**2. Über eine Methode
zur Messung von logarithmischen Dekrementen
und Schwingungszahlen elektromagnetischer
Schwingungssysteme;
von L. Mandelstam und N. Papalexi.**

Die Aufgabe, welche die Methode verfolgt, ist die folgende: Es liegt ein elektromagnetisches schwingendes System vor. Die Form des Schwingungsvorganges ist zu bestimmen.

Die prinzipiellen Vorteile, welche diese Methode gegenüber den bisher benutzten uns zu bieten scheint, seien gleich hier erwähnt.

1. Die Gleichheit der Frequenzen von zwei Schwingungskreisen wird durch das Nullwerden eines Effektes ($\int_0^{\infty} i_1 i_2 dt$ -Effektes) angezeigt, so daß die Frequenz eines unbekannten Kreises außerordentlich scharf bestimmt werden kann.

2. Das logarithmische Dekrement ergibt sich aus der Lage der Extremwerte desselben Effektes. Die Ermittlung der Lage ist aber im allgemeinen genauer und bequemer auszuführen als die quantitative Bestimmung einer Reihe von Ausschlägen.

3. Die Ausschläge des zum Anzeigen des $\int i_1 i_2 dt$ -Effektes benutzten Instrumentes können so gut wie vollständig *unabhängig* von dem unregelmäßigen Gang des Unterbrechers bzw. der Wechselstromquelle gemacht werden, was ebenfalls eine Erhöhung der Meßgenauigkeit bedingt.

Wenn die Differentialgleichung des zu untersuchenden Vorganges bekannt ist — und man nimmt meistens an, daß das schwingende System einem System von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten genügt — so kann man — und in sehr speziellen Fällen wird man es tun — aus den Konstanten der Gleichungen die Parameter der Form rechnerisch bestimmen. Doch ist dieser Weg in den meisten

Fällen nicht gangbar. Handelt es sich z. B. um die Schwingungsform eines Kondensatorkreises mit Funkenstrecke, so kann man die Größe des „Widerstandes“ der Funkenstrecke im voraus gar nicht bestimmen. In solchen Fällen muß man vielmehr zu einer indirekten Methode greifen. Eine solche Methode ist z. B. die Bjerknessche Resonanzmethode. Man läßt das zu untersuchende System auf einen Kondensatorkreis — den Resonanzkreis — wirken und nimmt eine sogenannte Resonanzkurve irgend einer Wirkung (z. B. des Stromeffektes oder des Potentialeffektes) auf. Die Form des Schwingungsvorganges in dem zu untersuchenden System, also auch die auf den Resonanzkreis wirkende elektromotorische Kraft E , wird dabei der Funktion $a e^{-\delta t} \sin(\nu t + \varphi)$ gleichgesetzt. Weiter wird angenommen, daß der Vorgang im Resonanzkreis durch die Differentialgleichung

$$p \frac{\partial i}{\partial t} + w i + \frac{q}{c} = E$$

bestimmt ist. Aus der Resonanzkurve werden nun $\varepsilon = 2\pi(\delta/\nu)$, das logarithmische Dekrement und $n = 2\pi\nu$, die Schwingungszahl ermittelt.

Bei dieser Methode sind die folgenden zwei *wesentlichen Voraussetzungen* gemacht.

Erstens ist vorausgesetzt, daß man dem *Funken* einen *konstanten*, wenn auch zunächst unbekannten Widerstand zuschreiben kann, und daß somit der zu untersuchende Kondensatorkreis der Thomsonschen Differentialgleichung genügt, und

zweitens, daß die *Koppelung* ρ zwischen dem zu untersuchenden Kondensatorkreis und dem Resonanzkreis *extrem lose* ist.

Unter der Annahme der Konstanz des Funkenwiderstandes hat M. Wien¹⁾ die Bedingung der extremlosen Koppelung exakt formuliert. Es muß

$$\rho^2 \text{ sehr klein gegen } \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\pi_2} \text{ sein.}$$

Die erste Voraussetzung des konstanten Widerstandes trifft sicher nicht zu. Darauf ist von vielen Seiten hingewiesen und

1) M. Wien, Jahrbuch für drahtlose Telegraphie 1. p. 461. 1907; Physik. Zeitschr. 8. p. 764. 1907.

