

# Ueber eine Reihentransformation *Stirlings*.

(Von Herrn *M. Dietrich* zu München.)

Bekanntlich hat sich zuerst *Stirling* mit der Verwandlung der Reihe

$$A + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} + \frac{D}{x^3} + \dots$$

in eine Reihe von der Form

$$A_1 + \frac{B_1}{x} + \frac{C_1}{x(x+1)} + \frac{D_1}{x(x+1)(x+2)} + \dots$$

beschäftigt. Es stellt nämlich *Stirling*, von der Gleichung

$$\frac{1}{x^2(x+1)\dots(x+n-1)} = \frac{1}{x(x+1)\dots(x+n)} + \frac{n}{x(x+1)\dots(x+n+1)} + \frac{n(n+1)}{x(x+1)\dots(x+n+2)} + \dots$$

ausgehend, für die Coefficienten  $A'_n, A''_n, A'''_n, \dots$  der Gleichung

$$\frac{1}{x^n} = \frac{A'_n}{x(x+1)\dots(x+n-1)} + \frac{A''_n}{x(x+1)\dots(x+n)} + \frac{A'''_n}{x(x+1)\dots(x+n+1)} + \dots$$

ein sie mit den Coefficienten einer ähnlichen für  $\frac{1}{x^{n+1}}$  aufgestellten Gleichung verbindendes recurrentes Gesetz auf und findet, indem er diese Gleichung für  $n = 2, 3, 4, \dots$  auf die einzelnen Glieder der zu transformirenden Reihe anwendet und dann die gleichartigen Grössen vereinigt:

$$\begin{aligned} & A + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} + \frac{D}{x^3} + \frac{E}{x^4} + \dots = \\ & A + \frac{B}{x} + \frac{C}{x(x+1)} + \frac{C+D}{x(x+1)(x+2)} + \frac{2C+3D+E}{x(x+1)(x+2)(x+3)} + \frac{6C+11D+6E+F}{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)} \\ & \quad + \frac{24C+50D+35E+10F+G}{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)} + \dots \end{aligned}$$

Dieses Verfahren führt jedoch nicht zur Kenntniss des independenten Bildungsgesetzes der Coefficienten  $A_1, B_1, C_1, \dots$  der transformirten Reihe und daher auch zu keiner sicheren Entscheidung über die Convergenz oder Divergenz derselben. Erst neuerlich hat *Schlömilch* in einer Abhandlung über Facultätenreihen (Zeitschr. für Math. u. Phys. IV. Jahrg. 6. Heft) aus der Betrachtung des bestimmten Integrales

$$\int_0^1 e^{-xu} f(u) du = \varphi(x)$$

durch die Annahme  $f(u) = u^{k-1}$  die Gleichung

$$\frac{1}{x^k} = \frac{P_{k-1}^{k-1}}{x(x+1)\dots(x+k-1)} + \frac{P_{k-1}^k}{x(x+1)\dots(x+k)} + \frac{P_{k-1}^{k+1}}{x(x+1)\dots(x+k+1)} + \dots$$

$$+ \frac{P_{k-1}^{n-1}}{x(x+1)\dots(x+n-1)} + \frac{1}{x^k} \cdot \frac{P_1^n x + P_2^n x^2 + \dots + P_{k-1}^n x^{k-1}}{x(x+1)\dots(x+n-1)},$$

in welcher allgemein  $P_m^n$  den Coefficienten von  $x^m$  der Entwicklung des Productes

$$x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)$$

vorstellt, aufgestellt und durch den Nachweis, dass der Rest der hier angegebenen Entwicklung für ein unendlich wachsendes  $n$  gegen die Grenze Null convergirt, die in's Unendliche gehende Fortsetzung dieser und daher auch der Stirlingschen Reihe gerechtfertigt. Doch glaube ich nichts Ueberflüssiges zu unternehmen, wenn ich auf elementarem Wege und auch in allgemeinerer Gestalt obige von Schlömilch gefundene Gleichung ableite und aus ihr die Umformung der Reihe

$$A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \dots$$

in die neue Reihe

$$B_0 + \frac{B_1}{x+\alpha_1} + \frac{B_2}{(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)} + \frac{B_3}{(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)(x+\alpha_3)} + \dots$$

oder, mittelst der Substitution  $\frac{1}{x} = z$  die der Reihe

$$A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \dots$$

in die Reihe

$$B_0 + \frac{B_1 z}{1+\alpha_1 z} + \frac{B_2 z^2}{(1+\alpha_1 z)(1+\alpha_2 z)} + \frac{B_3 z^3}{(1+\alpha_1 z)(1+\alpha_2 z)(1+\alpha_3 z)} + \dots$$

vornehme.

