SOPRA UNA TRASFORMAZIONE DELL' INTEGRALE ELITTICO.

N O T A

DEL SIG. PROF. FRANCESCO BRIOSCHI.

1° Nella cubica :

$$\theta^3 + \alpha\theta^2 + \beta\theta + \gamma$$

pongasi :

$$\theta = \frac{3\gamma}{12\rho - \beta}$$

si otterrà :

$$(1) \quad \theta^3 + \alpha\theta^2 + \beta\theta + \gamma = \frac{16\theta^2}{\gamma^2} (4\rho^3 - b\rho - c)$$

essendo :

$$b = \frac{1}{12} (\beta^2 - 3\alpha\gamma), \quad c = \frac{1}{432} (9\alpha\beta\gamma - 27\gamma^2 - 2\beta^3);$$

ma dalla relazione fra θ , e ρ deducesi

$$d\theta = -4 \frac{\theta^2}{\gamma} d\rho$$

quindi :

$$(2) \quad \frac{d\theta}{\sqrt{(\theta^4 + \alpha\theta^3 + \beta\theta^2 + \gamma\theta)}} = - \frac{d\rho}{\sqrt{(4\rho^3 - b\rho - c)}}.$$

Considero ora la forma biquadratica :

$$\varphi(x) = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)(x, 1)^4.$$

Sia x_1 una radice della equazione $\varphi(x) = 0$ sostituendo alla x nella funzione $\varphi(x)$ il binomio $x_1 + \frac{\theta}{a_0}$, e ponendo :

$$\alpha = \frac{1}{2 \cdot 3} \varphi'''(x_1), \quad \beta = \frac{1}{2} a_0 \varphi''(x_1), \quad \gamma = a_0^2 \varphi'(x_1)$$

si otterrà :

$$(3) \quad a_0^3 \varphi\left(x_1 + \frac{\theta}{a_0}\right) = \theta^4 + \alpha\theta^3 + \beta\theta^2 + \gamma\theta;$$

inoltre essendo $dx = \frac{1}{a_0} d\theta$ si avrà per la (2):

$$\frac{dx'_1}{\sqrt{a_0 \varphi(x)}} = - \frac{d\rho}{\sqrt{(4\rho^3 - b\rho - c)}}$$

ed :

$$x = x_1 + \frac{3a_0 \varphi'(x_1)}{12\rho - \frac{1}{2}a_0 \varphi''(x_1)}.$$

Ma pei valori di α, β, γ si hanno facilmente le :

$$b = a_0^2(a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2), \quad c = a_0^3(a_0 a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_0 a_3^2 - a_2^3)$$

perciò indicando con s, t gl'invarianti quadratico e cubico della forma $\varphi(x)$, e ponendo :

$$\rho = -a_0 \xi \sqrt{s}, \quad m = \frac{t}{s\sqrt{s}}$$

si giungerà alle :

$$(4) \quad \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}} = \frac{1}{\sqrt{s}} \frac{d\xi}{\sqrt{-4\xi^3 + \xi - m}}, \quad x = x_1 - \frac{6\varphi'(x_1)}{24\xi\sqrt{s} + \varphi''(x_1)}$$

Sia :

$$\psi(z) = (A_0, A_1, A_2, A_3, A_4)(z, 1)^4$$

una seconda forma biquadratica ; S, T gli invarianti della medesima, e z_1 una radice dell'equazione $\psi(z) = 0$; analogamente alle (4) si avranno le :

$$\frac{dz}{\sqrt{\psi(z)}} = \frac{2}{\sqrt{S}} \frac{d\xi}{\sqrt{-4\xi^3 + \xi - M}}, \quad z = z_1 - \frac{6\psi'(z_1)}{24\xi\sqrt{S} + \psi''(z_1)}$$

essendo $M = \frac{T}{SVS}$. Ne consegue che se le due forme biquadratiche hanno la proprietà espressa dall'equazione :

$$m = M$$

la relazione :

$$(5) \quad \frac{(x - x_1)\varphi''(x_1) + 6\varphi'(x_1)}{(x - x_1)\sqrt{s}} = \frac{(z - z_1)\psi''(z_1) + 6\psi'(z_1)}{(z - z_1)\sqrt{S}}$$

condurrà alla trasformazione :

$$\frac{dx\sqrt[4]{s}}{\sqrt{\varphi(x)}} = \frac{dz\sqrt[4]{S}}{\sqrt{\psi(z)}}.$$

