Ueber eine neue Eigenschaft der *Laplace'schen* $Y^{(n)}$ und ihre Anwendung zur analytischen Darstellung derjenigen Phänomene, welche Functionen der geographischen Länge und Breite sind.

Von Herrn Professor *Neumann* in Königsberg.

Mit großem Erfolg hat man seit längerer Zeit sich der Reihen bedient, welche nach den Sinussen und Cosinussen der Vielfachen eines Bogens fortschreiten, um in den periodischen Phänomenen der Natur aus einer großen Anzahl Beobachtungen Resultate zu ziehen. Die sichern Ergebnisse der Meteorologie beruhen fast ganz auf diesem Gebrauch. Ein vorzüglicher Vortheil, welchen die Anwendung dieser Reihen darbietet, ist der Umstand, daß der Werth der Coefficienten, welche man bestimmt hat, unabhängig von ihrer Anzahl ist. In der Physik der Erde ist es ein wichtiger Gesichtspunct für die Phänomene, diese als Functionen ihres Ortes an der Erdoberfläche zu betrachten d. i. als Functionen der geographischen Länge und Breite. Es würde unzweckmäßig seyn, diese Functionen zweier Winkel darzustellen durch ähnliche Reihen, welche nemlich nach den Sinussen und Cosinussen der Vielfachen zweier Winkel fortschreiten. Auch hat niemand bis jetzt z. B. die Vertheilung der Temperatur auf der Erdoberfläche, oder die Vertheilung der Intensität des Erdmagnetismus, seiner Richtung etc. auf diese Weise in eine Formel zu bringen versucht; und mit Recht, denn in

diesen und andern Fällen haben die theoretischen Beschäftigungen mit diesen Phänomenen schon längst die wahre Form, in welcher sie dargestellt werden müssen, gefunden, nemlich durch Reihen, welche fortgehn nach den Functionen, welche *Laplace* in der Theorie der Attraction der Sphäroide mit $Y^{(n)}$ bezeichnet hat.

Das Verfahren, eine Function für welche man alle Werthe kennt, durch eine Reihe welche nach den $Y^{(n)}$ fortschreitet, darzustellen, ist bekannt. Die Absicht dieser Mittheilung ist das Verfahren anzugeben, welches man zu befolgen hat, wenn nur einzelne Werthe der darzustellenden Function gegeben sind. Es ist ganz analog demjenigen, welches man bei den Reihen der Sinusse und Cosinusse der Vielfachen eines Bogens anwendet, und bietet dieselben Vortheile, welche dort so geschätzt werden.

Bezeichnet man die geographische Länge mit ω , und die Breite mit φ und setzt: $\sin \varphi = \mu$, bezeichnet man ferner das Glied in $Y^{(n)}$, welches unabhängig von ω ist, mit $X^{(n)}$, so ist der allgemeine Ausdruck für $Y^{(n)}$ folgender:

$$(1) \dots \left\{ \begin{aligned} Y^{(n)} &= B_0^{(n)} X^{(n)} + (A_1^{(n)} \sin \omega + B_1^{(n)} \cos \omega) \frac{(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}}}{n} \frac{dX^{(n)}}{d\mu} + (A_2^{(n)} \sin 2\omega + B_2^{(n)} \cos 2\omega) \frac{1-\mu^2}{n \cdot n-1} \frac{d^2 X^{(n)}}{d\mu^2} + \dots \\ &\dots (A_i^{(n)} \sin i\omega + B_i^{(n)} \cos i\omega) \frac{(1-\mu^2)^{\frac{i}{2}}}{n \cdot n-1 \cdot n-2 \dots n-(i-1)} \frac{d^i X^{(n)}}{d\mu^i} \end{aligned} \right.$$

und der Werth von $X^{(n)}$ ist dieser:

$$(2) \dots X^{(n)} = \mu^n - \frac{n \cdot n-1}{2 \cdot 2n-1} \mu^{n-2} + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{2 \cdot 4 \cdot 2n-1 \cdot 2n-3} \mu^{n-4} \dots$$

Die Größen $B_0^{(n)} B_1^{(n)} \dots A_1^{(n)} A_2^{(n)} \dots$ sind willkürliche, welche so bestimmt werden sollen, daß, wenn man durch $V(\omega, \mu)$ den beobachteten Werth einer Function an dem durch ω und μ bezeichneten Ort darstellt, der Gleichung

$$(3) \dots V(\omega, \mu) = Y^{(0)} + Y^{(1)} + Y^{(2)} + \dots + Y^{(p)}$$

für alle Beobachtungen genügt wird.