Durch fortgesetzte Anwendung der durch die Gleichung

$$\frac{1}{x} = \frac{x+\alpha}{x(x+\alpha)} = \frac{1}{x+\alpha} + \frac{\alpha}{x(x+\alpha)}$$

angezeigten Zerlegung des Bruches  $\frac{1}{x}$  findet man:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x+\alpha_1} + \frac{\alpha_1}{x(x+\alpha_1)}$$

$$= \frac{1}{x+\alpha_1} + \frac{\alpha_1}{(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)} + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{x(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)}$$

$$= \frac{1}{x+\alpha_1} + \frac{\alpha_1}{(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)} + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)(x+\alpha_3)} + \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{x(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)(x+\alpha_3)},$$

und allgemein, wenn man noch, um abzukürzen, das Product

$$(x + \alpha_1)(x + \alpha_2) \dots (x + \alpha_k) = P_k(x + \alpha)$$

setzt,

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{P_1(x + \alpha)} + \frac{\alpha_1}{P_2(x + \alpha)} + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{P_3(x + \alpha)} + \dots + \frac{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1}}{P_n(x + \alpha)} + \frac{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}{x P_n(x + \alpha)}.$$

Daher wird auch

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2} &= \frac{1}{x P_1(x + \alpha)} + \frac{\alpha_1}{x P_2(x + \alpha)} + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{x P_3(x + \alpha)} + \dots + \frac{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1}}{x P_n(x + \alpha)} + \frac{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}{x^2 P_n(x + \alpha)} \\ &= \frac{1}{P_1(x + \alpha)} \left( \frac{1}{x + \alpha_2} + \frac{\alpha_2}{(x + \alpha_2)(x + \alpha_3)} + \frac{\alpha_2 \alpha_3}{(x + \alpha_2) \dots (x + \alpha_4)} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_{n-1}}{(x + \alpha_2) \dots (x + \alpha_n)} + \frac{\alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n}{x(x + \alpha_2) \dots (x + \alpha_n)} \right) \\ &\quad + \frac{1}{P_2(x + \alpha)} \left( \frac{\alpha_1}{x + \alpha_3} + \frac{\alpha_1 \alpha_3}{(x + \alpha_3)(x + \alpha_4)} + \dots + \frac{\alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_{n-1}}{(x + \alpha_3) \dots (x + \alpha_n)} + \frac{\alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_n}{x(x + \alpha_3) \dots (x + \alpha_n)} \right) \\ &\quad + \frac{1}{P_3(x + \alpha)} \left( \frac{\alpha_1 \alpha_2}{x + \alpha_4} + \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_4}{(x + \alpha_4)(x + \alpha_5)} + \dots + \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 \dots \alpha_{n-1}}{(x + \alpha_4) \dots (x + \alpha_n)} + \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 \dots \alpha_n}{x(x + \alpha_4) \dots (x + \alpha_n)} \right) \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \frac{1}{P_{n-1}(x + \alpha)} \left( \frac{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-2}}{x + \alpha_n} + \frac{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-2} \alpha_n}{x(x + \alpha_n)} \right) + \frac{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1}}{x P_n(x + \alpha)} + \frac{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}{x^2 P_n(x + \alpha)} \\ &= \frac{1}{P_2(x + \alpha)} + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{P_3(x + \alpha)} + \frac{\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3}{P_4(x + \alpha)} + \dots + \frac{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-2} + \dots + \alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_{n-1} + \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_{n-1}}{P_n(x + \alpha)} \\ &\quad + \frac{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} + \dots + \alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_n + \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n}{x P_n(x + \alpha)} + \frac{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}{x^2 P_n(x + \alpha)}. \end{aligned}$$