2°. Sieno x_2, x_3, x_4 ; z_2, z_3, z_4 le altre radici delle equazioni $\varphi(x) = 0$, $\psi(z) = 0$, e si pongano :

$$\begin{aligned} X_1 &= (x_1 - x_2)(x_3 - x_4), & X_2 &= (x_1 - x_3)(x_4 - x_2), & X_3 &= (x_1 - x_4)(x_2 - x_3) \\ Z_1 &= (z_1 - z_2)(z_3 - z_4), & Z_2 &= (z_1 - z_3)(z_4 - z_2), & Z_3 &= (z_1 - z_4)(z_2 - z_3). \end{aligned}$$

È noto che gli invarianti s , t sono dati in funzioni delle radici dalle formole :

$$\frac{24}{a_0^2} s = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2, \quad \frac{432}{a_0^3} t = (X_2 - X_3)(X_3 - X_1)(X_1 - X_2)$$

ossia essendo identicamente $X_1 + X_2 + X_3 = 0$:

$$\frac{12}{a_0^2} s = X_2^2 + X_3^2 + X_2 X_3, \quad \frac{432}{a_0^3} t = (X_3 - X_2)(2X_2^2 + 2X_3^2 + 5X_2 X_3).$$

Ora ponendo :

$$X = \frac{i\sqrt{X_2} - \sqrt{X_3}}{i\sqrt{X_3} + \sqrt{X_2}}$$

si hanno le :

$$X^2 = \frac{(X_2 + X_3)^2}{(i\sqrt{X_3} + \sqrt{X_2})^2}, \quad 1 + X^2 = \frac{2(X_2 - X_3)}{(i\sqrt{X_3} + \sqrt{X_2})^2}$$

dalle quali :

$$(1 + X^2)^2 + 12X^2 = 16 \frac{X_2^2 + X_3^2 + X_2 X_3}{(i\sqrt{X_3} + \sqrt{X_2})^4},$$

$$(1 + X^2)^2 - 36X^2 = -16 \frac{2X_2^2 + 2X_3^2 + 5X_2 X_3}{(i\sqrt{X_3} + \sqrt{X_2})^4}$$

e sostituendo :

$$\frac{12}{a_0^2} s = \frac{1}{16} (1 + 14X^2 + X^4)(i\sqrt{X_3} + \sqrt{X_2})^4,$$

$$\frac{432}{a_0^3} t = \frac{1}{32} (1 + X^2)(1 - 34X^2 + X^4)(i\sqrt{X_3} + \sqrt{X_2})^6$$

ed in conseguenza :

$$m = \frac{(1 + X^2)(1 - 34X^2 + X^4)}{[3(1 + 14X^2 + X^4)]^{\frac{3}{2}}}$$

Pongasi :

$$(6) \quad \xi_1 = - \frac{1 + X^2}{\sqrt{3(1 + 14X^2 + X^4)}}$$

si dimostra facilmente essere ξ_1 una radice della equazione :

$$(7) \quad 4\xi^3 - \xi + m = 0$$

e le altre due saranno date dalle :

$$\xi_2 = -\frac{1}{2}\xi_1 \frac{1 + 6X + X^2}{1 + X^2}, \quad \xi_3 = -\frac{1}{2}\xi_1 \frac{1 - 6X + X^2}{1 + X^2}$$

ossia pei valori superiori :

$$\xi_1 = \frac{a_0}{12\sqrt{s}} (X_3 - X_2), \quad \xi_2 = \frac{a_0}{12\sqrt{s}} (X_1 - X_3), \quad \xi_3 = \frac{a_0}{12\sqrt{s}} (X_2 - X_1)$$

come d'altronde è noto.

Se quindi indichiamo con Z la espressione:

$$\frac{i\sqrt{Z_3} - \sqrt{Z_2}}{i\sqrt{Z_3} + \sqrt{Z_2}}$$

evidentemente per le (6) (7) la equazione $m = M$ condurrà alle:

$$(8) \quad X^2 = Z^2, \quad X^2 = \frac{1}{Z^2}$$

ed essendo:

$$\varphi''(x_1) = 2a_0 [3(x_1 - x_3)(x_1 - x_4) + X_2 - X_3]$$

ed in conseguenza:

$$\frac{(x - x_1)\varphi''(x_1) + 6\varphi'(x_1)}{(x - x_1)\sqrt{s}} = \frac{6a_0}{\sqrt{s}} (x_1 - x_3)(x_1 - x_4) \frac{x - x_2}{x - x_1} + 2a_0 \frac{X_2 - X_3}{\sqrt{s}}$$