es sind Vorschläge ¹⁾ gemacht worden, dem spezifischen Verhalten der Funkenstrecke durch gewisse spezielle Annahmen Rechnung zu tragen. Trotzdem man über diese Fragen im klaren war, wurde und wird die Bjerknessche Methode auch bei Kondensatorkreisen mit Funkenstrecke angewandt und aus der experimentellen Resonanzkurve, die allerdings von der theoretischen abweicht, nach den Vorschriften der Bjerknesschen Theorie eine, wie man sich ausdrückt, *mittlere* Dämpfung bestimmt. Gerechtfertigt wird dies dadurch, daß die auf diese Weise bestimmte Dämpfung maßgebend für die Schärfe der Resonanz und die damit im Zusammenhange stehenden Erscheinungen ist.

Die weiter unten zu besprechende Methode geht auch von der Annahme der Konstanz des Widerstandes des Schwingungskreises aus. Im Gegensatz aber zu der Bjerknesschen Methode, die aus dem Verlauf der $\int_0^\infty i_2^2 dt$ - oder $\int_0^\infty V_2^2 dt$ -Kurve die Parameter der Schwingungsform ermittelt, benutzt zu diesem Zwecke die vorliegende Methode die $\int_0^\infty i_1 i_2 dt$ -Kurve.

Es soll zunächst die Theorie ²⁾ der $\int_0^\infty i_1 i_2 dt$ -Kurve besprochen, dann ein Instrument zur Messung dieses Integrals beschrieben und seine Theorie entwickelt werden, und schließlich werden kurz die gemachten Versuche mitgeteilt.

I. Theoretischer Teil.

Bezeichnungen.

Es bedeuten:

p_1, p_2, p_3
 c_1, c_2

Selbstinduktionskoeffizienten,
Kapazitäten,

1) Vgl. z. B. J. Zenneck, Ann. d. Phys. 13. p. 822. 1904; J. Koch, Ann. d. Phys. 15. p. 865. 1904; A. Heydweiller, Ann. d. Phys. 19. p. 649. 1906; 25. p. 48. 1908; H. Barkhausen, Physik. Zeitschr. 8. p. 624. 1907.

2) Die mechanischen Kräfte der elektromagnetischen Wellen auf Resonatoren sind von P. Lebedew (Wied. Ann. 52. p. 621. 1894) untersucht worden. Einige Eigenschaften von $\int_0^\infty i_1 i_2 dt$ sind von M. Dieckmann Ann. d. Phys. 24. p. 771. 1907; Diss. Straßburg 1907) benutzt worden.

$p_{1,2}, p_{2,1}, p_{1,3}, p_{2,3}$	wechselseitige Induktionskoeff.,
$q_1 = \frac{p_{1,2}}{p_1}, \quad q_2 = \frac{p_{2,1}}{p_2}$	Koppelungskoeffizienten,
$q^2 = q_1 q_2$	Koppelungsparameter,
w_1, w_2, w_3	Widerstände,
$2 \delta_1 = \frac{w_1}{p_1}, \quad 2 \delta_2 = \frac{w_2}{p_2}, \quad 2 \delta_3 = \frac{w_3}{p_3}$	Dämpfungskonstanten,
$\kappa_1^2 = \frac{1}{p_1 c_1}, \quad \kappa_2^2 = \frac{1}{p_2 c_2}$	
$\nu_1 = \sqrt{\kappa_1^2 - \delta_1^2}, \quad \nu_2 = \sqrt{\kappa_2^2 - \delta_2^2}$	Zyklische Schwingungszahlen,
$\tau_1 = \frac{2\pi}{\nu_1}, \quad \tau_2 = \frac{2\pi}{\nu_2}$	Perioden,
$n_1 = \frac{\nu_1}{2\pi}, \quad n_2 = \frac{\nu_2}{2\pi}$	Schwingungszahlen,
$\varepsilon_1 = \delta_1 \tau_1, \quad \varepsilon_2 = \delta_2 \tau_2$	natürliche logarithm. Dekremente ¹⁾ ,
i_1, i_2, i_3	Stromstärken,
q_1, q_2	Elektrizitätsmengen.
$J_1 = \int_0^\infty i_1^2 dt, \quad J_2 = \int_0^\infty i_2^2 dt, \quad J_{1,2} = \int_0^\infty i_1 i_2 dt.$	

