La relazione di Göpel per funzioni iperellittiche d'ordine qualunque.

(Nota di F. BRIOSCHI, in Milano.)

1.° GÖPEL nella sua oramai classica Memoria: *Theoriae transcendentium Abelianarum primi ordinis adumbratio levis*, pubblicata dopo la sua morte nel vol. 35 del Giornale di CRELLE (pag. 277) ha dimostrato sussistere fra quattro funzioni Θ a due argomenti, scelte opportunamente, una relazione biquadratica, formata colle quarte potenze di quelle funzioni, coi prodotti a due a due dei loro quadrati, e col prodotto delle funzioni stesse. Questa memorabile relazione fu recentemente ricordata dal sig. CAYLEY nella sua Memoria: *On the double Θ -functions in connexion with a 16-nodal quartic surface* e dal compianto BORCHARDT nella *Ueber die Darstellung der Kummerschen Fläche vierter Ordnung mit sechzehn Knotenpunkten durch die Göpelsche biquadratische Relation zwischen vier Theta-functionen mit zwei Variabeln*, ambedue pubblicate nello stesso fascicolo del Giornale già diretto da quest'ultimo (vol. 83, fasc. 3°).

Noi torneremo più avanti sull'argomento speciale di questi più recenti lavori, sul nesso cioè esistente fra la relazione di GÖPEL e la superficie di quarto ordine con sedici punti singolari considerata la prima volta da KUMMER nella sua Memoria: *Ueber die Flächen vierten Grades mit sechzehn singulären Punkten* (Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1864); ma vogliamo dimostrare dapprima che relazioni affatto analoghe a quella di GÖPEL sussistono fra $2n$ funzioni Θ ad n argomenti opportunamente scelte. Posto:

$$R(x) = A(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_{2n+1})$$

$$\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

e:

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n),$$

$$Q(x) = A(x - a_{n+1})(x - a_{n+2}) \cdots (x - a_{2n+1})$$

indicando con l_m una quantità eguale a $P(a_m)$ se $m > n$ ed eguale a $-Q(a_m)$ quando sia $m \leq n$, è noto per le ricerche del sig. WEIERSTRASS (*) che le $2n + 1$ funzioni ad indice semplice:

$$p_m = \sqrt{\frac{\varphi(a_m)}{l_m}}$$

e le $n(2n + 1)$ funzioni ad indice doppio:

$$p_{rs} = p_{sr} = p_r p_s \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{R(x_i)}}{(x_i - a_r)(x_i - a_s) \varphi'(x_i)}$$

sono eguali al rapporto di due funzioni Θ ad n argomenti, in ciascuno dei quali rapporti il denominatore è comune (**).

Sieno $r_1, r_2, \dots, r_n$, n qualsivogliano fra i numeri $1, 2, 3, \dots, 2n + 1$, ma differenti fra loro, e pongasi:

$$S(x) = (x - a_{r_1})(x - a_{r_2}) \cdots (x - a_{r_n});$$

se con μ, ν si indicano altri due numeri di quella serie essi pure differenti da $r_1, r_2, \dots, r_n$, si hanno fra quelle funzioni p le relazioni:

$$\left. \begin{aligned} Ap_p^2 &= \frac{R'(a_p)}{l_p S(a_p)} - \sum_{r=1}^{r_n} \frac{l_r p_{r,\mu}^2}{S'(a_r)} \\ \frac{l_\nu}{S(a_\nu)} p_{\nu,\mu}^2 &= \frac{R'(a_p)}{l_\mu (a_p - a_\nu) S(a_p)} + \sum_{r=1}^{r_n} \frac{l_r p_{r,\mu}^2}{(a_\nu - a_r) S'(a_r)} \\ Ap_\mu p_\nu &= - \sum_{r=1}^{r_n} \frac{l_r p_{r,\mu} p_{r,\nu}}{S'(a_r)} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

delle quali le prime due trovansi nella succitata Memoria del sig. WEIERSTRASS (pag. 319) e la terza fu da me data nel 1° volume di questi Annali (Anno 1858, pag. 29).

Da queste tre relazioni quadratiche si deducono le biquadratiche omogenee analoghe a quella di GÖPEL nel modo seguente. Permutando dapprima nella

(*) *Zur Theorie der Abel'schen Functionen.* Giornale di CRELLE, vol. i 47, 52.