osservando alle relazioni:

$$(9) \quad \frac{a_0}{\sqrt{s}} (X_2 - X_3) = \frac{A_0}{\sqrt{S}} (Z_2 - Z_3), \quad \frac{a_0}{\sqrt{s}} \sqrt{X_2 X_3} = \frac{A_0}{\sqrt{S}} \sqrt{Z_2 Z_3}$$

si potrà dare alla sostituzione (5) la forma seguente:

$$(10) \quad \frac{x - x_2}{x - x_1} \sqrt{\frac{(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)}{(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)}} = \frac{z - z_2}{z - z_1} \sqrt{\frac{(z_1 - z_3)(z_1 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z_2 - z_4)}}$$

Da ultimo essendo per le (9)

$$\frac{a_0}{\sqrt{s}} (i\sqrt{X_3} - \sqrt{X_2})^2 = \frac{A_0}{\sqrt{S}} (i\sqrt{Z_3} - \sqrt{Z_2})^2$$

si avrà:

$$(11) \quad \sqrt[4]{\frac{S}{s}} = \pm \frac{i\sqrt{Z_3} - \sqrt{Z_2}}{i\sqrt{X_3} - \sqrt{X_2}} \sqrt{\frac{A_0}{a_0}} = \pm \frac{i\sqrt{Z_3} + \sqrt{Z_2}}{i\sqrt{X_3} + \sqrt{X_2}} \sqrt{\frac{A_0}{a_0}}.$$

Supponiamo:

$$\psi(z) = (1 - z^2)(1 - k^2 z^2)$$

quindi: $z_1 = 1$, $z_2 = -1$, $z_3 = \frac{1}{k}$, $z_4 = -\frac{1}{k}$; le equazioni (8) daranno per la determinazione del modulo k le:

$$k^2 = X^2, \quad k^2 = \frac{1}{X^2},$$

*

la sostituzione (10) diverrà la seguente :

$$\frac{z+1}{x-1} = \frac{x-x_2}{x-x_1} \sqrt{\frac{(x_1-x_3)(x_1-x_4)}{(x_2-x_3)(x_2-x_4)}}$$

e la (11) darà :

$$\sqrt[4]{\frac{S}{s}} = \pm \frac{2}{\sqrt[4]{a_0}} \frac{1}{i\sqrt{X_3}-\sqrt{X_2}} = \pm \frac{2k}{\sqrt[4]{a_0}} \frac{1}{i\sqrt{X_3}+\sqrt{X_2}} \quad (*) .$$

3° A questi risultati potrebbesi giungere anche osservando che per le (1) (3) posto $\rho = -a_0 \xi \sqrt{s}$ si hanno le seguenti :

$$(12) \quad \varphi(x) = -\frac{16(x-x_1)^4 s \sqrt{s}}{\varphi^{12}(x_1)} (4\xi^3 - \xi + m), \quad 14 \xi \sqrt{s} = \frac{(x-x_1)\varphi''(x_1) + 6\varphi'(x_1)}{x_1 - x}$$

l'ultima delle quali può porsi sotto una qualunque delle forme :

$$\begin{aligned} (13) \quad 12 \xi \sqrt{s} &= 3a_0(x_1-x_3)(x_1-x_4) \frac{x-x_2}{x_1-x} + a_0(X_3 - X_2) \\ &= 3a_0(x_1-x_4)(x_1-x_2) \frac{x-x_3}{x_1-x} + a_0(X_1 - X_3) \\ &= 3a_0(x_1-x_2)(x_1-x_3) \frac{x-x_4}{x_1-x} + a_0(X_2 - X_1). \end{aligned}$$

Ora se nella (12) si sostituisce alla x la x_2 e si indica con ξ_1 il valore corrispondente di ξ_4 si ha identicamente :

$$4\xi_1^3 - \xi_1 + m = 0$$

dunque ξ_1 è una radice dell'equazione (7) e dalla prima delle (13) si ha :

$$\xi_1 = \frac{a_0}{12\sqrt{s}} (X_3 - X_2)$$

come si è trovato di sopra. Da questo risultato potrebbe anche facilmente dedursi essere la (7) una risolvente dell'equazione biquadratica.

(*) Jacobi, Fundamenta Nova, pag. 15. Tabula III^a. — Cayley, Giornale di Crelle. Vole. 55.