Die bekannten Eigenschaften der Functionen $Y^{(n)}$, welche ihnen eine so ausgebreitete Anwendung verschafft haben, und

auf welchen auch das Wesentliche der hier anzugebenden Methode beruht, sind diese:

$$\int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} Y^{(n)} Y^{(n')} d\omega d\mu = 0$$

so lange n und n' verschieden sind. Setzt man in dies Doppel-Integral die Werthe für die Y 's aus (1) führt die Integration nach ω aus, so ergibt sich sogleich

$$\int_{-1}^{+1} X^{(n)} X^{(n')} d\mu = 0 \dots \dots \dots (4)$$

oder allgemein

$$\int (1-\mu^2)^i \frac{d^i X^{(n)}}{d\mu^i} \frac{d^i X^{(n')}}{d\mu^i} d\mu = 0 \quad (5)$$

so lange n und n' verschieden sind. Wenn $n = n'$, so erhält man

$$(6) \dots \int_{-1}^{+1} (X^{(n)})^2 d\mu = \frac{4}{2n+1} \left(\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2n-1} \right)^2$$

und allgemein

$$(7) \left(\frac{1}{n \cdot n-1 \cdot n-2 \dots n-(i-1)} \right)^2 \int_{-1}^{+1} (1-\mu^2)^i \left(\frac{d^i X^{(n)}}{d\mu^i} \right)^2 d\mu = \frac{2}{2n+1} \left(\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2n-1} \right)^2 \left(\frac{n+1 \cdot n+2 \dots n+i}{n \cdot n-1 \cdot n-2 \dots n-(i-1)} \right)$$

Die gegebenen Werthe $V_{\omega, \mu}$ sollen auf der Erdoberfläche vertheilt seyn auf eine Anzahl gleich weit von einander abste-
hender Meridiane, und in jedem Meridian auf Breiten, für wel-
che μ die Werthe: $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \dots$ hat. Um die Gleichung (3)
bis $Y^{(p)}$ inclusive darzustellen, müssen die Meridiane von ein-
ander um den Winkel $\frac{1}{p}\pi = \alpha$ entfernt seyn, und in Bezie-

hung auf die Werthe von μ will ich vorläufig annehmen, daß
sie von μ_1 bis μ_{2p+1} gehen, so daß ihre Anzahl ist: $2p+1$,
ich werde später zeigen, daß bei einer schicklichen Wahl der
 μ 's die viel geringere Anzahl: $p+1$ schon hinreicht.

Das gegebene System Beobachtungen ist also fol-
gendes:

$$(8) \dots \begin{cases} V(0, \mu_1) & V(0, \mu_2) & V(0, \mu_3) & V(0, \mu_{2p+1}) \\ V(\alpha, \mu_1) & V(\alpha, \mu_2) & V(\alpha, \mu_3) & V(\alpha, \mu_{2p+1}) \\ V(2\alpha, \mu_1) & V(2\alpha, \mu_2) & V(2\alpha, \mu_3) & V(2\alpha, \mu_{2p+1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ V((2p-1)\alpha, \mu_1) & V((2p-1)\alpha, \mu_2) & V((2p-1)\alpha, \mu_3) & V((2p-1)\alpha, \mu_{2p+1}) \end{cases}$$

Die horizontalen Reihen enthalten die Beobachtungen in denselben Meridianen, die verticalen diejenigen in denselben Parallelkreisen.
Bringt man (3) in die Form.

$$V(\omega, \mu) = C_0 + C_1 \cos \omega + S_1 \sin \omega + C_2 \cos 2\omega + S_2 \sin 2\omega + \dots$$

so erhält man nach dem bekannten Verfahren aus jeder verticalen Reihe von (8) die numerischen Werthe von $C_0, C_1, S_1, S_2, \dots$
z. B. aus der ersten verticalen Reihe:

$$(9) \dots \begin{cases} C_0 = \frac{1}{2p} \sum_{m=0}^{m=2p-1} V(m\alpha, \mu_1) \\ C_1 = \frac{1}{p} \sum \cos \alpha V(m\alpha, \mu_1) & S_1 = \frac{1}{p} \sum \sin \alpha V(m\alpha, \mu_1) \\ \vdots \\ C_p = \frac{1}{p} \sum \cos p\alpha V(m\alpha, \mu_1) & S_p = \frac{1}{p} \sum \sin p\alpha V(m\alpha, \mu_1) \end{cases}$$