(**) Formando nello stesso modo funzioni p a tre, a quattro... ad n indici, si ha che il numero totale di esse è $4^n - 1$.

seconda di esse i numeri μ, ν si ottiene l'altra:

$$\frac{l_\mu}{S(a_\mu)} p^{\mu, \nu} = \frac{R'(a_\nu)}{l_\nu(a_\nu - a_\mu) S(a_\nu)} + \sum_{r=1}^{r_n} \frac{l_r p^{\mu, r, \nu}}{(a_\mu - a_r) S'(a_r)}$$

ma $p_{\mu, \nu} = p_{\nu, \mu}$ quindi:

$$M p^{\mu, \nu} = \frac{R'(a_\nu)}{l_\nu S(a_\nu)} \sum_{r=1}^{r_n} \frac{l_r p^{\mu, r, \nu}}{(a_\nu - a_r) S'(a_r)} + \frac{R'(a_\mu)}{l_\mu S(a_\mu)} \sum_{r=1}^{r_n} \frac{l_r p^{\mu, r, \nu}}{(a_\mu - a_r) S'(a_r)}$$

posto:

$$M = \frac{R'(a_\nu)}{S^2(a_\nu)} + \frac{R'(a_\mu)}{S^2(a_\mu)}.$$

In secondo luogo dalla prima e dalla seconda di quelle relazioni si deduce facilmente la:

$$A p^{\mu, \nu} = \frac{(a_\nu - a_\mu) l_\nu}{S(a_\nu)} p^{\mu, \nu} - \sum_{r=1}^{r_n} \frac{(a_\mu - a_r) l_r}{(a_\nu - a_r) S'(a_r)} p^{\mu, r, \nu}$$

e sostituendo in quest'ultima il valore di $p^{\mu, \nu}$ dato dalla precedente si giunge ad una delle relazioni richieste, cioè alla:

$$A M p^{\mu, \nu} = \frac{(a_\nu - a_\mu) l_\nu}{S(a_\nu)} \left[\frac{R'(a_\nu)}{l_\nu S(a_\nu)} \sum_{r=1}^{r_n} \frac{l_r p^{\mu, r, \nu}}{(a_\nu - a_r) S'(a_r)} + \frac{R'(a_\mu)}{l_\mu S(a_\mu)} \sum_{r=1}^{r_n} \frac{l_r p^{\mu, r, \nu}}{(a_\mu - a_r) S'(a_r)} \right] - \left\{ \begin{aligned} & - M \sum_{r=1}^{r_n} \frac{(a_\mu - a_r) l_r}{(a_\nu - a_r) S'(a_r)} p^{\mu, r, \nu} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

per la quale il valore di $p^{\mu, \nu}$ è espresso in funzione dei quadrati delle $2n$ funzioni a doppio indice $p_{r, \mu}, p_{r, \nu}$. Permutando nuovamente in quest'ultima i numeri μ, ν , siccome M rimane invariata, si avrà analogamente:

$$A M p^{\nu, \mu} = \frac{(a_\nu - a_\mu) l_\mu}{S(a_\mu)} \left[\frac{R'(a_\mu)}{l_\mu S(a_\mu)} \sum_{r=1}^{r_n} \frac{l_r p^{\nu, r, \mu}}{(a_\mu - a_r) S'(a_r)} + \frac{R'(a_\nu)}{l_\nu S(a_\nu)} \sum_{r=1}^{r_n} \frac{l_r p^{\nu, r, \mu}}{(a_\nu - a_r) S'(a_r)} \right] - \left\{ \begin{aligned} & - M \sum_{r=1}^{r_n} \frac{(a_\nu - a_r) l_r}{(a_\mu - a_r) S'(a_r)} p^{\nu, r, \mu} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Ma dalla terza delle relazioni (1) si ha:

$$A M p_\mu p_\nu = - M \sum_{r=1}^{r_n} \frac{l_r p_{r, \mu} p_{r, \nu}}{S'(a_r)} \quad (4)$$

vale a dire il prodotto $p_\mu p_\nu$ espresso pei prodotti a due a due delle stesse $2n$ funzioni a doppio indice $p_{r, \mu}, p_{r, \nu}$; quindi moltiplicando le prime due membro per membro e sottraendo dal prodotto il quadrato di quest'ultima, si ottiene il

tipo delle relazioni biquadratiche analoghe a quella di GÖPEL per le funzioni iperellittiche d'ordine superiore, cioè:

$$0 = -\frac{(a_\mu - a_\nu)^2 l_\mu l_\nu}{S(a_\mu) S(a_\nu)} H^2 + (a_\mu - a_\nu) M H G + M^2 F$$

posto:

$$\begin{aligned} H &= \frac{R'(a_\nu)}{l_\nu S(a_\nu)} \sum_{r_1}^{r_n} \frac{l_r p_{r,\mu}^2}{(a_\nu - a_r) S'(a_r)} + \frac{R'(a_\mu)}{l_\mu S(a_\mu)} \sum_{r_1}^{r_n} \frac{l_r p_{r,\nu}^2}{(a_\mu - a_r) S'(a_r)} \\ G &= \frac{l_\nu}{S(a_\nu)} \sum_{r_1}^{r_n} \frac{(a_\mu - a_r) l_r}{(a_\nu - a_r) S'(a_r)} p_{r,\mu}^2 - \frac{l_\nu}{S(a_\nu)} \sum_{r_1}^{r_n} \frac{(a_\nu - a_r) l_r}{(a_\mu - a_r) S'(a_r)} p_{r,\nu}^2 \\ F &= \sum_{r_1}^{r_n} \frac{(a_\mu - a_r) l_r}{(a_\nu - a_r) S'(a_r)} p_{r,\mu}^2 \sum_{r_1}^{r_n} \frac{(a_\nu - a_r) l_r}{(a_\mu - a_r) S'(a_r)} p_{r,\nu}^2 - \left[\sum_{r_1}^{r_n} \frac{l_r p_{r,\mu} p_{r,\nu}}{S'(a_r)} \right]^2. \end{aligned}$$

La relazione del quarto grado così trovata sarà evidentemente omogenea, e conterrà le quarte potenze delle $2n$ funzioni $p_{r,\mu}$, $p_{r,\nu}$; i prodotti a due a due dei quadrati di quelle funzioni, ed i prodotti quattro a quattro della forma $p_{r_1,\mu} p_{r_1,\nu} p_{r_2,\mu} p_{r_2,\nu}$.

2.° Applichiamo ora le formole generali superiori al caso considerato da GÖPEL ponendo $n=2$. Supporremo per maggiore semplificazione sieno $r_1=1$, $r_2=2$; $\mu=3$, $\nu=4$, e posto $a_r - a_s = (rs)$ introdurremo le quattro denominazioni:

$$\begin{aligned} \alpha &= (13)(23)(45) & \gamma &= (14)(24)(35) \\ \beta &= (13)(14)(25) & \vartheta &= (23)(24)(15) \end{aligned}$$

e la:

$$\begin{aligned} N &= (13)(45) + (24)(15) = (13)(25) + (24)(35) = (14)(25) + (23)(45) = \\ &= (14)(35) + (23)(15) \end{aligned}$$

e quindi:

$$\begin{aligned} N(13) &= \alpha + \beta & N(14) &= \beta + \gamma \\ N(24) &= \gamma + \vartheta & N(23) &= \alpha + \vartheta \\ \beta \vartheta - \alpha \gamma &= (13)(14)(23)(24) N. \end{aligned}$$

Con queste denominazioni le relazioni (2) (3) (4) diventano nel caso qui considerato le seguenti:

$$\begin{aligned} (12) N p_3^2 &= (13)(15) \beta p_{13}^2 + (14)(15) \gamma p_{14}^2 - (23)(25) \vartheta p_{23}^2 - (24)(25) \gamma p_{24}^2 \\ (12) N p_4^2 &= (13)(15) \alpha p_{13}^2 + (14)(15) \beta p_{14}^2 - (23)(25) \alpha p_{23}^2 - (24)(25) \vartheta p_{24}^2 \\ (12) N p_3 p_4 &= N [(13)(14)(15) p_{13} p_{14} - (23)(24)(25) p_{23} p_{24}] \end{aligned}$$

e si otterrà così la relazione biquadratica di GÖPEL sotto la forma:

$$0 = (13)^2(15)^2\alpha\beta p_{13}^4 + (14)^2(15)^2\beta\gamma p_{14}^4 + (23)^2(25)^2\alpha\delta p_{23}^4 + (24)^2(25)^2\gamma\delta p_{24}^4 - \\ - (\alpha + \gamma)[(13)(14)(15)^2\beta p_{13}^2 p_{14}^2 + (23)(24)(25)^2\delta p_{23}^2 p_{24}^2] - \\ - (\beta + \delta)(15)(25)[(13)(23)\alpha p_{13}^2 p_{23}^2 + (14)(24)\gamma p_{14}^2 p_{24}^2] - \\ - (\alpha\gamma + \beta\delta)(15)(25)[(13)(24)p_{13}^2 p_{24}^2 + (14)(23)p_{14}^2 p_{23}^2] + 2\beta\delta N^2 p_{13} p_{14} p_{23} p_{24}. \quad (5)$$

