21.

Mémoire sur une formule d'analyse.

(Par Mr. Joseph Liouville à Paris.)

I.

1. Dans mon mémoire sur quelques questions de Géométrie et de Mécanique, j'ai donné la formule

$$A. \int_0^x \varphi(x+a) a^{\mu-1} da = (-1)^\mu \Gamma(\mu) \int^\mu \varphi(x) dx^\mu$$

dans laquelle μ est > 0 et où $\Gamma(\mu)$ représente, suivant la notation de Legendre, l'intégrale Eulérienne de seconde espèce $\int_0^\infty e^{-\theta} \cdot \theta^{\mu-1} d\theta$. Cette relation entre les dérivées à indices quelconques et les intégrales définies est une conséquence presque immédiate de notre définition des différentielles. On sait qu'après avoir remplacé la fonction $\varphi(x)$ par un certain développement en série de la forme $\sum A_m e^{mx}$, nous regardons l'intégrale $\int^\mu \varphi(x) dx^\mu$ comme la représentation abrégée de la série nouvelle $\sum A_m \frac{e^{mx}}{m^\mu}$, qui se déduit de la première, à l'aide d'une opération très simple. D'après la démonstration développée au 21^{ème} cahier du journal de l'Ecole polytechnique, page 8., diverses conditions doivent être remplies pour que la formule (A.) soit exacte.

1°. Il faut que dans le développement exponentiel $\sum A_m e^{mx}$ de la fonction $\varphi(x)$, les exposants m soient tous de la forme $m = -p + q\sqrt{-1}$, c'est-à-dire que la partie réelle de ces exposants doit être négative: quant à la partie imaginaire de m , son signe et sa grandeur importent peu.

2°. Il faut en outre que se développement conserve la même forme si l'on change x en $x+a$ et que l'on attribue ensuite à a une valeur réelle et positive quelconque. En d'autres termes, il faut que l'égalité:

$$\varphi(x+a) = \sum A_m e^{m(x+a)}$$

subsiste pour toutes les valeurs de a comprises entre 0 et $\frac{1}{\theta}$.

2. Il y a plusieurs manières de parvenir à la formule (A.): elles conduisent en général à des résultats semblables. Celle que j'ai adoptée, dans le mémoire cité plus haut, me paraît la plus simple et la plus directe

de toutes. On peut encore démontrer notre théorème en regardant l'intégrale $\int^\mu \varphi(x) dx^\mu$ comme la vraie valeur d'une expression réduite à la forme $\frac{0}{0}$, conformément à la théorie que j'ai exposée dans un autre endroit. En effet si la fonction $\varphi(x)$ ne contient dans son développement exponentiel $\sum A_m e^{mx}$ que des exposants de la forme $m = -p + q\sqrt{-1}$, on soit que la valeur de l'intégrale $\int^\mu \varphi(x) dx^\mu$ coïncide avec celle que l'on obtient en faisant $h = 0$ dans la suite infinie

$$P_h = \frac{h^\mu}{(-1)^\mu} \left(\varphi(x) + \frac{\mu}{1} \varphi(x+h) + \frac{\mu(\mu+1)}{1.2} \varphi(x+2h) + \dots \right)$$

en sorte que si la quantité h est supposée infiniment petite, on a rigoureusement

$$\int^\mu \varphi(x) dx^\mu = \frac{h^\mu}{(-1)^\mu} \left(\varphi(x) + \frac{\mu}{1} \varphi(x+h) + \frac{\mu(\mu+1)}{1.2} \varphi(x+2h) + \dots \right).$$

En désignant par T_n le terme général de la série

$$\varphi(x) + \frac{\mu}{1} \varphi(x+h) + \frac{\mu(\mu+1)}{1.2} \varphi(x+2h) + \dots,$$

on aura

$$T_n = \frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)\dots(\mu+n-1)}{1.2.3\dots n},$$

et l'égalité précédente deviendra

$$\int^\mu \varphi(x) dx^\mu = \frac{h^\mu}{(-1)^\mu} (T_0 + T_1 + T_2 + \dots + T_n + \dots).$$

Maintenant il faut observer que h^μ est une quantité infiniment petite puisque μ est > 0 . Il résulte de là qu'on peut, sans erreur sensible, faire abstraction d'un nombre quelconque des premiers termes du second membre de notre équation, et tenir compte seulement des derniers termes qui, étant en nombre infini, donnent un produit fini lorsqu'on multiplie leur somme par h^μ . Soit donc p un nombre entier aussi grand qu'on voudra, et il sera permis d'écrire

$$\int^\mu \varphi(x) dx^\mu = \frac{h^\mu}{(-1)^\mu} (T_p + T_{p+1} + \dots + T_n + \dots).$$

Mais lorsque n est une quantité très considérable, l'expression de T_n se simplifie à l'aide des formules connues pour le calcul des produits composés d'un grand nombre de facteurs, et devient à peu près

$$T_n = \frac{n^{\mu-1} \varphi(x+nh)}{\Gamma(\mu)}.$$

En y faisant successivement $n = p$, $n = p+1$, etc., on formera les divers termes T_p , T_{p+1} , etc., et on trouvera

$$\int^{\mu} \varphi(x) dx^{\mu} = \frac{h^{\mu}}{(-1)^{\mu} \Gamma(\mu)} (p^{\mu-1} \varphi(x+ph) + (p+1)^{\mu-1} \varphi(x+(p+1)h) + \dots).$$