Man erhält, indem man für μ_1 nach und nach setzt,
 $\mu_2, \mu_3, \dots$ für jedes C und jedes S die Anzahl: $2p+1$
Werthe, die ich in der Bezeichnung nicht weiter unter-

scheiden will, um die Zeichen nicht zu sehr zu häufen.
Die analytischen Werthe dieser $C_0, C_1, C_2, \dots, S_1, S_2, \dots$ sind
folgende:

$$(10) \dots \begin{cases} C_0 = B_0^{(0)} X^{(0)} + B_0^{(1)} X^{(1)} + B_0^{(2)} X^{(2)} + B_0^{(3)} X^{(3)} + B_0^{(4)} X^{(4)} + \dots + B_0^{(p)} X^{(p)} \\ C_1 = (1-\mu^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d}{d\mu} \left\{ B_1^{(1)} X^{(1)} + \frac{B_1^{(2)} X^{(2)}}{2} + \frac{B_1^{(3)} X^{(3)}}{3} + \frac{B_1^{(4)} X^{(4)}}{4} + \dots + \frac{B_1^{(p)} X^{(p)}}{p} \right\} \\ C_2 = (1-\mu^2)^{\frac{d^2}{d\mu^2}} \left\{ \frac{B_2^{(2)} X^{(2)}}{1 \cdot 2} + \frac{B_2^{(3)} X^{(3)}}{2 \cdot 3} + \frac{B_2^{(4)} X^{(4)}}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{B_2^{(p)} X^{(p)}}{p-1 \cdot p} \right\} \\ C_3 = (1-\mu^2)^{\frac{d^3}{d\mu^3}} \left\{ \frac{B_3^{(3)} X^{(3)}}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{B_3^{(4)} X^{(4)}}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{B_3^{(p)} X^{(p)}}{p-2 \cdot p-1 \cdot p} \right\} \\ C_4 = (1-\mu^2)^{\frac{d^4}{d\mu^4}} \left\{ \frac{B_4^{(4)} X^{(4)}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{B_4^{(p)} X^{(p)}}{p-3 \cdot p-2 \cdot p-1 \cdot p} \right\} \\ \vdots \\ C_p = (1-\mu^2)^{\frac{d^p}{d\mu^p}} \left\{ \frac{B_p^{(p)} X^{(p)}}{1 \cdot 2 \dots p} \right\} \end{cases}$$

Die Werthe von $S_1, S_2 \dots$ erhält man aus denen für $C_1, C_2 \dots$ wenn überall statt B gesetzt wird: A . Je nachdem $C_0, C_1, C_2 \dots S_1, S_2, \dots$ aus der ersten, zweiten etc. verticalen Reihe der Beobachtungen (8) bestimmt worden ist, hat man auf der rechten Seite dieser Gleichungen (10) zu setzen: μ_1, μ_2 etc., so daß die Anzahl von jeder dieser Gleichungen $2p+1$ ist, und die Anzahl sämtlicher Gleichungen ist $2p(2p+1)$.

Es handelt sich nun darum, aus diesem System von Gleichungen die Coefficienten $B_0^{(0)}, B_0^{(1)}, B_0^{(2)}, \dots B_1^{(1)}, B_1^{(2)}, \dots B_2^{(2)}, \dots A_1^{(1)}, A_1^{(2)}, A_2^{(2)}, \dots$ zu bestimmen. Dies geschieht auf folgende sehr einfache Weise. Es sei $a_1, a_2, a_3 \dots a_{2p+1}$ ein System willkürlicher Größen, und es werde die Summe $a_1 \mu_1^n + a_2 \mu_2^n + a_3 \mu_3^n + \dots + a_{2p+1} \mu_{2p+1}^n$ bezeichnet mit $\Sigma a \mu^n$. Man genüge nun durch die a 's und μ 's folgendem System von $2(p+1)$ Gleichungen:

$$(11) \dots \dots \dots \begin{cases} \Sigma a & = 1 \\ \Sigma a \mu & = 0 \\ \Sigma a \mu^2 & = \frac{1}{3} \\ \Sigma a \mu^3 & = 0 \\ \Sigma a \mu^4 & = \frac{1}{5} \\ \vdots & \vdots \\ \Sigma a \mu^{2p} & = \frac{1}{2p+1} \\ \Sigma a \mu^{2p+1} & = 0 \end{cases}$$

In diesem Systeme, welches viel mehr Größen, über welche man verfügen kann, enthält, als Gleichungen, können die μ 's bis auf eins willkürlich gewählt, und die Bestimmung der a 's von ihnen abhängig gemacht werden. Ich werde hernach zeigen, welche Werthe der μ 's die vortheilhaftesten sind.