Man sieht hier sogleich, dass die einzelnen Zähler aus den Gliedern der ersten, zweiten, dritten, ... Combinationsklasse der ersten zwei, drei, vier, ... der Zahlen  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$  bestehen, so dass, wenn man die Summe der Glieder der  $k^{\text{ten}}$  Combinationsklasse der ersten  $p$  dieser Zahlen mit  $C_p^k(\alpha)$  bezeichnet, man erhält:

$$\frac{1}{x^3} = \frac{1}{P_2(x + \alpha)} + \frac{C_2^1(\alpha)}{P_3(x + \alpha)} + \frac{C_3^2(\alpha)}{P_4(x + \alpha)} + \dots + \frac{C_{n-1}^{n-2}(\alpha)}{P_n(x + \alpha)} + \frac{C_n^{n-1}(\alpha)}{x P_n(x + \alpha)} + \frac{C_n^n(\alpha)}{x^2 P_n(x + \alpha)}.$$

Hieraus wird sodann:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^3} &= \frac{1}{xP_2(x+\alpha)} + \frac{C_2^1(\alpha)}{xP_3(x+\alpha)} + \frac{C_3^2(\alpha)}{xP_4(x+\alpha)} + \cdots + \frac{C_{n-1}^{n-1}(\alpha)}{x^3P_n(x+\alpha)} + \frac{C_n^n(\alpha)}{x^3P_n(x+\alpha)} \\
&= \frac{1}{P_2(x+\alpha)} \left( \frac{1}{x+\alpha_3} + \frac{\alpha_3}{(x+\alpha_3)(x+\alpha_4)} + \frac{\alpha_3\alpha_4}{(x+\alpha_3)\dots(x+\alpha_5)} + \cdots + \frac{\alpha_3\alpha_4\dots\alpha_n}{x(x+\alpha_3)\dots(x+\alpha_n)} \right) \\
&\quad + \frac{1}{P_3(x+\alpha)} \left( \frac{C_2^1(\alpha)}{x+\alpha_4} + \frac{\alpha_4 \cdot C_2^1(\alpha)}{(x+\alpha_4)(x+\alpha_5)} + \frac{\alpha_4\alpha_5 \cdot C_2^1(\alpha)}{(x+\alpha_4)\dots(x+\alpha_6)} + \cdots + \frac{\alpha_4\alpha_5\dots\alpha_n \cdot C_2^1(\alpha)}{x(x+\alpha_4)\dots(x+\alpha_n)} \right) \\
&\quad + \frac{1}{P_4(x+\alpha)} \left( \frac{C_3^2(\alpha)}{x+\alpha_5} + \frac{\alpha_5 \cdot C_3^2(\alpha)}{(x+\alpha_5)(x+\alpha_6)} + \cdots + \frac{\alpha_5\alpha_6\dots\alpha_n \cdot C_3^2(\alpha)}{x(x+\alpha_5)\dots(x+\alpha_n)} \right) \\
&\quad + \dots \\
&\quad + \frac{1}{P_{n-1}(x+\alpha)} \left( \frac{C_{n-2}^{n-3}(\alpha)}{x+\alpha_n} + \frac{\alpha_n C_{n-2}^{n-3}(\alpha)}{x(x+\alpha_n)} \right) + \frac{C_{n-1}^{n-2}(\alpha)}{xP_n(x+\alpha)} + \frac{C_n^{n-1}(\alpha)}{x^3P_n(x+\alpha)} + \frac{C_n^n(\alpha)}{x^3P_n(x+\alpha)}.
\end{aligned}$$

Multiplicirt man nun wieder die in Klammern stehenden Reihen mit dem zugehörigen Factor, vereinigt dann die gleichbenannten Brüche und beachtet, dass allgemein

$$\alpha_3\alpha_4\dots\alpha_i + \alpha_4\alpha_5\dots\alpha_i C_2^1(\alpha) + \alpha_5\dots\alpha_i C_3^2(\alpha) + \cdots + C_{i-1}^{i-2}(\alpha) = C_i^{i-2}(\alpha)$$

ist, so wird

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^3} &= \frac{1}{P_3(x+\alpha)} + \frac{C_3^1(\alpha)}{P_4(x+\alpha)} + \frac{C_4^2(\alpha)}{P_5(x+\alpha)} + \cdots + \frac{C_{n-1}^{n-3}(\alpha)}{P_n(x+\alpha)} + \frac{C_n^{n-2}(\alpha)}{xP_n(x+\alpha)} \\
&\quad + \frac{C_n^{n-1}(\alpha)}{x^3P_n(x+\alpha)} + \frac{C_n^n(\alpha)}{x^3P_n(x+\alpha)}.
\end{aligned}$$