1. Theorie der Methode.

Die Differentialgleichungen zweier *induktiv* gekoppelter Kondensatorkreise sind bekanntlich die folgenden:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial i_1}{\partial t} + 2 \delta_1 i_1 + \kappa_1^2 q_1 + q_1 \frac{\partial i_2}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial i_2}{\partial t} + 2 \delta_2 i_2 + \kappa_2^2 q_2 + q_2 \frac{\partial i_1}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

Die *Anfangsbedingungen*²⁾ sollen die folgenden sein. Für $t=0$:

$$(2) \quad \begin{cases} i_1 = i_{10}, & i_2 = 0, \\ q_1 = q_{10}, & q_2 = 0. \end{cases}$$

Außerdem werden für $t = \infty$ alle i und q verschwinden.

1) Die Größen $\eta_1 = 2\pi \frac{\delta_1}{\kappa_1}$, $\eta_2 = 2\pi \frac{\delta_2}{\kappa_2}$, die weiter unten eingeführt werden, sind, solange δ_1^2 bzw. δ_2^2 gegenüber κ_1^2 zu vernachlässigen sind, praktisch gleich ε_1 und ε_2 , d. h. den logarithmischen Dekrementen bei Resonanz.

2) Wir führen etwas allgemeinere Anfangsbedingungen ein, als man in diesem Falle sonst gewöhnlich tut.

Aus (1) erhält man durch Elimination die *charakteristischen* Gleichungen für i_1 und i_2 :

$$(3) \quad \begin{cases} (1 - \varrho^2) \frac{\partial^2 i_1}{\partial t^2} + 2(\delta_1 + \delta_2) \frac{\partial^2 i_1}{\partial t^2} + (\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + 4\delta_1 \delta_2) \frac{\partial i_1}{\partial t} \\ \quad + 2(\delta_1 \kappa_2^2 + \delta_2 \kappa_1^2) i_1 + \kappa_1^2 \kappa_2^2 q_1 = 0, \end{cases}$$

$$(4) \quad (1 - \varrho^2) \frac{\partial^2 i_2}{\partial t^2} + \dots + \kappa_1^2 \kappa_2^2 q_2 = 0.$$

Multipliziert man nun die Gleichung (4) der Reihe nach mit $\partial^2 i_2 / \partial t^2$, $\partial i_2 / \partial t$ und i_2 und integriert die erhaltenen Gleichungen zwischen 0 und ∞ , so erhält man durch partielle Integration unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen (2) und Gleichung (1) die folgenden drei linearen Gleichungen mit drei Unbekannten:

$$(5) \quad \begin{cases} \int_0^\infty \left(\frac{\partial^2 i_2}{\partial t^2} \right)^2 dt, \quad \int_0^\infty \left(\frac{\partial i_2}{\partial t} \right)^2 dt \quad \text{und} \quad \int_0^\infty i_2^2 dt; \\ \left\{ \begin{aligned} & 2(\delta_1 + \delta_2) \int_0^\infty \left(\frac{\partial^2 i_2}{\partial t^2} \right)^2 dt - 2(\delta_1 \kappa_2^2 + \delta_2 \kappa_1^2) \int_0^\infty \left(\frac{\partial i_2}{\partial t} \right)^2 dt = A_1, \\ & - (1 - \varrho^2) \int_0^\infty \left(\frac{\partial^2 i_2}{\partial t^2} \right)^2 dt + (\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + 4\delta_1 \delta_2) \int_0^\infty \left(\frac{\partial i_2}{\partial t} \right)^2 dt \\ & \quad - \kappa_1^2 \kappa_2^2 \int_0^\infty i_2^2 dt = A_2, \\ & - 2(\delta_1 + \delta_2) \int_0^\infty \left(\frac{\partial i_2}{\partial t} \right)^2 dt + 2(\delta_1 \kappa_2^2 + \delta_2 \kappa_1^2) \int_0^\infty i_2^2 dt = A_3, \end{aligned} \right. \end{cases}$$

wo:

$$(6) \quad \begin{cases} A_1 = \frac{1}{2} (1 - \varrho^2) \left(\frac{\partial^2 i_2}{\partial t^2} \right)_0^2 + (\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + 4\delta_1 \delta_2) \frac{1}{2} \left(\frac{\partial i_2}{\partial t} \right)_0^2, \\ A_2 = (1 - \varrho^2) \left(\frac{\partial i_2}{\partial t} \right)_0 \left(\frac{\partial^2 i_2}{\partial t^2} \right)_0 + (\delta_1 + \delta_2) \left(\frac{\partial i_2}{\partial t} \right)_0^2, \\ A_3 = - \frac{1}{2} (1 - \varrho^2) \left(\frac{\partial i_2}{\partial t} \right)_0^2. \end{cases}$$