Questa relazione semplificasi assai ponendo:

$$a = \frac{(15) + (25)}{(21)}, \quad b = \frac{(35) + (45)}{(43)}, \quad c = \frac{(13)(24) + (14)(23)}{(12)(43)}$$

dalle quali si deducono dapprima le:

$$a + 1 = 2 \frac{(25)}{(21)}, \quad b + 1 = 2 \frac{(45)}{(43)}, \quad c + 1 = 2 \frac{(14)(23)}{(12)(43)} \\ a - 1 = 2 \frac{(15)}{(21)}, \quad b - 1 = 2 \frac{(35)}{(43)}, \quad c - 1 = 2 \frac{(13)(24)}{(12)(43)}$$

poi le seguenti:

$$\left. \begin{aligned} (a+1)(b+1)(c+1) &= \rho \frac{\alpha\beta}{(13)^2} \\ (a+1)(b-1)(c-1) &= \rho \frac{\beta\gamma}{(14)^2} \\ (a-1)(b+1)(c-1) &= \rho \frac{\alpha\delta}{(23)^2} \\ (a-1)(b-1)(c+1) &= \rho \frac{\gamma\delta}{(24)^2} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Per gli stessi valori delle a , b , c si ottengono inoltre le relazioni:

$$\left. \begin{aligned} 2(a-bc)(a+1) &= -\rho \frac{(\gamma+\gamma)\beta}{(13)(14)}, & 2(a-bc)(a-1) &= -\rho \frac{(\alpha+\gamma)\delta}{(23)(24)} \\ 2(b-ca)(b+1) &= -\rho \frac{(\beta+\delta)\alpha}{(13)(23)}, & 2(b-ca)(b-1) &= -\rho \frac{(\beta+\delta)\gamma}{(14)(24)} \\ 2(c-ab)(c+1) &= -\rho \frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{(13)(24)}, & 2(c-ab)(c-1) &= -\rho \frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{(14)(23)} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

infine:

$$K = a^2 + b^2 + c^2 - 2abc - 1 = -\frac{1}{2}\rho N^2$$

$$\text{essendo in tutte } \rho = -\frac{8}{(12)^2(34)^2}.$$

Se ora si moltiplica per ρ la equazione biquadratica superiore (5), e si pone:
 $w = (13)\sqrt{(15)}p_{13}; \quad x = (14)\sqrt{(15)}p_{14}; \quad y = (23)\sqrt{(25)}p_{23}; \quad z = (24)\sqrt{(25)}p_{24}$
 la equazione stessa prenderà la forma:

$$\begin{aligned} 0 = & (a+1)(b+1)(c+1)w^4 + (a+1)(b-1)(c-1)x^4 + (a-1)(b+1)(c-1)y^4 + \\ & + (a-1)(b-1)(c+1)z^4 + \\ & + 2(a-bc)[(a+1)w^2x^2 + (a-1)y^2z^2] + 2(b-ca)[(b+1)w^2y^2 + (b-1)z^2x^2] + \\ & + 2(c-ab)[(c+1)w^2z^2 + (c-1)x^2y^2] - 4Kwxyz. \end{aligned}$$

La relazione superiore si può ancora semplificare facendo uso di una trasformazione già indicata da BORCHARDT nella sua Memoria sopra citata. Ponendo infatti:

$$s := w + x + y + z$$

$$p := w + x - y - z$$

$$q := w - x + y - z$$

$$r := w - x - y + z$$

la relazione stessa si trasforma nella:

$$0 = \varphi^2 - 16Kspqr$$

essendo:

$$\varphi = s^2 + p^2 + q^2 + r^2 + 2a(sp + qr) + 2b(sq + rp) + 2c(sr + pq).$$

Quest'ultima forma della relazione di GÖPEL acquista importanza dal fatto che essa coincide colla equazione della superficie di quarto ordine con sedici punti nodali riferita ad un dato sistema di quattro suoi piani tangenziali singolari, superficie denominata di KUMMER in onore dell'illustre geometra di Berlino che pel primo fece conoscere le sue proprietà.

Ora le s, p, q, r essendo quattro funzioni lineari delle coordinate di quella superficie, si avrà che le coordinate della superficie di KUMMER si possono esprimere in funzione lineare di quattro funzioni iperellittiche di secondo ordine ad indice doppio $p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}$.

Per determinare i valori delle coordinate dei sedici punti singolari si osservi:

1° Che indicando con w_0, x_0, y_0, z_0 le espressioni:

$$w_0 = \sqrt{(a-1)(b-1)(c-1)} \quad y_0 = \sqrt{(a+1)(b-1)(c+1)}$$

$$x_0 = \sqrt{(a-1)(b+1)(c+1)} \quad z_0 = \sqrt{(a+1)(b+1)(c-1)}$$

e con Φ il secondo membro dell'equazione superiore, si hanno le:

$$\frac{d\Phi}{dw} = 0 \quad \frac{d\Phi}{dx} = 0 \quad \frac{d\Phi}{dy} = 0 \quad \frac{d\Phi}{dz} = 0$$

per:

$$w = w_0 \quad x = x_0 \quad y = y_0 \quad z = z_0$$

cioè il punto di coordinate w_0, x_0, y_0, z_0 è un punto nodale della superficie.