In Bezug auf (11) gelten nun folgende Sätze:

$$(12) \dots \dots \dots \Sigma a X^{(n)} X^{(n')} = 0$$

Diese Summe genommen in Beziehung auf das ganze System μ 's und respectiven a 's, durch welchen den Gleichungen (11) genügt ist, so lange n und n' verschieden sind und $n+n'$ nicht größer, als $2p+1$. Wenn $n = n'$, so hat man für diese Summe

$$(13) \dots \dots \Sigma a (X^n)^2 = \frac{2}{2n+1} \left(\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2n-1} \right)^2$$

Eben so hat man, die Summe in demselben Sinne genommen, allgemein:

$$(14) \dots \dots \Sigma a (1-\mu^2)^i \frac{d^i X^{(n)}}{d\mu^i} \frac{d^i X^{(n')}}{d\mu^i} = 0$$

so lange n und n' verschieden und ihre Summe kleiner als $2p+1$ ist. Wenn $n = n'$, so ist

$$\left\{ \frac{1}{(n \cdot n-1 \dots n-(i-1))} \Sigma a (1-\mu^2)^i \left(\frac{d^i X^{(n)}}{d\mu^i} \right)^2 \right\} = \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2n-1} \right)^2 \left(\frac{n+1 \cdot n+2 \dots n+i}{n \cdot n-1 \dots n-(i-1)} \right) \dots (15)$$

Den Beweis für diese Sätze (12), (13), (14), (15) zieht man unmittelbar aus denen in (4), (5), (6), (7). In der That substituieren wir in

$$\int_{-1}^{+1} X^{(n)} X^{(n')} d\mu$$

für $X^{(n)}$ und $X^{(n')}$ ihre Werthe aus (2), führen dann die Multiplication aus, so erhalten wir eine Reihe von der Form:

$$X^{(n)} X^{(n')} = \mu^{n+n'} - \alpha \mu^{n+n'-2} + \beta \mu^{n+n'-4} \dots (16)$$

Integriren wir diese Gleichungen nach μ zwischen -1 und $+1$, so verschwindet das Integral von selbst, wenn $n+n'$ eine ungrade Zahl ist; wenn dies aber eine grade Zahl ist, erhalten wir

$$\int_{-1}^{+1} X^{(n)} X^{(n')} d\mu = 2 \left(\frac{1}{n+n'+1} - \frac{\alpha}{n+n'-1} + \frac{\beta}{n+n'-3} - \dots \right)$$

Diese Gröfse ist nach (4) = 0. Nehmen wir jetzt die Summe

$$\Sigma a X^{(n)} X^{(n')} = \Sigma a (\mu^{n+n'} - \alpha \mu^{n+n'-2} + \beta \mu^{n+n'-4} - \dots)$$

in Beziehung auf das ganze System μ 's und respectiven a 's, durch welches den Gleichungen (11) Genüge geschieht, unter der Voraussetzung, daß $n+n' < 2p+1$. Substituiert man auf der rechten Seite für $\Sigma a \mu^{n+n'}$, $\Sigma a \mu^{n+n'-2}$, etc. ihre Werthe aus (11), so ergibt sich, daß diese Summe von selbst verschwindet, wenn $n+n'$ ungrade ist, und wenn $n+n'$ grade ist, wird sie

$$\Sigma a X^{(n)} X^{(n')} = \left(\frac{1}{n+n'+1} - \frac{\alpha}{n+n'-1} + \frac{\beta}{n+n'-3} + \dots \right)$$

Diese Gröfse ist aber, wie wir eben gesehen haben = 0.

Ganz auf dieselbe Weise beweist sich (14) aus (5) und man übersieht sehr leicht, daß die Summen (13) und (15) die halben Werthe von den entsprechenden Integralen (6) u. (7) haben.

Mittelst dieser Sätze (12), (13), (14), (15) bestimmt man die Coefficienten aus den Gleichungen (10) und denen ihnen zugehörigen ganz auf dieselbe Weise, wie bei den Sinus- und Cosinus-Reihen. Man findet

$$B_0^{(n)} = \frac{2n+1}{2} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2n-1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \right)^2 \sum_{\mu=\mu_1}^{\mu=\mu_{2p+1}} a C_0 X^{(n)}$$

oder wenn für C_0 sein Werth aus (9) gesetzt wird:

$$(17a) \dots B_0^{(n)} = \left(\frac{2n+1}{4p}\right) \left(\frac{1.3.5 \dots 2n-1}{1.2.3 \dots n}\right)^2 \sum_{\mu=\mu}^{\mu=2p+1} \sum_{m=0}^{m=2p-1} a V(m\alpha, \mu) X^{(n)}$$

und allgemein

$$B_i^{(n)} = (2n+1) \left(\frac{1.3.5 \dots 2n-1}{1.2.3 \dots n}\right)^2 \left(\frac{n.n-1.n-2 \dots n-(i-1)}{n+1.n+2 \dots n+i}\right) \sum_{\mu} \frac{a C_i (1-\mu^2)^{\frac{i}{2}}}{n.n-1 \dots n-(i-1)} \frac{d^i X^{(n)}}{d\mu^i}$$

oder, wenn für C_i sein Werth aus (9) gesetzt wird:

$$(17b) \dots B_i^{(n)} = \frac{2n+1}{p} \left(\frac{1.3 \dots 2n-1}{1.2 \dots n}\right)^2 \left(\frac{n.n-1 \dots n-(i-1)}{n+1.n+2 \dots n+i}\right) \sum_{\mu=\mu}^{\mu=2p+1} \sum_{m=0}^{m=2p-1} \frac{a \cos i\alpha (1-\mu^2)^{\frac{i}{2}}}{n.n-1 \dots n-(i-1)} \frac{d^i X^{(n)}}{d\mu^i} V(m\alpha, \mu)$$