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens findet man ferner:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^4} &= \frac{1}{P_4(x+\alpha)} + \frac{C_4^1(\alpha)}{P_5(x+\alpha)} + \frac{C_5^2(\alpha)}{P_6(x+\alpha)} + \cdots + \frac{C_{n-1}^{n-4}(\alpha)}{P_n(x+\alpha)} + \frac{C_n^{n-3}(\alpha)}{xP_n(x+\alpha)} + \cdots + \frac{C_n^n(\alpha)}{x^4P_n(x+\alpha)}, \\
\frac{1}{x^5} &= \frac{1}{P_5(x+\alpha)} + \frac{C_5^1(\alpha)}{P_6(x+\alpha)} + \frac{C_6^2(\alpha)}{P_7(x+\alpha)} + \cdots + \frac{C_{n-1}^{n-5}(\alpha)}{P_n(x+\alpha)} + \frac{C_n^{n-4}(\alpha)}{xP_n(x+\alpha)} + \cdots + \frac{C_n^n(\alpha)}{x^5P_n(x+\alpha)};
\end{aligned}$$

und allgemein:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^m} &= \frac{1}{P_m(x+\alpha)} + \frac{C_m^1(\alpha)}{P_{m+1}(x+\alpha)} + \frac{C_{m+1}^2(\alpha)}{P_{m+2}(x+\alpha)} + \cdots + \frac{C_{n-2}^{n-m-1}(\alpha)}{P_{n-1}(x+\alpha)} + \frac{C_{n-1}^{n-m}(\alpha)}{P_n(x+\alpha)} \\
&\quad + \frac{C_n^{n-m+1}(\alpha)}{xP_n(x+\alpha)} + \frac{C_n^{n-m+2}(\alpha)}{x^2P_n(x+\alpha)} + \cdots + \frac{C_n^{n-1}(\alpha)}{x^{m-1}P_n(x+\alpha)} + \frac{C_n^n(\alpha)}{x^mP_n(x+\alpha)},
\end{aligned}$$

welche letztere Gleichung für die Werthe 0, 1, 2, 3, ... der Zahlen  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ , ... in die von *Schlömilch* gefundene Entwicklung übergeht und die Grundlage der *Stirlingschen* Transformation bildet.

Der auf das Glied  $\frac{C_{n-1}^{n-m}(\alpha)}{P_n(x+\alpha)}$  folgende Rest der Entwicklung des Bruches  $\frac{1}{x^m}$ , der mit  $\Re$  bezeichnet werden mag, kann auch geschrieben werden:

$$\Re = \frac{C_n^n(\alpha) + C_n^{n-1}(\alpha) \cdot x + C_n^{n-2}(\alpha) \cdot x^2 + \dots + C_n^{n-m+1}(\alpha) \cdot x^{m-1}}{x^m \cdot P_n(x+\alpha)},$$

oder wenn man Zähler und Nenner mit

$$P_n(z+\alpha) = C_n^n(\alpha) + C_n^{n-1}(\alpha) \cdot z + C_n^{n-2}(\alpha) \cdot z^2 + \dots + C_n^{n-m+1}(\alpha) \cdot z^{m-1} + \dots + z^n,$$

wo  $z$  eine willkürliche Zahl vorstellt, multiplicirt und noch bemerkt, dass

$$\frac{P_n(z+\alpha)}{P_n(x+\alpha)} = \frac{1}{P_n\left(\frac{x+\alpha}{z+\alpha}\right)} = \frac{1}{P_n\left(1 + \frac{x-z}{z+\alpha}\right)}$$

und allgemein

$$C_n^{n-k}(\alpha) = C_n^n(\alpha) \cdot C_n^k\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

ist,

$$\begin{aligned} \Re &= \frac{1}{x^m \cdot P_n\left(1 + \frac{x-z}{z+\alpha}\right)} \cdot \frac{C_n^n(\alpha) + C_n^{n-1}(\alpha) \cdot x + C_n^{n-2}(\alpha) \cdot x^2 + \dots + C_n^{n-m+1}(\alpha) \cdot x^{m-1}}{C_n^n(\alpha) + C_n^{n-1}(\alpha) \cdot z + C_n^{n-2}(\alpha) \cdot z^2 + \dots + C_n^{n-m+1}(\alpha) \cdot z^{m-1} + \dots + z^n} \\ &= \frac{1}{x^m \cdot P_n\left(1 + \frac{x-z}{z+\alpha}\right)} \cdot \frac{1 + C_n^1\left(\frac{1}{\alpha}\right) \cdot x + C_n^2\left(\frac{1}{\alpha}\right) \cdot x^2 + \dots + C_n^{m-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right) \cdot x^{m-1}}{1 + C_n^1\left(\frac{1}{\alpha}\right) \cdot z + C_n^2\left(\frac{1}{\alpha}\right) \cdot z^2 + \dots + C_n^{m-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right) \cdot z^{m-1} + \dots + C_n^n\left(\frac{1}{\alpha}\right) \cdot z^n} \end{aligned}$$

