{C}^2 \frac{\lambda^2}{m} &= 0, \\ \mathfrak{C}^2 &= \frac{1}{2} \left(N^2 \lambda^2 + \frac{\lambda^2}{m} + \mathfrak{C}_0^2 \right) \\ &\pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(N^2 \lambda^2 + \frac{\lambda^2}{m} + \mathfrak{C}_0^2 \right)^2 + \frac{\lambda^2 \mathfrak{C}_0^2}{m} - N^2 \lambda^2 \mathfrak{C}_0^2}. \end{aligned}$$

Da $\mathfrak{C}^2 < \mathfrak{C}_0^2$ sein soll, kann nur das untere Zeichen gelten. Dürfen wir

$$\lambda^2 \mathfrak{C}_0^2 \left[\frac{1}{m} - N^2 \right]$$

als klein ansehen, so lässt der letzte Ausdruck eine Entwicklung der Wurzel zu

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}^2 &= \frac{\lambda_0^2 \mathfrak{C}^2 \left(N^2 - \frac{1}{m} \right)}{N^2 \lambda^2 + \mathfrak{C}_0^2 + \frac{\lambda^2}{m}} = \frac{\left(N^2 - \frac{1}{m} \right)}{\frac{N^2}{\mathfrak{C}_0^2} + \frac{\mathfrak{C}_0^2}{\lambda^2} + \frac{1}{m \mathfrak{C}_0^2}} \\ \frac{\mathfrak{C}_0^2}{\mathfrak{C}^2} &= \frac{N^2 + \frac{\mathfrak{C}_0^2}{\lambda^2} + \frac{1}{m \mathfrak{C}_0^2}}{N^2 - \frac{1}{m}}. \end{aligned}$$

Dies ist eine Formel, die sich der von Cauchy nähert, wenigstens für Medien mit kleiner Dispersion, in der $\mathfrak{C}_0/\lambda$ als klein gegen N betrachtet werden kann. Denn dann kann man annähernd die Wurzel durch den binomischen Satz aus der letzten Gleichung ausziehen, und erhält

$$\begin{aligned} n &= \alpha + \frac{\beta}{\lambda^2} \\ \alpha &= \frac{N + \frac{1}{m \mathfrak{C}_0^2}}{\sqrt{N^2 - \frac{1}{m}}}, \quad \beta = \frac{\frac{1}{2} \mathfrak{C}_0^2}{\sqrt{N^2 - \frac{1}{m}}}. \end{aligned}$$

Polarisation durch Brechung.

Electrische Schwingungen in der Einfallsebene.

Für den einfallenden Strahl sei beim Einfallswinkel α die yx -Ebene die Einfallsebene, die Amplitude der magnetischen Schwingung C , dem z parallel; die der electrischen Schwingungen

liegt dann in der Einfallsebene, hat den Betrag nach Gleichung (13a) und (14b)

$$\frac{B}{C} = \frac{1}{\mathfrak{E} \cdot A \mu \cdot (1 + h)}$$

und der Winkel zwischen diesen Schwingungen und der y -Axe ist gleich dem Einfallswinkel α , und ihre in die Richtung der y fallende Componente ist also

$$\mathfrak{Y} = B \cos \alpha = \frac{C \cdot \cos \alpha}{\mathfrak{E} A \mu (1 + h)}.$$

Die Grenzbedingungen ergeben sich aus den Gleichungen (12a) und (12b) dadurch, dass an der Grenzfläche die dort nach x genommenen Differentialquotienten nicht unendlich werden dürfen, d. h. dass die Werthe, von denen sie genommen sind, ebenda nicht discontinuirlich sein dürfen. Es müssen also die Werthe von $(\mathfrak{Y} - \mathfrak{y})/\varepsilon$, $(\mathfrak{Z} - \mathfrak{z})/\varepsilon$ und $\mathfrak{N}/\mu$ sowie $\mathfrak{M}/\mu$ auf beiden Seiten der Grenzfläche gleich gross sein. Bezeichnen wir die Grössen, die sich auf das Mittel des einfallenden Strahles beziehen, mit dem Index 1, die des gebrochenen Strahles mit dem Index 3, so ist also an der Grenze zu setzen:

1. Für den einfallenden Strahl:

$$\frac{\mathfrak{Y}_1 - \mathfrak{y}_1}{\varepsilon_1} = \frac{(B_1 - b_1)}{\varepsilon_1} \cos \alpha$$

$$\frac{\mathfrak{N}_1}{\mu_1} = \frac{C_1}{\mu_1}.$$

2. Für den gebrochenen Strahl:

$$\frac{\mathfrak{N}_3}{\mu_3} = \frac{C_3}{\mu_3}$$

$$\frac{\mathfrak{Y}_3 - \mathfrak{y}_3}{\varepsilon_3} = \frac{B_3 - b_3}{\varepsilon_3} \cdot \cos \beta.$$

3. Für den gespiegelten Strahl:

$$\frac{\mathfrak{Y}_2 - \mathfrak{y}_2}{\varepsilon_1} = - \frac{B_2 - b_2}{\varepsilon_1} \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{\mathfrak{N}_2}{\mu_1} = - \frac{C_2}{\mu_1}.$$

Nach Gleichung (13a) ist für die verschiedenen Indices

$$\frac{B - b}{C} = \frac{A \varepsilon}{p} = \mathfrak{E} \cdot A \cdot \varepsilon$$

oder

$$\frac{B_1 - b_1}{\varepsilon_1} = C_1 \cdot \mathfrak{C}_1 \cdot A, \quad \frac{B_2 - b_2}{\varepsilon_1} = C_2 \cdot \mathfrak{C}_1 \cdot A, \quad \frac{B_3 - b_3}{\varepsilon_3} = \mathfrak{C}_3 \cdot C_3 \cdot A.$$

Die Grenzbedingungen fordern also:

$$(I) \quad \begin{cases} \frac{C_1 + C_2}{\mu_1} = \frac{C_3}{\mu_3} \text{ und} \\ (C_1 - C_2) A \mathfrak{C}_1 \cos \alpha = C_3 A \cdot \mathfrak{C}_3 \cdot \cos \beta. \end{cases}$$

Da die Wellenphasen an der Grenzfläche $x = 0$, beiderseits mit gleicher Geschwindigkeit fortlaufen müssen, ist bekanntlich

$$\frac{\mathfrak{C}_1}{\sin \alpha} = \frac{\mathfrak{C}_3}{\sin \beta},$$

und die Gleichungen (I) ergeben

$$(Ia) \quad \frac{\mu_3}{\mu_1} (C_1 + C_2) \cos \beta \cdot \sin \beta = (C_1 - C_2) \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha.$$

Da μ_3 und μ_1 bei den bekannten ungefärbt durchsichtigen Körpern kaum unterschieden sind, kann man ihr Verhältniss gleich 1 setzen, und erhält

$$C_1 (\sin 2\beta - \sin 2\alpha) = -C_2 (\sin 2\beta + \sin 2\alpha),$$

also $C_2 = 0$, wenn

$$\sin 2\beta = \sin 2\alpha,$$

was eintritt, wenn $\beta + \alpha = (\pi/2)$.

Es ist dies der Fall, wo der reflectirte Strahl auslöscht. Die Grösse des Polarisationswinkels entspricht Fresnel's bekanntem Gesetze, und zwar *für alle Farben*.

Magnetische Schwingungen in der Einfallsebene.

Wir bezeichnen wieder die Amplitude derselben in den drei Strahlen mit C_1 , C_2 , C_3 und die der electricen mit B_1 , B_2 , B_3 .

Die Grenzbedingung für die magnetischen Oscillationen wird

$$\frac{C_1 - C_2}{\mu_1} \cdot \cos \alpha = \frac{C_3}{\mu_3} \cos \beta$$

und für die electricen:

$$\frac{B_1 - b_1}{\varepsilon_1} + \frac{B_2 - b_2}{\varepsilon_1} = \frac{B_3 - b_3}{\varepsilon_3}.$$

Indem wir diese Grössen wieder durch die entsprechenden C ausdrücken, erhalten wir

$$[C_1 + C_2] \mathfrak{C}_1 . A = C_3 \mathfrak{C}_3 A,$$

oder wenn wir $\mu_1 = \mu_3$ setzen:

$$(II) \quad (C_1 - C_2) . \cos \alpha \sin \beta = (C_1 + C_2) \sin \alpha . \cos \beta,$$

$$(IIa) \quad C_1 . \sin (\beta - \alpha) = C_2 . \sin (\alpha + \beta),$$

was Fresnel's bekannter Werth für die Intensität des reflectirten Strahles in der anderen Polarisationsrichtung ist.

Sobald Absorption stattfindet, haben wir, wie bekannt, elliptische Polarisation. Ihre Gesetze sind aus der vorgetragenen Theorie ohne Lücke abzuleiten.