Die Werthe für $A_i^{(n)}$ haben dieselbe Form als $B_i^{(n)}$, man hat nur statt C_i zu setzen, S_i , oder statt $\cos i\alpha$ zu setzen: $\sin i\alpha$.

Ich habe bis jetzt angenommen, dafs auf jedem Meridian $2p+1$ willkürlich gelegene Beobachtungen gegeben sind, und dafs diese Meridiane den Aequator in $2p$ gleiche Theile theilen. Dadurch wurde zunächst der Zweck erreicht, dafs alle Constanten der $Y^{(n)}$ bis $Y^{(p)}$ inclusive vollständig bestimmt wurden. Indefs habe ich diese Annahme gemacht, mehr um die Vorstellung zu fixiren, als weil der Umstand, ob die $Y^{(n)}$ alle vollständig, oder ob einige nur theilweise bestimmt werden, nicht unerheblich wäre. Bei der Anwendung wird sich häufig der Fall finden, wo es sogar zweckmäfsig ist, von den höhern $Y^{(n)}$ nur das von ω unabhängige Glied, und die zunächst darauf folgenden zu bestimmen. Ich werde daher jetzt die Gleichungen (11) unter dem allgemeinen Gesichtspunct näher untersuchen, wo die Meridiane von q Parallelkreisen getheilt werden, q mag eine grade oder ungerade Zahl sein. Diese Gleichungen entwickelt geschrieben sind dann folgende:

$$(18) \dots \left\{ \begin{array}{l} a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_q = 1 \\ a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + a_3\mu_3 + \dots + a_q\mu_q = 0 \\ a_1\mu_1^2 + a_2\mu_2^2 + a_3\mu_3^2 + \dots + a_q\mu_q^2 = \frac{1}{3} \\ \vdots \\ a_1\mu_1^q + a_2\mu_2^q + a_3\mu_3^q + \dots + a_q\mu_q^q = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{q+1} \\ 0 \end{array} \right\} \end{array} \right.$$

wo in der letzten Gleichung rechter Hand, je nachdem q grade oder ungrade ist, zu setzen ist $\frac{1}{q+1}$ oder 0.

Die Anzahl dieser Gleichungen ist $q+1$, die Anzahl der zur Verfügung stehenden Gröfsen ist $2q$, die μ 's sind also nicht ganz willkürlich, sondern es existirt eine Relation zwischen ihnen. Man kann aber die letzte der Gleichungen in (18) ganz ohne erheblichen Nachtheil unberücksichtigt lassen, wodurch ihre Anzahl sich auf q reducirt, und die μ 's also ganz willkürlich gewählt werden können.

Genügt man den Gleichungen auf diese Weise, so bestimmt man in (10) die B_i , wenn q ungrade ist, bis $B^{\frac{q-1}{2}}$ inclusive, und wenn q grade ist bis $B^{(3q)}$ exclusive. Man

kann aber statt die μ 's willkürlich anzunehmen, den Gleichungen in (18) noch $q-1$ Bedingungen hinzufügen, und man kann diese Bedingungen dahin richten, dafs in (10) alle B_i bis $B_i^{(q-1)}$ ihre Bestimmung erhalten, d. h. man kann durch eine zweckmäfsige Verfügung über die willkürlichen μ 's dieselbe Anzahl Glieder in (19) durch die halbe Anzahl Beobachtungen bestimmen. Diese Bedingungen werden dadurch ausgedrückt, dafs man den Gleichungen (18) noch $q-1$ ähnliche Gleichungen hinzufügt, d. h. sie fortsetzt bis zur $2q-1$ ten Potenz der μ 's. Sie verwandeln sich demnach in folgende:

$$\left. \begin{array}{l} a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_q = 1 \\ a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + a_3\mu_3 + \dots + a_q\mu_q = 0 \\ a_1\mu_1^2 + a_2\mu_2^2 + a_3\mu_3^2 + \dots + a_q\mu_q^2 = \frac{1}{3} \\ \vdots \\ a_1\mu_1^{2q-1} + a_2\mu_2^{2q-1} + a_3\mu_3^{2q-1} + \dots + a_q\mu_q^{2q-1} = 0 \end{array} \right\} \dots (19)$$

aus welchen die μ 's und a 's zu bestimmen sind. Die Theile dieser Gleichungen rechter Hand haben die Form der Glieder einer recurrenten Reihe, woraus erhellt, dafs die μ 's die Wurzeln einer algebraischen Gleichung vom q ten Grade sind. Es sei diese Gleichung:

$$X^q + \alpha_1 x^{q-1} + \alpha_2 x^{q-2} + \dots + \alpha_q = 0 \dots (20)$$

Unterscheiden wir vorläufig die zwei Fälle: erstens, wo q eine grade Zahl, zweitens wo q eine ungrade Zahl ist.