Cette égalité prend une forme plus commode, en ajoutant au second membre la quantité

$$\frac{h^{\mu}}{(-1)^{\mu} \Gamma(\mu)} (\varphi(x+h) + 2^{\mu-1} \varphi(x+2h) + \dots + (p-1)^{\mu-1} \varphi(x+(p-1)h)),$$

dont la valeur est négligeable à cause du facteur évanouissant h^{μ} . Le résultat qu'on obtient alors peut être écrit ainsi :

$$\int^{\mu} \varphi(x) dx^{\mu} = \frac{1}{(-1)^{\mu} \Gamma(\mu)} \sum_{n=1}^{n=\infty} h^{\mu} n^{\mu-1} \varphi(x+nh)$$

le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs entières de n , comprises entre $n=0$ et $n=\infty$.

Ainsi en attribuant à n les valeurs successives $n=1, n=2, n=3, \dots$ jusqu'à $n=\infty$, on a

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} h^{\mu} n^{\mu-1} \varphi(x+nh) = (-1)^{\mu} \Gamma(\mu) \int^{\mu} \varphi(x) dx^{\mu}.$$

Actuellement posez $nh = \alpha$, et, parceque h est infiniment petit, regardez l'accroissement h de α comme égal à $d\alpha$, vous transformerez le premier membre en une intégrale définie, et cette intégrale sera précisément $\int_0^{\infty} \varphi(x+\alpha) \alpha^{\mu-1} d\alpha$. Donc, en remplaçant la somme Σ par l'intégrale que je viens d'écrire, l'équation précédente deviendra l'équation (A.) qu'il s'agissait de démontrer.

II.

3. Dans le journal de l'Ecole polytechnique, je me suis servi de formule (A.) pour résoudre plusieurs problèmes dans lesquels il s'agissait, au fond, de déterminer la fonction $\varphi(x)$ à l'aide de l'équation :

$$\int_0^{\infty} \varphi(x+\alpha) \alpha^{\mu-1} d\alpha = F(x),$$

$F(x)$ étant une quantité connue, assujétie en général à devenir nulle quand $x = +\infty$.

Pour fixer les idées, et indiquer par un exemple la manière de procéder, supposons que $\mu = \frac{1}{2}$, et proposons nous de déterminer $\varphi(x)$ par la condition

$$1. \int_0^{\infty} \varphi(x+\alpha) \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}} = F(x).$$

Comme la formule (A.) nous donne

$$\int_0^\infty \varphi(x+\alpha) \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}} = \sqrt{-1} \sqrt{\pi} \int^{\frac{1}{2}} \varphi(x) dx^{\frac{1}{2}},$$

nous transformerons l'équation du problème, dans celle-ci :

$$\sqrt{-1} \sqrt{\pi} \int^{\frac{1}{2}} \varphi(x) dx^{\frac{1}{2}} = F(x)$$

d'où nous tirerons :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{-1} \sqrt{\pi}} \cdot \frac{d^{\frac{1}{2}} F(x)}{dx^{\frac{1}{2}}}.$$

Cette valeur de $\varphi(x)$ contient implicitement un nombre illimité de constantes arbitraires, à cause de la fonction complémentaire qu'on doit ajouter aux différentielles à indices quelconques, pour leur donner toute la généralité qu'elles comportent. Mais parmi les valeurs de $\varphi(x)$, il y en a une et une seule qui possède la propriété de diminuer jusqu'à zéro quand x augmente jusqu'à l'infini positif; et c'est celle là dont nous devons faire choix, puisque la fonction $F(x)$ étant, par hypothèse, de telle nature que l'on ait $F\left(\frac{1}{0}\right) = 0$, l'intégrale $\int_0^\infty \varphi(x+\alpha) \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}}$, et à *fortiori* la fonction $\varphi(x)$ doivent s'annuler aussi lorsque $x = \frac{1}{0}$.

Maintenant si l'on observe que

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} F(x)}{dx^{\frac{1}{2}}} = \int^{\frac{1}{2}} F'(x) dx^{\frac{1}{2}},$$

$F'(x)$ étant l'expression abrégée de $\frac{dF(x)}{dx}$, on trouvera par le secours de la formule (A.):

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} F(x)}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{-1} \sqrt{\pi}} \int_0^\infty F'(x+\beta) \frac{d\beta}{\sqrt{\beta}}$$

et on en conclura :

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty F'(x+\beta) \frac{d\beta}{\sqrt{\beta}}$$

valeur qui satisfait à la condition $\varphi\left(\frac{1}{0}\right) = 0$, et au moyen de laquelle l'égalité (1.) aura lieu.