2° Che permutando nella equazione superiore le w, x, y, z nelle

$$\begin{array}{cccc} w & x & y & z \\ x\left(\frac{w_0}{x_0}\right)^{\frac{1}{4}}, & w\left(\frac{x_0}{w_0}\right)^{\frac{1}{4}}, & z\left(\frac{y_0}{z_0}\right)^{\frac{1}{4}}, & y\left(\frac{z_0}{y_0}\right)^{\frac{1}{4}} \\ y\left(\frac{w_0}{y_0}\right)^{\frac{1}{4}}, & z\left(\frac{x_0}{z_0}\right)^{\frac{1}{4}}, & w\left(\frac{y_0}{w_0}\right)^{\frac{1}{4}}, & x\left(\frac{z_0}{x_0}\right)^{\frac{1}{4}} \\ z\left(\frac{w_0}{z_0}\right)^{\frac{1}{4}}, & y\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{\frac{1}{4}}, & x\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{\frac{1}{4}}, & w\left(\frac{z_0}{w_0}\right)^{\frac{1}{4}} \end{array}$$

la equazione stessa rimane inalterata. Come pure rimane inalterata se una coppia qualsivoglia di quelle coordinate si assume con segno negativo.

Si hanno così i valori delle coordinate di quattro punti singolari nelle espressioni:

$$\begin{array}{cccc} w_0, & x_0, & y_0, & z_0 \\ (x_0^3 w_0)^{\frac{1}{4}}, & (w_0^3 x_0)^{\frac{1}{4}}, & (z_0^3 y_0)^{\frac{1}{4}}, & (y_0^3 z_0)^{\frac{1}{4}} \\ (y_0^3 w_0)^{\frac{1}{4}}, & (z_0^3 x_0)^{\frac{1}{4}}, & (w_0^3 y_0)^{\frac{1}{4}}, & (x_0^3 z_0)^{\frac{1}{4}} \\ (z_0^3 w_0)^{\frac{1}{4}}, & (y_0^3 z_0)^{\frac{1}{4}}, & (x_0^3 y_0)^{\frac{1}{4}}, & (w_0^3 z_0)^{\frac{1}{4}} \end{array}$$

e quelli delle coordinate degli altri dodici punti saranno $w_0, x_0, -y_0, -z_0; w_0, -x_0, y_0, -z_0; w_0, -x_0, -y_0, z_0$ e così di seguito.

3.° La relazione (5) si può anche subito esprimere sotto la forma assegnata da GÖPEL ponendo:

$$\begin{array}{ll} \sqrt{(13)(15)} \sqrt[4]{\alpha\beta} \cdot p_{13} = W & \sqrt{(23)(25)} \sqrt[4]{\alpha\delta} \cdot p_{23} = Y \\ \sqrt{(14)(15)} \sqrt[4]{\beta\gamma} \cdot p_{14} = X & \sqrt{(24)(25)} \sqrt[4]{\gamma\delta} \cdot p_{24} = Z \end{array}$$

giacchè si ha:

$$0 = W^4 + X^4 + Y^4 + Z^4 + 2C(W^2X^2 + Y^2Z^2) - 2F(W^2Y^2 + Z^2X^2) - \\ - 2E(W^2Z^2 + X^2Y^2) - 4DWXYZ$$

essendo:

$$C = -\frac{1}{2} \frac{\alpha + \gamma}{\sqrt{\alpha\gamma}}, \quad F = \frac{1}{2} \frac{\beta + \delta}{\sqrt{\beta\delta}}, \quad E = \frac{1}{2} \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\sqrt{\alpha\gamma\beta\delta}} \\ D = -\frac{1}{2} N^2 \frac{\sqrt{(13)(14)(23)(24)}}{\sqrt{\alpha\beta\gamma\delta}}$$

dalle quali per le relazioni (6) (7) si ottengono anche le seguenti:

$$C = -\frac{bc-a}{\sqrt{(b^2-1)(c^2-1)}}, \quad F = \frac{ca-b}{\sqrt{(c^2-1)(a^2-1)}}, \quad E = \frac{ab-c}{\sqrt{(a^2-1)(b^2-1)}} \\ D = \frac{K}{\sqrt{(a^2-1)(b^2-1)(c^2-1)}}$$

e quindi:

$$D^2 = E^2 + F^2 + C^2 - 2EFC - 1$$

come si ha nella Memoria di GÖPEL (pag. 304). Queste relazioni sono importanti mentre da esse si deducono pei valori dei parametri a, b, c della superficie del quarto grado le seguenti espressioni:

$$a = \frac{C - FE}{\sqrt{(E^2-1)(F^2-1)}}, \quad b = \frac{F - EC}{\sqrt{(E^2-1)(C^2-1)}}, \quad c = \frac{E - CF}{\sqrt{(C^2-1)(F^2-1)}}$$

e da queste:

$$K = \frac{D^3}{(E^2-1)(F^2-1)(C^2-1)}.$$

4.° Si è dimostrato al § 1° come dalle relazioni (1) si possano dedurre le (2) (3), le quali presentano il tipo di relazioni quadratiche omogenee fra $2n+1$ funzioni p . Ora dalle stesse equazioni (1) e da altre tre, le quali completano le relazioni di quella specie, si può dedurre un numero $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ di relazioni fra $(n+1)^2$ funzioni p che per la loro forma si prestano a varie applicazioni. Notiamo dapprima come la seconda delle relazioni (1) si possa esprimere nel modo seguente:

$$\frac{l_\nu S(a_\mu)}{K'(a_\nu)} (a_\nu) \left[\sum_{r=1}^{r_\nu} \frac{l_r p^2_{r\nu}}{(r_\nu) S'(a_r)} + \frac{l_\nu}{S(a_\nu)} p^2_{\nu\mu} \right] = 1$$

ed aggiungiamo ad essa le altre tre:

$$\begin{aligned}\sum_{r_1}^{r_n} \frac{l_r p_r^2}{(r\nu) S'(a_r)} + \frac{l_\nu p_\nu^2}{S(a_\nu)} &= 1 \\ \sum_{r_1}^{r_n} \frac{l_r p_r p_{r,\mu}}{(r\nu) S'(a_r)} + \frac{l_\nu}{S(a_\nu)} p_\nu p_{\nu,\mu} &= 0 \\ \sum_{r_1}^{r_n} \frac{l_r p_r p_{r,\mu} p_{r,\lambda}}{(r\nu) S'(a_r)} + \frac{l_\nu}{S(a_\nu)} p_{\nu,\mu} p_{\nu,\lambda} &= 0\end{aligned}$$

nelle quali $(r\nu) = a_r - a_\nu$ e le μ, ν, λ sono numeri della serie 1, 2, 3, ... $(2n+1)$ differenti fra loro e differenti da $r_1, r_2, \dots, r_n$.

Pongasi:

$$\begin{aligned}\alpha_r &= \sqrt{\frac{l_r}{(r\nu) S'(a_r)}} \cdot p_r; & \alpha_\nu &= \sqrt{\frac{l_\nu}{S(a_\nu)}} \cdot p_\nu \\ \alpha_{r\mu} &= \sqrt{\left[\frac{(r\nu)}{(r\nu)} \frac{l_r l_\mu S(a_\mu)}{R'(a_\mu) S'(a_r)} \right]} p_{r\mu}; & \alpha_{\nu\mu} &= \sqrt{\left[(\mu\nu) \frac{l_\mu l_\nu S(a_\mu)}{R'(a_\mu) S(a_\nu)} \right]} p_{\nu\mu}\end{aligned}$$

le prime due relazioni superiori potranno scriversi come segue:

$$\sum_{r_1}^{r_n} \alpha_r^2 + \alpha_\nu^2 = 1, \quad \sum_{r_1}^{r_n} \alpha_{r\mu}^2 + \alpha_{\nu\mu}^2 = 1 \quad (8)$$

ed osservando essere:

$$\begin{aligned}\alpha_r \alpha_{r\mu} &= H \frac{l_r}{(r\nu) S'(a_r)} p_r p_{r\mu}; & \alpha_\nu \alpha_{\nu\mu} &= H \frac{l_\nu}{S(a_\nu)} p_\nu p_{\nu\mu} \\ \alpha_{r\mu} \alpha_{r\lambda} &= K \frac{l_r}{(r\nu) S'(a_r)} p_{r\mu} p_{r\lambda}; & \alpha_{\nu\mu} \alpha_{\nu\lambda} &= K \frac{l_\nu}{S(a_\nu)} p_{\nu\mu} p_{\nu\lambda}\end{aligned}$$

nelle quali

$$H = \sqrt{\left[(\mu\nu) \frac{l_\mu S(a_\mu)}{R'(a_\mu)} \right]}, \quad K = \sqrt{\left[(\mu\nu)(\lambda\nu) \frac{l_\mu l_\lambda S(a_\mu) S(a_\lambda)}{R'(a_\mu) R'(a_\lambda)} \right]}$$

le altre due prenderanno la forma:

$$\left. \begin{aligned}\sum_{r_1}^{r_n} \alpha_r \alpha_{r\mu} + \alpha_\nu \alpha_{\nu\mu} &= 0 \\ \sum_{r_1}^{r_n} \alpha_{r\mu} \alpha_{r\lambda} + \alpha_{\nu\mu} \alpha_{\nu\lambda} &= 0.\end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Se ora si suppone che essendo ν un numero della serie 1, 2, 3, ... $(2n+1)$ differente da $r_1, r_2, \dots, r_n$, i numeri μ, λ differenti fra loro possano assumere i valori degli altri n numeri di quella serie, si otterranno $n+1$ equazioni della

forma (8) ed $\frac{n(n+1)}{2}$ equazioni della forma (9), ossia in tutto $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ relazioni fra $(n+1)^2$ funzioni p .