Wenn nun  $x$  und sämtliche der Zahlen  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$  positiv sind, und man auch noch  $z$  positiv aber kleiner als  $x$  annimmt, so ist, da

$$P_n\left(1 + \frac{x-z}{z+\alpha}\right) = 1 + C_n^1\left(\frac{1}{z+\alpha}\right) \cdot (x-z) + C_n^2\left(\frac{1}{z+\alpha}\right) \cdot (x-z)^2 + \dots + C_n^n\left(\frac{1}{z+\alpha}\right) \cdot (x-z)^n$$

ist, offenbar

$$P_n\left(1 + \frac{x-z}{z+\alpha}\right) > 1 + C_n^1\left(\frac{1}{z+\alpha}\right) \cdot (x-z) \quad \text{und} \quad \frac{1}{P_n\left(1 + \frac{x-z}{z+\alpha}\right)} < \frac{1}{1 + C_n^1\left(\frac{1}{z+\alpha}\right) \cdot (x-z)}.$$

Wegen der leicht zu beweisenden Beziehung

$$C_n^k\left(\frac{1}{z+\alpha}\right) < \frac{1}{k!} \left(C_n^1\left(\frac{1}{z+\alpha}\right)\right)^k$$

ist ferner, wenn man noch Kürze halber  $C_n^1\left(\frac{1}{z+\alpha}\right) = s$  setzt,

$$P_n\left(1 + \frac{x-z}{z+\alpha}\right) < 1 + s \cdot (x-z) + \frac{s^2}{2!} (x-z)^2 + \dots + \frac{s^n}{n!} (x-z)^n,$$

und um so mehr

$$P_n \left( 1 + \frac{x-z}{z+\alpha} \right) < e^{s(x-z)}, \quad \text{also auch} \quad \frac{1}{P_n \left( 1 + \frac{x-z}{z+\alpha} \right)} > \frac{1}{e^{s(x-z)}}.$$

Sodann ist der den zweiten Factor des Werthes von  $\mathfrak{R}$  bildende Bruch kleiner als der Bruch

$$\frac{1 + C_n^1 \left( \frac{1}{\alpha} \right) \cdot x + C_n^2 \left( \frac{1}{\alpha} \right) \cdot x^2 + \dots + C_n^{m-1} \left( \frac{1}{\alpha} \right) \cdot x^{m-1}}{1 + C_n^1 \left( \frac{1}{\alpha} \right) \cdot z + C_n^2 \left( \frac{1}{\alpha} \right) \cdot z^2 + \dots + C_n^{m-1} \left( \frac{1}{\alpha} \right) \cdot z^{m-1}},$$

welcher als Mittelwerth der Brüche

$$1, \quad \frac{x}{z}, \quad \frac{x^2}{z^2}, \quad \dots, \quad \frac{x^{m-1}}{z^{m-1}}$$

wieder kleiner ist als der grösste von diesen, als  $\frac{x^{m-1}}{z^{m-1}}$  (da  $z < x$  ist), was dann um so mehr bei dem zweiten Factor des Werthes von  $\mathfrak{R}$  der Fall sein wird. Endlich ist dieser, da sein Zähler grösser als Eins und sein Nenner, wenn man hier  $C_n^1 \left( \frac{1}{\alpha} \right)$  durch  $s_1$  abkürzt, kleiner als  $e^{s_1 z}$  ist, selbst grösser als der Bruch

$$\frac{1}{e^{s_1 z}}.$$

Diese Bemerkungen zusammen führen für den Werth des Restes  $\mathfrak{R}$  auf folgende Beziehung:

$$\frac{1}{xz^{m-1}(1+s(x-z))} > R > \frac{1}{x^m \cdot e^{s(x-z)+s_1 z}},$$

welche denselben zwischen zwei bloss von  $s$  und  $s_1$  oder von  $C_n^1 \left( \frac{1}{z+\alpha} \right)$  und  $C_n^1 \left( \frac{1}{\alpha} \right)$  abhängige Grenzen stellt. Für ein unendlich wachsendes  $n$  convergiren, wie sich leicht zeigen lässt, entweder  $C_n^1 \left( \frac{1}{z+\alpha} \right)$  und  $C_n^1 \left( \frac{1}{\alpha} \right)$  beide gegen bestimmte endliche Werthe, oder sie werden beide zugleich unendlich gross. Im ersten Fall erhalten daher, da  $x^m$  und  $xz^{m-1}$  von  $n$  unabhängig sind und bestimmte endliche Werthe haben, auch die beiden Grenzen von  $\mathfrak{R}$  bestimmte endliche, von Null verschiedene Werthe; im zweiten Falle aber convergiren beide Grenzen von  $\mathfrak{R}$ , sonach auch  $\mathfrak{R}$  selbst gegen Null.

Sind einige der Zahlen  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ , etwa  $i$  in der Anzahl, Null, so bleibt die ganze Betrachtung im Wesentlichen dieselbe; nur werden, da

dann anfangs schon nicht mit dem Null gewordenen  $C_n^n(\alpha)$  sondern mit dem zuerst auftretenden  $C_n^{n-1}(\alpha)$  dividirt wird, die Ausdrücke  $C_n^1\left(\frac{1}{x+\alpha}\right)$  und  $C_n^1\left(\frac{1}{\alpha}\right)$  bloss aus den nicht Null gewordenen der Zahlen  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$  gebildet. Man kann daher folgenden Satz als begründet aussprechen: *Wenn die Zahlen  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$  alle positiv oder zum Theil Null und die übrigen positiv sind, und wenn die aus den positiven von ihnen gebildete Reihe*

$$\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} + \frac{1}{\alpha_4} + \dots,$$

*in's Unendliche fortgesetzt, selbst eine unendlich gross werdende Summe giebt, so gilt für jedes positive  $x$  folgende Entwicklung:*

$$\frac{1}{x^m} = \frac{1}{(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)\dots(x+\alpha_m)} + \frac{C_m^1(\alpha)}{(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)\dots(x+\alpha_m)(x+\alpha_{m+1})} \\ + \frac{C_{m+1}^2(\alpha)}{(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)\dots(x+\alpha_{m+1})(x+\alpha_{m+2})} + \dots + \frac{C_{m+k-1}^k(\alpha)}{(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)\dots(x+\alpha_{m+k})} + \dots$$

Verwendet man diese Entwicklung für  $m = 1, 2, 3, \dots$  zu der am Anfange dieses Aufsatzes angedeuteten Transformation, so wird

$$A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \dots \\ = A_0 + \frac{A_1}{x+\alpha_1} + \frac{C_1^1(\alpha) \cdot A_1 + A_2}{(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)} + \frac{C_2^2(\alpha) \cdot A_1 + C_2^1(\alpha) \cdot A_2 + A_3}{(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)(x+\alpha_3)} + \frac{C_3^3(\alpha) \cdot A_1 + C_3^2(\alpha) \cdot A_2 + C_3^1(\alpha) \cdot A_3 + A_4}{(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)(x+\alpha_3)(x+\alpha_4)} \\ + \dots + \frac{C_{k-1}^{k-1}(\alpha) \cdot A_1 + C_{k-1}^{k-2}(\alpha) \cdot A_2 + C_{k-1}^{k-3}(\alpha) \cdot A_3 + \dots + A_k}{(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)\dots(x+\alpha_{k-1})(x+\alpha_k)} + \dots$$

Diese Gleichung erfordert für ihr Bestehen ausser der Erfüllung der für die Entwicklung von  $\frac{1}{x^m}$  aufgestellten Bedingungen, dass beide in ihr vorkommende Reihen convergent sind. Die erste derselben ist convergent, wenn für ein unendlich wachsendes  $n$