4. En changeant x en $x+\alpha$ et reportant ensuite dans l'équation (1.) la valeur de $\varphi(x+\alpha)$ qui en résulte, il vient :

$$\int_0^\infty \int_0^\infty F'(x+\alpha+\beta) \frac{d\alpha d\beta}{\sqrt{\alpha\beta}} = -\pi F(x),$$

résultat singulier qui nous fait connaître la valeur d'une intégrale double assez remarquable, et qu'il nous sera facile de démontrer directement de la manière suivante.

Changeont α en α^2 et β en β^2 : désignons en outre par ζ l'intégrale double en question, et nous aurons

$$\zeta = 4 \int_0^\infty \int_0^\infty F'(x + \alpha^2 + \beta^2) d\alpha d\beta.$$

Considérant donc α et β comme l'abscisse et l'ordonnée d'un point M appartenant à un plan, nous voyons que l'intégrale est relative à tous les points de ce plan, situés dans l'angle des coordonnées positives. Mais rien n'empêche de substituer aux coordonnées rectangulaires α, β des coordonnées polaires ayant la même origine, et consistant dans un rayon vecteur r et un angle ω compris entre ce rayon vecteur et l'axe des α . Nous aurons de la sorte

$$\alpha^2 + \beta^2 = r^2, \quad d\alpha d\beta = r dr d\omega,$$

et

$$\zeta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \int_0^\infty F'(x + r^2) r dr.$$

Les deux intégrations s'effectuent de suite, et si l'on suppose la fonction $F(x + r^2)$ telle qu'elle se réduise à zéro quand $r = \infty$, on trouve $\zeta = -\pi F(x)$, ce qu'il fallait démontrer.

5. On obtiendra des résultats semblables, en considérant l'équation générale

$$2. \int_0^\infty \varphi(x + \alpha) \alpha^{\mu-1} d\alpha = F(x).$$

C'est ce que nous allons prouver. Toutefois dans la vue de simplifier les calculs, nous supposerons $\mu < 1$, ce qui au fond n'altérera en rien la généralité de notre analyse.

En remplaçant, dans l'équation (2.), l'intégrale définie par sa valeur en intégrale indéfinie, il vient:

$$(-1)^\mu \Gamma(\mu) \int^\mu \varphi(x) dx^\mu = F(x)$$

d'où l'on tire:

$$\varphi(x) = \frac{1}{(-1)^\mu \Gamma(\mu)} \cdot \frac{d^\mu F(x)}{dx^\mu},$$

ou:

$$\varphi(x) = \frac{1}{(-1)^\mu \Gamma(\mu)} \int^{1-\mu} F'(x) dx^{1-\mu}.$$

Donc en exprimant à son tour en quadrature définie, l'intégrale du second membre, nous aurons:

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\Gamma(\mu) \Gamma(1-\mu)} \int_0^\infty F'(x + \beta) \frac{d\beta}{\beta^\mu}.$$

Cette valeur de $\varphi(x)$ est la seule qui puisse satisfaire à l'équation (2.), puisque nulle autre ne s'accorde avec la condition $F\left(\frac{1}{0}\right) = 0$, laquelle exige qu'on ait $\varphi\left(\frac{1}{0}\right) = 0$. Changeons donc x en $x + \alpha$, et substituons dans l'équation (2.) la valeur de $\varphi(x + \alpha)$ ainsi obtenue; nous tomberons sur l'égalité

$$\int_0^\infty \int_0^\infty F'(x + \alpha + \beta) \frac{\alpha^{\mu-1}}{\beta^\mu} d\alpha d\beta = -\Gamma(\mu)\Gamma(1-\mu)F(x),$$

qui doit être satisfaite identiquement, et qu'il s'agit de vérifier par une méthode indépendante de la considération des différentielles à indices quelconques. Pour cela je désigne par ζ la quadrature double qui s'y trouve; je remplace α par α^2 , β par β^2 , et j'ai:

$$\zeta = 4 \int_0^\infty \int_0^\infty F'(x + \alpha^2 + \beta^2) \frac{\alpha^{2\mu-1}}{\beta^{2\mu-1}} d\alpha d\beta.$$

On transformera les coordonnées rectangulaires α, β en coordonnées polaires, si l'on pose

$$\alpha = r \cos \omega, \quad \beta = r \sin \omega$$

et on en déduira

$$\zeta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \partial \omega \int_0^\infty F'(x + r^2) \cot^{2\mu-1} \omega \cdot r dr.$$

On effectue aisément l'intégration par rapport à r ; et puisque l'on suppose $F(x + r^2) = 0$ quand $r = \infty$, il vient

$$\zeta = -2F(x) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cot^{2\mu-1} \omega \cdot d\omega.$$

Je pose $\cot \omega = \sqrt{z}$, et j'ai ainsi:

$$\zeta = -F(x) \int_0^\infty \frac{z^{\mu-1} dz}{1+z}.$$

Or ce dernier résultat, d'après les propriétés des fonctions Γ (Voyez le 19^{ième} cahier du journal de l'Ecole polytechnique, page 479.) ne diffère pas de l'équation qu'il s'agissait de vérifier.

III.