1. q sei eine grade Zahl. Die Coefficienten aller ungraden Potenzen von x in (20) werden $= 0$; die Coefficienten der graden Potenzen werden zufolge der bekannten Eigenschaften recurirender Reihen durch folgende Relationen bestimmt:

$$\left. \begin{array}{l} 0 = \frac{1}{q+1} + \frac{\alpha_2}{q-1} + \frac{\alpha_4}{q-3} + \dots + \frac{\alpha_q}{1} \\ 0 = \frac{1}{q+3} + \frac{\alpha_2}{q+1} + \frac{\alpha_4}{q-1} + \dots + \frac{\alpha_q}{3} \\ 0 = \frac{1}{q+5} + \frac{\alpha_2}{q+3} + \frac{\alpha_4}{q+1} + \dots + \frac{\alpha_q}{5} \\ \vdots \\ 0 = \frac{1}{2q-1} + \frac{\alpha_2}{2q-3} + \frac{\alpha_4}{2q-5} + \dots + \frac{\alpha_q}{q-1} \end{array} \right\} \dots (21)$$

2. q sei eine ungrade Zahl. Jetzt sind in (20) die Coefficienten aller graden Potenzen von $X = 0$, so daß in diesem Falle eine Wurzel von (20) immer $= 0$ ist. Für die Coefficienten der ungraden Potenzen: $\alpha_2, \alpha_4, \dots$ erhält man folgende Relationen:

$$(22) \dots \dots \begin{cases} 0 = \frac{1}{q+2} + \frac{\alpha_2}{q} + \frac{\alpha_4}{q-2} + \dots + \frac{\alpha_{q-1}}{3} \\ 0 = \frac{1}{q+4} + \frac{\alpha_2}{q+2} + \frac{\alpha_4}{q} + \dots + \frac{\alpha_{q-1}}{5} \\ 0 = \frac{1}{q+6} + \frac{\alpha_2}{q+4} + \frac{\alpha_4}{q+2} + \dots + \frac{\alpha_{q-1}}{7} \\ \vdots \\ 0 = \frac{1}{2q-1} + \frac{\alpha_2}{2q-3} + \frac{\alpha_4}{2q-5} + \dots + \frac{\alpha_{q-1}}{q} \end{cases}$$

Ich werde jetzt nachweisen, daß die Gleichung (20), deren Wurzeln die durch (19) bestimmt werdenden μ 's sind, immer, q mag grade oder ungrade seyn, identisch ist mit

$$X^{(q)} = 0$$

Aus dem Satz (4):

$$\int_{-1}^{+1} X^{(q)} X^{(q')} d\mu = 0$$

vorausgesetzt, daß q und q' verschieden sind, leitet man, indem für $X^{(q')}$ nach und nach $X^{(0)}, X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(q-1)}$ gesetzt wird, leicht ab:

$$(23) \dots \dots \dots \int_{-1}^{+1} X^{(q)} \mu^q d\mu = 0$$

wenn q' irgend eine ganze Zahl, die aber kleiner sein muß als q , bedeutet. Der Umstand, daß $X^{(q)}$ eine ganze algebraische Function von der Ordnung q ist, verbunden mit der Eigenschaft (23) bestimmt diese Function vollständig bis auf einen constanten Factor, auf den es hier nicht weiter ankommt. Es sei nun q eine grade Zahl, $X^{(q)}$ enthält alsdann nur grade Potenzen von μ und es sei

$$X^{(q)} = \mu^q + A_2 \mu^{q-2} + A_4 \mu^{q-4} + \dots + A_q$$

Multiplizieren wir diese Gleichung nach und nach mit $\mu^0, \mu^2, \mu^4, \dots, \mu^{q-2}$ und nehmen jedesmal das Integral zwischen $\mu = -1$ und $\mu = +1$, so erhalten wir zufolge (23):

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{q+1} + \frac{A_2}{q-1} + \frac{A_4}{q-3} + \dots + \frac{A_q}{1} \\ 0 &= \frac{1}{q+3} + \frac{A_2}{q+1} + \frac{A_4}{q-1} + \dots + \frac{A_q}{3} \\ &\vdots \\ 0 &= \frac{1}{2q-1} + \frac{A_2}{2q-3} + \frac{A_4}{2q-5} + \dots + \frac{A_q}{q-1} \end{aligned}$$

Dies ist aber dasselbe System Gleichungen, als in (21), woraus folgt, daß $X^{(q)} = 0$ identisch ist mit der Gleichung (20).