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} < x,$$

die zweite, wenn

$$\frac{C_n^n(\alpha) \cdot A_1 + C_n^{n-1}(\alpha) \cdot A_2 + \dots + C_n^1(\alpha) \cdot A_n + A_{n+1}}{C_{n-1}^{n-1}(\alpha) \cdot A_1 + C_{n-1}^{n-2}(\alpha) \cdot A_2 + \dots + C_{n-1}^1(\alpha) \cdot A_{n-1} + A_n} < x + \alpha_{n+1}$$

ist. Letzterer Bruch gestaltet sich wegen der Gleichung

$$C_n^k(\alpha) = C_{n-1}^k(\alpha) + \alpha_n C_{n-1}^{k-1}(\alpha)$$

um in

$$\frac{\alpha_n C_{n-1}^{n-1}(\alpha) \cdot A_1 + (C_{n-1}^{n-1}(\alpha) + \alpha_n C_{n-1}^{n-2}(\alpha)) \cdot A_2 + (C_{n-1}^{n-2}(\alpha) + \alpha_n C_{n-1}^{n-3}(\alpha)) A_3 + \dots + (C_{n-1}^1(\alpha) + \alpha_n) A_n + A_{n+1}}{C_{n-1}^{n-1}(\alpha) \cdot A_1 + C_{n-1}^{n-2}(\alpha) \cdot A_2 + \dots + C_{n-1}^1(\alpha) \cdot A_n + A_{n+1}} \\ = \frac{C_{n-1}^{n-1}(\alpha) \cdot A_1 + C_{n-1}^{n-2}(\alpha) \cdot A_2 + C_{n-1}^{n-3}(\alpha) \cdot A_3 + \dots + A_{n+1}}{C_{n-1}^{n-1}(\alpha) \cdot A_1 + C_{n-1}^{n-2}(\alpha) \cdot A_2 + C_{n-1}^{n-3}(\alpha) \cdot A_3 + \dots + A_n} + \alpha_n.$$

Wenn nun in der zu transformirenden Reihe die Bedingung ihrer Convergenz schon vom ersten Quotienten  $\frac{A_2}{A_1}$  an durchaus erfüllt wird, und die Zahlen  $A_1, A_2, A_3, \dots$  alle positiv sind, so wird der Werth des Bruches der zweiten Seite letzterer Gleichung kleiner als  $x$  sein, und man hat also

$$\frac{C_n^n(\alpha) \cdot A_1 + C_n^{n-1}(\alpha) \cdot A_2 + \dots + C_n^1(\alpha) \cdot A_n + A_{n+1}}{C_{n-1}^{n-1}(\alpha) \cdot A_1 + C_{n-1}^{n-2}(\alpha) \cdot A_2 + \dots + C_{n-1}^1(\alpha) \cdot A_n + A_{n+1}} < x + \alpha_n,$$

während die Convergenz der transformirten Reihe erfordert, dass dieser Bruch kleiner als  $x + \alpha_{n+1}$  sein soll. Diese Bedingung reducirt sich demnach auf die einfachere

$$x + \alpha_n \leq x + \alpha_{n+1} \quad \text{oder} \quad \alpha_n \leq \alpha_{n+1}.$$

Wird die Bedingung

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} < x$$

erst von dem Quotienten  $\frac{A_{i+1}}{A_i}$  an erfüllt, so kann man sich die gegebene Reihe in die zwei Reihen

$$A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \dots + \frac{A_{i-1}}{x^{i-1}}$$

und

$$\frac{A_i}{x^i} + \frac{A_{i+1}}{x^{i+1}} + \frac{A_{i+2}}{x^{i+2}} + \frac{A_{i+3}}{x^{i+3}} + \dots$$

zerlegt denken, welche jede für sich, und daher auch für ihre Summe, convergente transformirte Reihen liefern. Ebenso wird bei Erfüllung oben gegebener Bedingung die Transformation auch möglich sein, wie aus dem Bau der Coefficienten der neuen Reihe sogleich erhellt, wenn die Coefficienten  $A_1, A_2, A_3, \dots$  zum Theil auch Null oder negativ sind.

Um nun noch auf besondere Fälle der allgemeinen Transformation überzugehen, seien erstens die Zahlen  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$  Glieder einer einfachen arithmetischen Reihe, also etwa den Zahlen

$$a, a+b, a+2b, a+3b, \dots$$

gleich. Die allgemeinen Bedingungen

$$\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} + \dots + \frac{1}{\alpha_n} = \infty$$



und

$$\alpha_n \leq \alpha_{n+1},$$

beide auf ein unendlich wachsendes  $n$  sich beziehend, gestalten sich um in folgende:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} + \dots + \frac{1}{a+(n-1)b} = \infty$$

und

$$a+(n-1)b \leq a+nb,$$

welchen beiden durch jedes positive  $b$  genügt wird. Es hat also in diesem Falle, wohin auch die *Stirlingsche* Transformation gehört, die Transformation einer gegebenen Reihe bloss noch die Convergenz derselben zur Bedingung.