6. La formule (A.) doit être regardée comme très importante dans la théorie des différentielles à indices quelconques. C'est en effet à l'aide de la relation qu'elle établit entre ces différentielles et les quadratures définies, qu'on parvient à ramener aux dérivées fractionnaires et à résoudre d'une manière directe un grand nombre de questions difficiles. Parmi ces questions, les unes sont relatives à la Géométrie et à

la Mécanique; et ce que nous avons écrit à ce sujet dans le journal de l'Ecole polytechnique suffit pour en donner une idée, quoique nous n'ayons proposé que des exemples extrêmement simples. Mais c'est principalement par ses applications à la théorie des intégrales définies que le calcul des différentielles à indices quelconques peut être utile ainsi que nous espérons le montrer par la suite.

Il existe un grand nombre de formules semblables à la formule (A.) et qui peuvent aisément s'en déduire par diverses transformations. Nous allons en indiquer quelques unes.

7. Dans la formule (A.), je change x en x^2 : elle devient

$$\int_0^\infty \varphi(x^2 + \alpha) \alpha^{\mu-1} d\alpha = (-1)^\mu \Gamma(\mu) \int^\mu \varphi(x^2) d(x^2)^\mu.$$

Soit $F(x)$ une fonction nouvelle telle que l'on ait:

$$\varphi(x^2) = \frac{F(x)}{x^2},$$

et par conséquent:

$$\varphi(x^2 + \alpha) = \frac{F(\sqrt{x^2 + \alpha})}{x^2 + \alpha}.$$

En remplaçant partout la fonction $\varphi(x)$ par la fonction $F(x)$, nous obtiendrons:

$$\int_0^\infty \frac{F(\sqrt{x^2 + \alpha})}{x^2 + \alpha} \alpha^{\mu-1} d\alpha = (-1)^\mu \Gamma(\mu) \int^\mu \frac{F(x)}{x^2} d(x^2)^\mu.$$

Si maintenant nous substituons à la lettre α une autre lettre β liée à la première par l'égalité.

$$\alpha = \frac{x^2}{\tan^2 \beta},$$

les limites de l'intégrale deviendront $\beta = 0, \beta = \frac{\pi}{2}$; et nous trouverons, tout calcul fait:

$$(B.) \int_0^{\frac{\pi}{2}} F\left(\frac{x}{\sin \beta}\right) \frac{d\beta}{\tan^{2\mu-1} \beta} = (-1)^\mu \cdot \frac{\Gamma(\mu)}{2 x^{2\mu-2}} \int^\mu \frac{F(x)}{x^2} d(x^2)^\mu.$$

C'est la formule à laquelle je voulais parvenir. En y posant $\mu = \frac{1}{2}$, elle se réduit à:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} F\left(\frac{x}{\sin \beta}\right) d\beta = \frac{\sqrt{-1} \sqrt{\pi}}{2} \cdot x \cdot \int^{\frac{1}{2}} \frac{F(x)}{x^2} d(x^2)^{\frac{1}{2}},$$

égalité déjà démontrée dans 21^{ème} cahier du journal de l'Ecole polytechnique, page 42.

En changeant dans cette égalité $F(x)$ en $F(x^2)$, puis (x) en $\sqrt{x}$, elle deviendra plus simplement:

$$\int^{\frac{\pi}{2}} F\left(\frac{x}{\sin^2 \beta}\right) d\beta = \frac{\sqrt{-1} \sqrt{\pi} \sqrt{x}}{2} \int^{\frac{1}{2}} \frac{F(x)}{x} dx;$$

si donc on pose successivement

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{x}\right)}} \quad \text{et} \quad F(x) = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{x}\right)},$$

on tombera sur ces deux résultats remarquables:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\beta}{\sqrt{\left(1 - \frac{\sin^2 \beta}{x}\right)}} = \frac{\sqrt{-1} \sqrt{\pi} \sqrt{x}}{2} \int^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - x)}}$$

et

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\beta \sqrt{\left(1 - \frac{\sin^2 \beta}{x}\right)} = \frac{\sqrt{-1} \sqrt{\pi} \sqrt{x}}{2} \int^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{x-1}}{x \sqrt{x}} dx,$$

qui nous montrent que les fonctions elliptiques complètes de première et de seconde espèce, considérées comme fonctions du module, peuvent toujours se transformer en intégrales indéfinies à indices fractionnaires prises par rapport à ce module. Ce théorème s'étend aux fonctions complètes de troisième espèce, et on trouverait de la même manière:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\beta}{\left(1 + \frac{a \sin^2 \beta}{x}\right) \sqrt{\left(1 - \frac{\sin^2 \beta}{x}\right)}} = \frac{\sqrt{-1} \sqrt{\pi} \sqrt{x}}{2} \int^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{x} \cdot dx}{(x+a) \sqrt{(x-1)}}.$$