Wenn q ungerade ist, enthält $X^{(q)}$ nur ungrade Potenzen von μ ; es sei

$$X^{(q)} = \mu^q + A_2 \mu^{q-2} + \dots + A_{q-1} \mu$$

Multiplizieren wir diese Gleichung nach und nach mit $\mu^1, \mu^3, \dots, \mu^{q-2}$, integrieren jedesmal zwischen -1 und $+1$, so erhalten wir nach (23) ein System Gleichungen zwischen $A_2, A_4, \dots$ welches übereinstimmt mit (22), so daß also auch in diesem Falle die Identität zwischen (20) und $X^{(q)} = 0$ nachgewiesen ist.

Ich will jetzt noch bemerken, daß wenn eine Function: $F(x)$, für welche, zwischen $x = A$ und $x = B$, q einzelne Werthe gegeben sind, zwischen diesen Grenzen A und B dargestellt werden soll, man in vielen Fällen sich der Reihe

$$F(x) = B^{(0)} X^{(0)} + B^{(1)} X^{(1)} + B^{(2)} X^{(2)} + \dots \dots \dots (24)$$

als einer sehr zweckmäßigen Interpolations-Formel bedienen wird. Setzt man nemlich $x = \frac{1}{2}(A+B) - \frac{1}{2}(A-B)\mu$, so verwandelt sich $F(x)$ in eine Function von μ , welche zwischen $\mu = -1$ und $\mu = +1$ darzustellen ist. Wenn nun die x , in Beziehung auf welche die Werthe gegeben sind, so gewählt sind, daß die ihnen entsprechenden μ die Wurzeln der Gleichung $X^{(q)} = 0$ sind, so giebt die Anwendung der entwickelten Methode in (24) alle Coefficienten bis $B^{(q)}$ exclusive. Die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate zur Bestimmung der Coefficienten in (24) führt zu keinem andern Verfahren, und man ist also überhoben der so lästigen Auflösung der sonst durch diese Methode gegebenen Gleichungen. Wenn Fx eine algebraische ganze Function von der Ordnung $q-1$ ist, so wird sie durch (24) vollständig bestimmt; wenn dies nicht der Fall ist, muß man sich $F\left(\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}\mu\right)$ in eine Reihe

nach den steigenden Potenzen von μ entwickelt denken, die hinlänglich convergirt, um die q te und die höhern Potenzen vernachlässigen zu können. Diese vernachlässigten Glieder üben einen Einfluß auf die Werthe, welche man für $B^{(0)}, B^{(1)}, B^{(2)}, \dots$ erhält, aus, der aber um so geringer ist, je niedriger die Stellenzahl der B ist. So ist $B^{(0)}$ genau bis auf diejenigen Glieder, deren Exponent in der Entwicklung von $F\left(\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}\mu\right)$ gleich oder größer als $2q$ ist, und allgemein: $B^{(m)}$ ist genau bis auf die Glieder, deren Exponent gleich oder größer als $2q-m$ ist. Grade aus diesem Umstande, daß die ersten Glieder mit viel größerer Genauigkeit bestimmt werden, läßt sich oft nicht unerheblicher Nutzen ziehen. Wenn z. B. das Integral $\int F(x) dx$ zwischen A und B aus den gegebenen q Beobachtungen gefunden werden soll, so ist dieses $= (B-A) B^{(0)}$ und also genau bis auf die Glieder in der Entwicklung von $F\left(\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}\mu\right)$ von der

Ordnung $2q$, vorausgesetzt, daß die gegebenen Werthe von Fx auf Abscissen fallen, deren zugehörige μ 's die Wurzeln von $X^{(q)} = 0$ sind. Es seien diese gegebenen Werthe $M_1, M_2, \dots, M_q$ so ist also

$$\int_A^B Fx dx = (B-A) \{a_1 M_1 + a_2 M_2 + \dots + a_q M_q\}$$

wo die a 's aus (18) bestimmt werden müssen. Diese Integrationsmethode, die sich hier gleichsam von selbst darbietet, ist genau dieselbe, welche Herr Hofrath *Gauß* in seiner Abhandlung: *Methodus nova integralium etc.* (Comm. Soc. Reg. Gött. recent. Vol. III) entwickelt hat, ausgehend grade von der Forderung, dies Integral bis auf Glieder von der Ordnung $2q$

genau zu erhalten. In dieser Abhandlung findet man die Wurzeln der Gleichungen, von denen die μ 's abhängen, bis $X^{(7)} = 0$, und zugleich die Werthe der entsprechenden a 's. Diese a 's sind in der erwähnten Abhandlung mit $R, R' \dots$ bezeichnet, und unsere $\mu', \mu'' \dots$ erhält man aus den dortigen a, a', a'' , indem man diese a 's verdoppelt und von 1 abzieht.

