Integrazione geometrica di alcune equazioni differenziali.

(Di GEMINIANO PIRONDINI, a Parma.)

Se un problema geometrico, risolto con un primo metodo, è ridotto all'integrazione di una certa equazione differenziale, e risolto con un secondo metodo è ridotto a sole quadrature, può avvenire che, col confronto delle due soluzioni, si riesca ad ottenere l'integrale generale di quell'equazione differenziale.

Per rendere ciò manifesto con un esempio, proponiamoci il seguente problema: *Determinare una linea a doppia curvatura colle due condizioni:*

1.^o *che il raggio vettore R , che dall'origine degli assi va a un punto arbitrario della linea, sia una funzione nota dell'arco;*

2.^o *che il coseno dell'angolo ω , sotto il quale la linea sega i meridiani della superficie generata dalla medesima, nella sua rotazione attorno all'asse delle z , sia una funzione nota dell'arco.*

Le coordinate dei punti di una linea qualsivoglia si possono esprimere, in funzione dell'arco, per mezzo delle equazioni:

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cdot \cos \left(\int \frac{\sqrt{1 - \rho'^2 - \lambda'^2}}{\rho} \cdot ds \right) \\ y &= \rho \cdot \sin \left(\int \frac{\sqrt{1 - \rho'^2 - \lambda'^2}}{\rho} \cdot ds \right) \\ z &= \lambda(s). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Ed allora, essendo:

$$\cos \omega = \sqrt{\rho'^2 + \lambda'^2},$$

si deduce:

$$\lambda = \int \sqrt{\cos^2 \omega - \rho'^2} \cdot ds, \quad (2)$$

potendosi evidentemente mettere a zero la costante arbitraria (additiva) che viene dall'integrazione.

Notando che

$$\rho^2 + z^2 = R^2,$$

se si tiene conto dell'espressione (2) di λ e si applicano le equazioni (1), si trova che *la linea richiesta è rappresentata dalle equazioni:*

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cdot \cos \left(\int \frac{\sin \omega}{\rho} ds \right), & y &= \rho \cdot \sin \left(\int \frac{\sin \omega}{\rho} ds \right), \\ z &= \int \sqrt{\cos^2 \omega - \rho'^2} ds, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

dove ρ è definita in funzione di s per mezzo dell'equazione differenziale:

$$\rho'^2 - \frac{2R'}{R} \cdot \rho \rho' + \frac{\cos^2 \omega}{R^2} \rho^2 = \cos^2 \omega - R'^2. \quad (4)$$

Le coordinate dei punti di una linea possono esprimersi, in funzione dell'arco, anche per mezzo delle equazioni:

$$\left\{ \begin{aligned} x &= R \sin \varphi \cdot \cos \left(\int \frac{\sqrt{1 - R'^2 - R^2 \varphi'^2}}{R \sin \varphi} ds \right) \\ y &= R \sin \varphi \cdot \sin \left(\int \frac{\sqrt{1 - R'^2 - R^2 \varphi'^2}}{R \sin \varphi} ds \right) \\ z &= R \cos \varphi. \end{aligned} \right.$$

In questa ipotesi si trova:

$$\cos \omega = \sqrt{R'^2 + R^2 \varphi'^2},$$

da cui si ricava:

$$\varphi = \int \frac{\sqrt{\cos^2 \omega - R'^2}}{R} ds + c,$$

con c costante arbitraria.

Si vede quindi che *la linea domandata è anche definita dalle equazioni:*

$$\left\{ \begin{aligned} x &= R \cdot \sin \left(\int \frac{\sqrt{\cos^2 \omega - R'^2}}{R} ds + c \right) \cdot \cos \left\{ \int \frac{\sin \omega \cdot ds}{R \cdot \sin \left(\int \frac{\sqrt{\cos^2 \omega - R'^2}}{R} ds + c \right)} \right\} \\ y &= R \cdot \sin \left(\int \frac{\sqrt{\cos^2 \omega - R'^2}}{R} ds + c \right) \cdot \sin \left\{ \int \frac{\sin \omega \cdot ds}{R \cdot \sin \left(\int \frac{\sqrt{\cos^2 \omega - R'^2}}{R} ds + c \right)} \right\} \\ z &= R \cdot \cos \left(\int \frac{\sqrt{\cos^2 \omega - R'^2}}{R} ds + c \right). \end{aligned} \right.$$

Basta confrontare queste equazioni colle (3) per riconoscere che l'integrale generale dell'equazione (4) è:

$$\rho = R \cdot \operatorname{sen} \left(\int \frac{\sqrt{\cos^2 \omega - R'^2}}{R} ds + c \right).$$

Si verifica poi, colla prova diretta, che tale proprietà non cessa di sussistere se nella (4) l'arco s si sostituisce con una variabile indipendente qualunque, spogliando anche le funzioni arbitrarie ω , R di quel particolare significato geometrico che era loro stato attribuito. Cambiando allora s e ρ rispettivamente in x ed y , e ponendo inoltre:

$$M = -\frac{2R'}{R}, \quad N = \frac{\cos^2 \omega}{R^2}, \quad P = \cos^2 \omega - R'^2, \quad (5)$$

la (4) può scriversi:

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + M \cdot y \frac{dy}{dx} + N y^2 = P.$$

E siccome dalle (5) si ricava:

$$R = e^{-\frac{1}{2} \int M dx}, \quad \cos \omega = \sqrt{N} \cdot e^{-\frac{1}{2} \int M dx}, \quad P = \left(N - \frac{M^2}{4} \right) e^{-\int M dx},$$

si ha il teorema:

L'integrale generale dell'equazione differenziale del primo ordine e del secondo grado:

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + M \cdot y \frac{dy}{dx} + N \cdot y^2 = \left(N - \frac{M^2}{4} \right) e^{-\int M dx}$$

(dove M ed N sono due funzioni arbitrarie della sola x) è il seguente:

$$y = e^{-\frac{1}{2} \int M dx} \cdot \operatorname{sen} \left(\int \sqrt{N - \frac{M^2}{4}} dx + c \right).$$

Parma, settembre 1903.