8. Par des transformations très simples, la formule (B.) en fournira deux autres que je rapporterai ici parcequ'elles trouvent leur application dans des problèmes physico-mathématiques. Ces formules sont

$$(C.) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x \cos \omega) d\omega = \frac{\sqrt{-1} \sqrt{\pi}}{2x} \int^{\frac{1}{2}} F(x) x^2 d\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

et

$$(D.) \quad \int_0^{\pi} F(x \cos \omega) d\omega = \frac{\sqrt{-1} \sqrt{\pi}}{2x} \int^{\frac{1}{2}} (F(x) + F(-x)) x^2 d\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Mais au lieu de m'arrêter à les démontrer, j'indiquerai en peu de mots une manière nouvelle de parvenir au théorème que j'ai donné dans le 21^{ième} cahier du journal de l'Ecole polytechnique, page 47., et qui m'a servi à généraliser le problème des tautochrones. La formule à laquelle je fais allusion est la suivante:

$$(E.) \quad \int_0^1 \varphi\left(\frac{\theta}{x}\right) (1-\theta)^p d\theta = (-1)^{p+1} \cdot x \cdot \Gamma(p+1) \int^{\frac{1}{x}} \frac{\varphi\left(\frac{1}{x}\right) dx^{p+1}}{x^{p+2}}.$$

Or, pour la déduire de l'équation (B.), changez d'abord x en $\sqrt{x}$, et fai-

tes $\sin \beta = \sqrt{\theta}$; cela vous donnera :

$$\int_0^1 F\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\theta}}\right) \frac{(1-\theta)^{\mu-1} d\theta}{\theta^{\mu}} = (-1)^{\mu} \frac{\Gamma(\mu)}{x^{\mu-1}} \int^{\mu} \frac{F(\sqrt{x})}{x} dx^{\mu}.$$

Maintenant posez $F(\sqrt{x})x^{\mu} = \varphi\left(\frac{1}{x}\right)$, $\mu = p+1$: vous trouverez tout de suite :

$$\int_0^1 \varphi\left(\frac{\theta}{x}\right) (1-\theta)^p d\theta = (-1)^{p+1} \cdot x \cdot \Gamma(p+1) \int \frac{\varphi\left(\frac{1}{x}\right) dx^{p+1}}{x^{p+2}}$$

ce qui est précisément la formule (E.). Dans le journal de l'Ecole polytechnique déjà cité, nous avons démontré cette formule en développant la fonction $\varphi\left(\frac{\theta}{x}\right)$ en série ordonnée suivant les puissances de x , et en partant de la relation connue

$$\int_0^1 \theta^m (1-\theta)^p d\theta = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+p+2)}$$

qui existe entre les intégrales Eulériennes de première et de seconde espèce. Réciproquement notre formule (E.) qui vient à l'instant même d'être établie d'une manière directe, tout à fait indépendante de cette relation, pourrait à son tour servir à la démontrer. Il suffirait pour cela de poser $\varphi(x) = x^m$ dans les deux membres de l'équation et d'observer qu'on a

$$\int^{p+1} \frac{dx^{p+1}}{x^{m+p+2}} = \frac{1}{(-1)^{p+1}} \cdot \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+p+2) x^{m+1}}.$$

IV.

9. J'ai déjà eu occasion de montrer l'usage de la formule (E.) pour résoudre le problème si connu de la tautochrone dans le vide et pour le généraliser. On peut aussi par la même méthode déterminer la tautochrone dans un milieu résistant comme le carré de la vitesse.

Pour cela soit AmM la courbe tautochrone dont A est le point le plus bas : la nature de cette courbe consiste, comme on sait, en ce que si l'on place en M , sans vitesse initiale, un mobile soumis à la fois à l'action de la pesanteur et à celle d'un milieu résistant, ce mobile emploiera toujours le même temps T pour aller de M en A , quel que soit le point de départ M .

Supposons donc qu'au bout du temps t , le mobile soit descendu de M en m et désignons l'arc Am par s . L'équation du mouvement sera de la forme :

$$(a.) \quad \frac{d^2 s}{dt^2} = -g \frac{dx}{ds} + n \left(\frac{ds}{dt} \right)^2$$

g étant l'intensité de la pesanteur, n le coefficient de la résistance du milieu, et x l'ordonnée verticale du point m comptée à partir du plan horizontal mené par l'origine A . Soit en outre $x = h$ la valeur de x qui répond à $t = 0$, ou, si l'on veut, l'ordonnée verticale du point M ; et désignons par b l'intégrale définie $\int_0^h e^{-2ns} dx$. Enfin observons que, pour $t = 0$, on a $\frac{ds}{dt} = 0$; et que pour $x = 0$, on a $t = T$ quel que soit h .