Sia $n=2$ e consideriamo le nove funzioni seguenti:

$$\begin{array}{ccc} p_1 & p_2 & p_4 \\ p_{13} & p_{23} & p_{43} \\ p_{15} & p_{25} & p_{45} \end{array}$$

posto:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \sqrt{A \frac{(13)(15)}{(21)}} \cdot p_1; & \beta_1 &= \sqrt{A \frac{(23)(25)}{(12)}} \cdot p_2; & \gamma_1 &= p_4 \\ \alpha_2 &= (31) \sqrt{\frac{(23)(15)}{(21)(35)}} \cdot p_{13}; & \beta_2 &= (23) \sqrt{\frac{(13)(25)}{(12)(35)}} \cdot p_{23}; & \gamma_2 &= \sqrt{\frac{(13)(23)}{A(35)}} \cdot p_{43} \\ \alpha_3 &= (15) \sqrt{\frac{(13)(25)}{(12)(35)}} \cdot p_{15}; & \beta_3 &= (52) \sqrt{\frac{(23)(15)}{(21)(35)}} \cdot p_{25}; & \gamma_3 &= \sqrt{\frac{(15)(25)}{A(53)}} \cdot p_{45} \end{aligned}$$

dalle (8) (9) si ottengono le sei relazioni:

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 &= 1 & \alpha_2 \alpha_3 + \beta_2 \beta_3 + \gamma_2 \gamma_3 &= 0 \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 &= 1 & \alpha_3 \alpha_1 + \beta_3 \beta_1 + \gamma_3 \gamma_1 &= 0 \\ \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 &= 1 & \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 &= 0 \end{aligned}$$

per le quali:

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1 \quad \beta_1 \gamma_1 + \beta_2 \gamma_2 + \beta_3 \gamma_3 = 0$$

e le analoghe che corrispondono alle altre due relazioni (1), e le:

$$\alpha_1 = \beta_2 \gamma_3 - \beta_3 \gamma_2$$

e simili, ossia le:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \frac{(23)(25)}{A(53)} (p_{23} p_{45} - p_{25} p_{43}), & p_2 &= \frac{(13)(15)}{A(35)} (p_{43} p_{15} - p_{45} p_{13}), \\ p_4 &= \frac{(13)(23)(15)(25)}{(12)(35)} (p_{13} p_{25} - p_{15} p_{23}), \\ p_{13} &= \frac{(25)}{(31)} (p_4 p_{25} - p_2 p_{45}), & p_{23} &= \frac{(15)}{(23)} (p_1 p_{45} - p_4 p_{15}), \\ p_{43} &= A \frac{(15)(25)}{(12)} (p_2 p_{15} - p_1 p_{25}), \\ p_{15} &= \frac{(23)}{(15)} (p_2 p_{43} - p_4 p_{23}), & p_{25} &= \frac{(13)}{(53)} (p_4 p_{13} - p_1 p_{43}), \\ p_{45} &= A \frac{(13)(23)}{(21)} (p_1 p_{23} - p_2 p_{13}) \end{aligned} \right\} (10)$$

per le quali:

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_4 \\ p_{13} & p_{23} & p_{43} \\ p_{15} & p_{25} & p_{45} \end{vmatrix} = \frac{(12)(35)}{(13)(23)(15)(25)}.$$

5.° È noto per le sopra indicate ricerche del sig. WEIERSTRASS che supponendo μ, ν due numeri differenti da r si hanno nel caso generale le equazioni differenziali:

$$\frac{dp_\mu}{du_r} = \frac{Q(a_r)}{P'(a_r)} p_r p_{r\mu}; \quad \frac{dp_{\mu\nu}}{du_r} = \frac{Q(a_r)}{P'(a_r)} p_{r\mu} p_{r\nu}$$

$$\frac{dp_{\mu r}}{du_r} = \frac{p_{\mu r}}{p_r} \frac{dp_r}{du_r} - \frac{1}{(r\mu)} \frac{p_\mu}{p_r}.$$

Pel caso in cui $n=2$ le relazioni (10) danno tosto:

$$\frac{dp_1}{du_1} = \frac{(13)(14)}{(12)(34)} [(24)p_4 p_{14} - (23)p_3 p_{13}]$$

$$\frac{dp_2}{du_2} = \frac{(23)(24)}{(12)(34)} [(13)p_3 p_{23} - (14)p_4 p_{24}]$$

e le altre che si deducono da esse permutando i numeri 3, 4, 5.