Sind die Zahlen  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$  Glieder einer höheren arithmetischen Reihe, oder Potenzen der Glieder einer einfachen, deren Exponent die Einheit übersteigt, so erhält die Reihe

$$\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} + \dots + \frac{1}{\alpha_n}$$

auch für ein unendlich wachsendes  $n$  eine bestimmte endliche Zahl als Summenwerth und es ist demnach schon die Transformation des Bruches  $\frac{1}{x^m}$  nicht in dieser Weise möglich.

Wählt man endlich für die Zahlen  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$  die Glieder einer geometrischen Reihe, etwa die Zahlen

$$a, ac, ac^2, ac^3, \dots$$

so ist die Transformation der Reihe von der Erfüllung der Bedingungen

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ac^2} + \frac{1}{ac^3} + \dots = \infty$$

und

$$ac^{n-1} \leq ac^n$$

abhängig, von denen die erste verlangt, dass  $c \leq 1$ , die zweite, dass  $c \geq 1$  ist; sie ist also nur möglich, wenn  $c=1$ , d. h. wenn die Zahlen  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$  alle gleich  $a$  sind. Doch ist für  $c < 1$  hier wenigstens noch die Umformung des Bruches  $\frac{1}{x^m}$  statthaft. Die bekannte Entwicklung des Productes

$$(x+a)(x+ac)(x+ac^2)\dots(x+ac^{t-1})$$

nach Potenzen von  $x$ , worin die Coefficienten beziehungsweise den Werthen gleich werden, welche im vorliegenden Falle die Grössen  $C_1^t(\alpha), C_2^t(\alpha), \dots$

annehmen, liefert die Ergebnisse:

$$C_k^1(\alpha) = a \cdot \frac{1-c^k}{1-c},$$

$$C_k^2(\alpha) = ac \cdot \frac{(1-c^k)(1-c^{k-1})}{(1-c)(1-c^2)}$$

u. s. w. und allgemein

$$C_k^i(\alpha) = a^i c^{\frac{i(i-1)}{2}} \frac{(1-c^k)(1-c^{k-1}) \dots (1-c^{k-i+1})}{(1-c)(1-c^2) \dots (1-c^i)}.$$

Hierdurch wird dann:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^m} = & \frac{1}{(x+a)(x+ac) \dots (x+ac^{m-1})} \cdot \left( 1 + \frac{1-c^m}{1-c} \cdot \frac{a}{x+ac^m} + \frac{(1-c^m)(1-c^{m+1})}{(1-c)(1-c^2)} \cdot \frac{a^2 c}{(x+ac^m)(x+ac^{m+1})} \right. \\ & + \frac{(1-c^m)(1-c^{m+1})(1-c^{m+2})}{(1-c)(1-c^2)(1-c^3)} \cdot \frac{a^3 c^3}{(x+ac^m)(x+ac^{m+1})(x+ac^{m+2})} \\ & \left. + \frac{(1-c^m) \dots (1-c^{m+3})}{(1-c) \dots (1-c^4)} \cdot \frac{a^4 c^6}{(x+ac^m) \dots (x+ac^{m+3})} + \dots \right). \end{aligned}$$

Für  $c=1$ , in welchem Falle, wie schon erwähnt, die Transformation einer Reihe noch möglich ist, geht obiger Ausdruck für  $C_k^i(\alpha)$  über in

$$C_k^i(\alpha) = a^i \cdot \frac{k(k-1) \dots (k-i+1)}{1 \cdot 2 \dots i}$$

und man erhält dann, wenn man noch  $\frac{1}{x} = z$  setzt, folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} & A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \dots \\ & = A_0 + A_1 \cdot \frac{z}{1+az} + (aA_1 + A_2) \cdot \frac{z^2}{(1+az)^2} + (a^2 A_1 + 2aA_2 + A_3) \cdot \frac{z^3}{(1+az)^3} \\ & \quad + (a^3 A_1 + 3a^2 A_2 + 3aA_3 + A_4) \cdot \frac{z^4}{(1+az)^4} + \dots, \end{aligned}$$

welche sich auch durch die Substitution  $\frac{z}{1+az} \cdot \left(1 - \frac{az}{1+az}\right)^{-1}$  für  $z$  ergibt.

München, im September 1860.