Cela posé, en intégrant l'équation (a.), nous trouverons :

$$T = \frac{1}{\sqrt{(2g)}} \int_0^h \frac{e^{-ns} \cdot \frac{ds}{dx} \cdot dx}{\sqrt{\left(b - \int_0^x e^{-2ns} dx\right)}}$$

Je change actuellement de variable indépendante et pour cela je fais :

$$\int_0^x e^{-2ns} dx = u.$$

Les limites de l'intégrale deviennent $u = 0$, $u = b$: de plus on a :

$$e^{-ns} \frac{ds}{dx} dx = e^{ns} \frac{ds}{du} du.$$

Il vient donc :

$$T = \frac{1}{\sqrt{(2g)}} \int_0^b \frac{e^{ns} \frac{ds}{du} du}{\sqrt{(b-u)}}.$$

J'observe que la quantité $e^{ns} \frac{ds}{du}$ est implicitement une fonction de u : en la remplaçant par $\psi(u)$, j'obtiens :

$$T = \frac{1}{\sqrt{(2g)}} \int_0^b \frac{\psi(u) du}{\sqrt{(b-u)}} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{(2g)}} \int_0^1 \frac{\psi(b\theta) d\theta}{\sqrt{(1-\theta)}}.$$

Cette valeur, en vertu de la formule (E.), se transforme dans la suivante :

$$T = \frac{\sqrt{-1} \sqrt{\pi}}{\sqrt{(2g)} \sqrt{b}} \int^{\frac{1}{2}} b \sqrt{b} \psi(b) d\left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{2}},$$

de laquelle on déduit :

$$\psi(b) = \frac{T}{\sqrt{-1} \sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{(2g)}}{b \sqrt{b}} \cdot \frac{d^{\frac{1}{2}} \sqrt{b}}{d\left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

ou, plus simplement :

$$\psi(b) = \frac{T \sqrt{(2g)}}{\pi \sqrt{b}}.$$

Comme cette dernière égalité subsiste quel que soit b , on peut y changer

b en u , et on a :

$$\psi(u) \text{ ou } e^{ns} \frac{ds}{dx} = \frac{T\sqrt{2g}}{\pi\sqrt{u}}.$$

L'arc s étant en outre lié à u par la relation :

$$u = \int_0^x e^{-2ns} dx,$$

on trouve, en la combinant avec la précédente pour éliminer u :

$$\int_0^x e^{-2ns} dx = \frac{2gT^2}{\pi^2} e^{-2ns} \left(\frac{dx}{ds} \right)^2$$

équation d'où l'on tirera la valeur de x en s . Pour y parvenir, différencions en les deux membres et posons en même temps $\frac{dx}{ds} = p$. Il nous viendra

$$1 = \frac{4gT^2}{n^2} \left(\frac{dp}{ds} - np \right)$$

équation linéaire dont je déduis

$$p \text{ ou } \frac{\partial x}{\partial s} = Ce^{ns} - \frac{\pi^2}{4ngT^2}.$$

Si l'on exige, comme cela est naturel, que pour $x=0$, on ait $\frac{\partial x}{\partial s}=0$,

la constante arbitraire C doit être prise $= \frac{\pi^2}{4ngT^2}$ et l'on en conclut

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\pi^2}{4ngT^2} (e^{ns} - 1).$$

Intégrant de nouveau et observant que les deux variables x et s doivent s'évanouir ensemble, on a donc finalement

$$x = \frac{\pi^2}{4n^2gT^2} (e^{ns} - ns - 1)$$

pour l'équation de la courbe tautochrone; et on peut vérifier qu'en y posant $n=0$, cette équation se réduit à $x = \frac{\pi^2 s^2}{8gT^2}$ et redonne la cycloïde.

10. Pour le cas particulier où $n=0$, cette analyse s'accorde avec celle que nous avons développée dans le journal de l'Ecole polytechnique. Mais là nous avons moins pour but de résoudre le problème des tautochrones dans le vide que de chercher à généraliser ce problème, en assujettissant le temps T non plus à rester indépendant de h , mais au contraire à varier proportionnellement à une fonction donnée $f(h)$. Cette extension élégante d'une question si connue dérive de nos formules avec une extrême facilité; mais nous devons dire qu'*Abel* en a eu la première idée, et qu'il y a été conduit par des considérations ingénieuses, quoique un peu indirectes. Voyez le journal de Mr. *Crelle*, tome 1^{er}, page 154.

Considéré analytiquement, le problème dont nous parlons pourrait être énoncé de la manière suivante :

Déterminer la fonction $\Phi(x)$ de telle sorte que l'on ait $\Phi(x)=0$ et

$$\beta. \int_0^x \frac{\varphi'(\theta) d\theta}{\sqrt{x-\theta}} = f(x)$$

$f(x)$ étant une quantité connue, et $\varphi'(\theta)$ désignant la dérivée $\frac{d\varphi(\theta)}{d\theta}$.
Il est clair que l'on suppose implicitement $f(0)=0$.