Si ottengono così le seguenti equazioni differenziali:

$$p_3 p_{35} = (24) \left[p_{13} \frac{dp_{24}}{du_1} - p_{24} \frac{dp_{13}}{du_1} \right] = (14) \left[p_{23} \frac{dp_{14}}{du_2} - p_{14} \frac{dp_{23}}{du_2} \right]$$

$$p_4 p_{45} = (23) \left[p_{14} \frac{dp_{23}}{du_1} - p_{23} \frac{dp_{14}}{du_1} \right] = (13) \left[p_{24} \frac{dp_{13}}{du_2} - p_{13} \frac{dp_{24}}{du_2} \right]$$

dalle quali se si introducono le denominazioni del § 3° e si pone:

$$p = \frac{Z}{W}, \quad q = \frac{Y}{X}, \quad s = \frac{W}{X}$$

si hanno le:

$$\frac{dp}{du_1} = \frac{1}{(13)} \sqrt[4]{\frac{(25)(35)}{(15)(45)}} \cdot \frac{p_3 p_{35}}{p_{13}^2}, \quad \frac{dp}{du_2} = -\frac{(24)}{(13)^2} \sqrt[4]{\frac{(25)(35)}{(15)(45)}} \cdot \frac{p_4 p_{45}}{p_{13}^2}$$

$$\frac{dq}{du_1} = \frac{1}{(14)} \sqrt[4]{\frac{(25)(45)}{(15)(35)}} \cdot \frac{p_4 p_{45}}{p_{14}^2}, \quad \frac{dq}{du_2} = -\frac{(23)}{(14)^2} \sqrt[4]{\frac{(25)(45)}{(15)(35)}} \cdot \frac{p_3 p_{35}}{p_{14}^2}$$

e da queste:

$$\left. \begin{aligned} s \frac{dp}{du_1} + \frac{1}{s} \frac{dq}{du_4} &= m \frac{\sqrt{(13)(14)}}{WX} [\sqrt{(13)(23)} p_3 p_{35} + \sqrt{(14)(24)} p_4 p_{45}] \\ s \frac{dp}{du_2} - \frac{1}{s} \frac{dq}{du_3} &= m \frac{\sqrt{(23)(24)}}{W\Lambda} [\sqrt{(13)(23)} p_3 p_{35} - \sqrt{(14)(24)} p_4 p_{45}] \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

essendo

$$m = \sqrt{(15)(25)} \cdot \sqrt{(15)(25)(35)(45)}.$$

Ora i quadrati di p_{35} , p_{45} , come il loro prodotto, si possono esprimere in funzione delle p_{13} , p_{14} , p_{23} , p_{24} nel modo seguente:

$$N(12)p_{35}^2 = A[(13)^2(14)(45)p_{13}^2 + (14)^2(24)(15)p_{14}^2 - (23)^2(24)(45)p_{23}^2 - (24)^2(14)(25)p_{24}^2]$$

$$N(12)p_{45}^2 = A[(13)^2(23)(15)p_{13}^2 + (14)^2(13)(35)p_{14}^2 - (23)^2(13)(25)p_{23}^2 - (24)^2(23)(35)p_{24}^2]$$

$$(12)p_{35}p_{45} = A[(13)(14)p_{13}p_{14} - (23)(24)p_{23}p_{24}]$$

e siccome la stessa proprietà ha luogo, come si è visto al § 2° per p_3^2 , p_4^2 , p_3p_4 ; si giunge facilmente alle:

$$\frac{(12)m^2}{W^2 X^2} [\sqrt{(13)(23)} p_3 p_{35} + \sqrt{(14)(24)} p_4 p_{45}]^2 = A \varphi^2$$

$$\frac{(12)m^2}{W^2 X^2} [\sqrt{(13)(23)} p_3 p_{35} - \sqrt{(14)(24)} p_4 p_{45}]^2 = A \psi^2$$

essendo:

$$\sqrt{(E^2-1)(F^2-1)} \cdot \varphi^2 = (CF - E + D)(1 + p^2 q^2) - (F^2 - 1)(p^2 + q^2) + 2(C - EF - DF)pq$$

$$\sqrt{(E^2-1)(F^2-1)} \cdot \psi^2 = (CF - E - D)(1 + p^2 q^2) - (F^2 - 1)(p^2 + q^2) - 2(C - EF + DF)pq$$

nelle quali le C , E , F , D hanno gli stessi valori che al § 3°.

Dalle relazioni (11) si dedurranno così le seguenti:

$$\frac{sdp + \frac{1}{s}dq}{\varphi} = \sqrt{\frac{A(13)(14)}{(12)}} \cdot du_1; \quad \frac{sdp - \frac{1}{s}dq}{\psi} = \sqrt{\frac{A(23)(24)}{(12)}} \cdot du_2$$

vale a dire le equazioni differenziali sotto la forma data ad esse da GÖPEL.

Marzo 1881.