Ueber vortheilhafte Anordnung der Rechnung bei Anwendung der entwickelten Methode, einige Hilfstafeln u. dgl. werde ich mich in einer spätern Mittheilung, wo ich diese Methode auf die Darstellung der Vertheilung des Erdmagnetismus anwenden werde, auslassen.

F. E. Neumann.

Beobachtung der Sternschnuppen vom 20^{sten} bis 26^{sten} April 1838 von Dr. *Benzenberg*.

1.

Herr *Arago* sagt im *Annuaire* vom Jahr 1836 S. 297, daß vom 20^{sten} bis zum 24^{sten} April 1803 und zwar wie er glaubte am 22^{sten} April von 1 bis 3 Uhr Morgens eine große Menge Sternschnuppen in Virginien und Massachusetts sei gesehen worden, und zwar seien sie so häufig gewesen, daß sie in allen Richtungen wie ein Raketenregen zu sehen gewesen wären.

Dieses war um so merkwürdiger, da man immer noch glaubte, daß im Frühjahr die Sternschnuppen sehr selten wären, etwa 3 auf die Stunde von einem Beobachter.

Ich hatte mir nun vorgenommen diese Nächte beobachten zu lassen, um zu sehen, ob die Sternschnuppen so häufig erschienen, wie Herr *Arago* es sagte. Ich wurde hierin noch bestärkt, als ich von Herrn Dr. *Olbers* einen Brief erhielt, der am 16. April geschrieben war. Er sagte unter anderm: „Daß nach einer Mittheilung von Herrn *Eric* in Newhafen (Amerika) an Herrn *Arago*, dieser behauptete, daß besonders im April die Sternschnuppen sehr häufig erschienen.“

Wenn im April in Amerika die Sternschnuppen häufig sind, so muß dieses in Europa dasselbe sein; denn da die Erde in jeder Secunde $4\frac{1}{3}$ Meilen auf ihrer Bahn fortgeht, so durchläuft sie in $6\frac{1}{2}$ Minuten ihren Durchmesser von 1719 Meilen.

Nach Herrn *Arago* wurden im Jahr 1803 eine außerordentliche Menge Sternschnuppen im April in Amerika gesehen, und zwar Morgens von 1 bis 3 Uhr. Da nun die Erde nach einem Jahr (365 Tagen 6 Stunden) wieder an demselben Orte ist, wo sie auch im vorigen Jahre war, so folgt hieraus, daß im Jahre 1804 um 7 Uhr Morgens diese Sternschnuppenerrscheinung statt

fand, die im vorigen Jahr um 1 Uhr stattgefunden hatte. Allein um 7 Uhr ist der Tag da, und man kann die Sternschnuppen der Sonne wegen nicht sehen, obschon sie dann eben so häufig sind, wie des Nachts.

Dasselbe war der Fall im Jahr 1806, wo um 1 Uhr Nachmittags diese Sternschnuppenerrscheinung statt finden mußte. Im Jahr 1807 war die Erde um 7 Uhr Abends in der Lage, daß man die Sternschnuppenerrscheinung wahrnehmen konnte, und da diese Erscheinung von Abends 7 bis 9 Uhr dauerte, so konnte man in Amerika diese Sternschnuppen sehen.

Da nun in Düsseldorf der Unterschied zwischen dem Meridian von Massachusetts ungefähr 80° oder 5,3 Stunden ist, so ist es hier Mitternacht, wenn es in Amerika Abends 7 Uhr ist. Man konnte also hier eben so gut um Mitternacht diese Sternschnuppen sehen, wie in Amerika um 7 Uhr. Es war kein Mondlicht, und daher konnte der Mond nicht störend einwirken. Nur ist es schade, daß Herr *Arago* in Hinsicht des Tages nicht sicher ist, wo diese Erscheinung in Amerika stattfand. Er glaubte der 22^{ste} April sei der Tag gewesen, allein den Tag mußte man nun durch die Beobachtungen finden, welche man vom 20^{sten} bis zum 24^{sten} April anstellte.

Jetzt folgen die Beobachtungen.

2.

Beobachtung vom $\frac{20}{21}$ April 1838 von Abends $8\frac{1}{4}$ Uhr bis Morgens $4\frac{1}{4}$ Uhr.

Der Himmel war an diesem Abende zum Theil dunkel. Bei den Beobachtungen ist die Tertienuhr nicht gebraucht worden, weil sie abgezeichnet wird.