Abel a trouvé que la valeur de $\Phi(x)$ cherchée est fournie par cette formule très simple

$$\Phi(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{f(\theta) d\theta}{\sqrt{x-\theta}}.$$

Pour obtenir cette valeur par notre méthode, observons d'abord que de la formule (I') on déduit aisément :

$$\int_0^x \frac{\varphi'(\theta) d\theta}{\sqrt{x-\theta}} = \frac{\sqrt{-1} \sqrt{\pi}}{\sqrt{x}} \int^{\frac{1}{x}} \varphi'(x) x \sqrt{x} d\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}};$$

moyennant quoi, l'équation (β .) devient :

$$\frac{\sqrt{-1} \sqrt{\pi}}{\sqrt{x}} \int^{\frac{1}{x}} \varphi'(x) x \sqrt{x} d\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = f(x)$$

et donne

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{-1} \sqrt{\pi} \cdot x \sqrt{x}} \cdot \frac{d^{\frac{1}{2}}(\sqrt{x} f(x))}{d\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

c'est-à-dire

$$\varphi'(x) = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{\pi} \cdot x \sqrt{x}} \int^{\frac{1}{x}} x^2 \frac{d(\sqrt{x} f(x))}{dx} d\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Mais, en vertu de la formule (E.), on a :

$$\int^{\frac{1}{x}} x^2 \frac{d(\sqrt{x} f(x))}{dx} d\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{x \sqrt{x}}{\sqrt{-1} \sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{d(\sqrt{\alpha x} f(\alpha x))}{\alpha dx} \cdot \frac{\sqrt{\alpha} d\alpha}{\sqrt{1-\alpha}}.$$

Donc on a aussi :

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{d(\sqrt{\alpha x} f(\alpha x))}{\alpha dx} \cdot \frac{\sqrt{\alpha} d\alpha}{\sqrt{1-\alpha}}.$$

Intégrant donc, et déterminant la constante de telle sorte que x et $\Phi(x)$ s'évanouissent ensemble, puis posant $\alpha x \equiv \theta$, on obtient définitivement :

$$\Phi(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{f(\theta) d\theta}{\sqrt{x-\theta}};$$

ce qui est le résultat découvert par Abel. Cet illustre Géomètre a présenté sa solution sous une forme un peu plus générale qu'il nous, aurait été également aisé de déduire de nos formules; c'est uniquement pour abrégé que nous avons considéré le cas le plus simple.

V.

11. Les recherches précédentes appartiennent à la partie élémentaire du calcul des dérivées à indices quelconques, puisqu'en désignant par y la quantité dont on demandait la valeur et par $f(x)$ une fonction donnée de x , on est toujours tombé, après quelques transformations, sur une équations à deux termes de la forme

$$\int^{\mu} y dx^{\mu} = f(x),$$

d'où l'on a conclu par la définition même des différentielles :

$$y = \frac{d^{\mu} f(x)}{dx^{\mu}}.$$

Mais la question deviendra très vaste et très épineuse si la nature des problèmes qu'on veut résoudre mène à de véritables équations différentielles à indices fractionnaires, dans lesquelles les variables ne se séparent pas immédiatement. C'est ce qui arrivera, par exemple, si vous cherchez à déterminer la fonction inconnue $\varphi(x)$ en l'assujettissant à la condition :

$$\int_0^{\infty} \varphi(x+\alpha) \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}} + \varphi(x) = f(x).$$

En effet, puisque l'on a :

$$\int_0^{\infty} \varphi(x+\alpha) \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}} = \sqrt{-1} \sqrt{\pi} \int^{\frac{1}{2}} \varphi(x) dx^{\frac{1}{2}},$$

cette équation de condition deviendra :

$$\sqrt{-1} \sqrt{\pi} \int^{\frac{1}{2}} \varphi(x) dx^{\frac{1}{2}} + \varphi(x) = f(x).$$

Pour intégrer cette équation, vous prendrez l'intégrale à indice $\frac{1}{2}$ des deux membres, et vous obtiendrez :

$$\sqrt{-1} \sqrt{\pi} \int \varphi(x) dx + \int^{\frac{1}{2}} \varphi(x) dx^{\frac{1}{2}} = \int^{\frac{1}{2}} f(x) dx^{\frac{1}{2}}.$$

Éliminant donc $\int^{\frac{1}{2}} \varphi(x) dx^{\frac{1}{2}}$ entre ces deux équations, vous trouverez :

$$\pi \int \varphi(x) dx + \varphi(x) = f(x) - \sqrt{-1} \sqrt{\pi} \int^{\frac{1}{2}} f(x) dx^{\frac{1}{2}}$$

égalité qui, par les méthodes du calcul ordinaire, vous servira à déterminer $\varphi(x)$. Le moyen d'intégration que je viens d'appliquer à un exemple est assez général : il comprend en effet toutes les équations linéaires à dérivées fractionnaires, quelle que soit la fonction connue placée dans leur second membre, pourvu que les coefficients des divers termes du premier membre puissent se réduire soit à des constantes, soit à des fonctions algébriques rationnelles et entières de la variable x .

12. Quelquefois on est conduit à des équations dans lesquelles les différenciations ne sont pas toutes relatives à la même variable indépendante. Telle est par exemple l'équation différentielle:

$$(\gamma.) \quad \frac{d^{\frac{1}{2}}y}{d(\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}} + \frac{d^{\frac{1}{2}}y}{dx^{\frac{1}{2}}} = F(x).$$

Ici vous rencontrer évidemment un degré de difficulté de plus; car il faut, avant de songer à intégrer l'équation $(\gamma.)$, trouver le moyen d'exprimer la différentielle $\frac{d^{\frac{1}{2}}y}{d(\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}}$, sous forme finie, à l'aide d'autres différentielles prises par rapport à la variable indépendante x ; ce qui n'est encore qu'un cas singulier de ce qu'on peut nommer le problème général *du changement de la variable indépendante*. Je vais indiquer en peu de mots comment j'opère ici le changement demandé, et comment j'en déduis l'intégrale de l'équation $(\gamma.)$.

Une des formules que trouve d'abord pour exprimer $\frac{d^{\frac{1}{2}}y}{d(\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}}$ en dérivées relatives à la variable x , est la suivante:

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}y}{d(\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{2} \int^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} \frac{d^{\frac{1}{2}}y}{dx^{\frac{1}{2}}} dx^{\frac{1}{2}}.$$

Je ne m'arrêterai pas à démontrer cette formule, laissant au lecteur le soin d'en constater l'exactitude, ce qui peut se faire de plusieurs manières. Maintenant si je porte dans l'équation $(\gamma.)$ la valeur de $\frac{d^{\frac{1}{2}}y}{d(\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}}$, je trouve;

$$\sqrt{2} \int^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} \frac{d^{\frac{1}{2}}y}{dx^{\frac{1}{2}}} dx^{\frac{1}{2}} + \frac{d^{\frac{1}{2}}y}{dx^{\frac{1}{2}}} = F(x).$$

Différenciant donc par rapport à l'indice $\frac{1}{2}$, puis tirant la valeur de $\frac{d^{\frac{1}{2}}y}{dx^{\frac{1}{2}}}$, j'obtiens:

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}y}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{d^{\frac{1}{2}}F(x)}{dx^{\frac{1}{2}}}}{1 + \sqrt{2} \cdot x^{\frac{1}{2}}},$$

d'où je conclus:

$$y = \int^{\frac{1}{2}} \frac{\frac{d^{\frac{1}{2}}F(x)}{dx^{\frac{1}{2}}} dx^{\frac{1}{2}}}{1 + \sqrt{2} \cdot x^{\frac{1}{2}}}.$$

Telle est la valeur de y qui satisfait à l'équation $(\gamma.)$.

13. Si quelque lecteur voulait s'exercer sur des questions conduisant à des équations différentielles à indices fractionnaires, je proposerais de déterminer la fonction $\varphi(x)$ qui satisfait à l'une des égalités suivantes:

$$\int_0^{\infty} \varphi(\sqrt{x^2 + a^2}) da + \int_0^{\infty} \varphi(x + a) \frac{da}{\sqrt{a}} = F(x),$$

$$x \int_0^\infty \varphi(\sqrt{x^2 + \alpha^2}) d\alpha + \int_0^\infty \varphi(x + \alpha) \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}} = F(x)$$

$$\int_0^\infty \varphi(x + \alpha) \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}} + \sqrt[4]{x} \cdot \varphi(x) = F(x)$$

lesquelles égalités se résolvent toutes trois immédiatement par les méthodes dont je viens de donner une idée, et conduisent à une valeur de $\varphi(x)$ exprimée sous forme finie, en intégrales définies. Il sera bon de comparer aussi la marche tracée par notre analyse avec celle dont on pourrait faire usage, en se bornant à l'analyse ordinaire.

Je regrette de ne pouvoir m'étendre davantage sur ce sujet; mais n'ayant pas, pour le moment, le loisir nécessaire, j'ai dû réduire ce petit mémoire à n'être qu'une espèce de commentaire de ceux que j'ai publiés dans le Journal de l'Ecole polytechnique. Peut-être cela suffira-t-il pour engager quelques géomètres à marcher dans le même voie. Je terminerai cet article en rappelant que si le calcul des dérivées fractionnaires s'applique d'une manière commode à la solution de divers problèmes, il le doit à sa définition fondée sur le développement exponentiel des fonctions. La considération de ce développement nous paraît d'autant mieux puisée dans la nature des choses, qu'elle seule fournit l'explication complète de ce qu'on a nommé l'analogie des puissances et des différences. Au reste comme une fonction donnée $f(x)$ peut être réduite de plusieurs manières en série de la forme $\sum A_m e^{mx}$, on doit avoir soin, pour ne pas se contredire, d'employer toujours le même développement dans le cours du même calcul. A bien parler, dans cette analyse, on ne considère pas proprement la fonction $f(x)$, mais plutôt un certain développement exponentiel qui lui est équivalent ou qu'on lui substitue avec avantage; et c'est à ce développement qu'on applique les raisonnements et les calculs. En thèse générale il est naturel de choisir la série $\sum A_m e^{mx}$ de telle sorte qu'elle représente identiquement la valeur de $f(x)$ (sauf la condition de convergence). Il faut entendre dans ce sens là les réflexions contenues dans le 21^{ème} cahier du journal de l'Ecole polytechnique page 5 et page 77. Mais, dans quelques circonstances, on peut employer aussi les développements analogues à ceux de *Fourier*: seulement on doit opérer alors avec précaution, afin d'éviter certaines difficultés que nous avons signalées à la page 124 de l'ouvrage cité, et sur lesquelles nous aurons sans doute lieu de revenir un jour.

Paris, le 18. Juin 1833.