Aus (5) erhält man nun:

$$\int_0^{\infty} i_2^2 dt = J_2 = \frac{A_1 (1 - \varrho^2) (\delta_1 + \delta_2) + 2 (\delta_1 + \delta_2)^2 A_2}{2 A} + \frac{[\varrho^2 (\delta_1 \kappa_2^2 + \delta_2 \kappa_1^2) + 4 \delta_1 \delta_2 (\delta_1 + \delta_2) + (\delta_1 \kappa_1^2 + \delta_2 \kappa_2^2)] A_3}{2 A},$$

wo

$$A = (\delta_1 \kappa_2^2 + \delta_2 \kappa_1^2) [\varrho^2 (\delta_1 \kappa_2^2 + \delta_2 \kappa_1^2) + 4 \delta_1 \delta_2 (\delta_1 + \delta_2)] + \delta_1 \delta_2 (\kappa_1^2 - \kappa_2^2)^2.$$

Nach Einsetzen der Werte von A_1 , A_2 , A_3 aus (6) und Berücksichtigung der Anfangsbedingung erhält man schließlich:

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} A \cdot J_2 &= \frac{\varrho^2}{4} (\kappa_1^2 q_{10} + 2 \delta_1 i_{10})^2 (\delta_1 \kappa_2^2 + \delta_2 \kappa_1^2) \\ &\quad + \frac{\varrho^2}{4} \kappa_1^4 (\delta_1 + \delta_2) i_{10}^2. \end{aligned} \right.$$

Auf analoge Weise erhält man

$$J_{1,2} = \int_0^{\infty} i_1 i_2 dt. \quad 1)$$

Zu diesem Zwecke multipliziert man die Gleichung (3) bzw. mit

$$q_2, \quad i_2, \quad \frac{\partial i_2}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 i_2}{\partial t^2}$$

und die Gleichung (4) bzw. mit

$$q_1, \quad i_1, \quad \frac{\partial i_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 i_1}{\partial t^2}$$

und integriert die so erhaltenen acht Gleichungen in bezug auf t zwischen den Grenzen 0 und ∞ . Indem man nun partiell integriert und die Anfangsbedingungen (2) berücksichtigt, erhält man acht lineare Gleichungen mit acht Unbekannten:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} q_1 q_2 dt, \quad \int_0^{\infty} q_2 i_1 dt, \quad \int_0^{\infty} i_1 i_2 dt, \quad \int_0^{\infty} i_1 \frac{\partial i_2}{\partial t} dt, \quad \int_0^{\infty} \frac{di_1}{dt} \frac{di_2}{dt} dt, \\ \int_0^{\infty} \frac{d^2 i_1}{dt^2} \frac{di_2}{dt} dt, \quad \int_0^{\infty} \frac{d^2 i_1}{dt^2} \frac{d^2 i_2}{dt^2} dt \quad \text{und} \quad \int_0^{\infty} \frac{d^3 i_1}{dt^3} \frac{d^2 i_2}{dt^2} dt. \end{aligned}$$

1) Man erhält $J_{1,2}$ übrigens auch direkt aus J_2 ; vgl. M. Dieckmann, l. c.

Nach Ausführung aller Rechnungen erhält man:

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} J_{1,2} = \frac{q_2}{4A} \{ & (\kappa_2^2 - \kappa_1^2) \left[[(\delta_2 + \varrho^2 \delta_1) \kappa_1^2 + 4 \delta_1^2 \delta_2] i_{10}^2 \right. \\ & + \delta_2 \kappa_1^4 q_{10}^2 + 4 \delta_1 \delta_2 \kappa_1^2 q_{10} i_{10} \left. \right] \\ & + (\delta_1 + \delta_2) (\varrho^2 \kappa_1^2 + 4 \delta_1 \delta_2) \kappa_1^2 i_{10}^2 \} . \end{aligned} \right.$$

Die Formeln (7) und (8) geben uns also die Integrale J_2 und $J_{1,2}$ bei zwei gekoppelten Kondensatorkreisen bei beliebigen Konstanten: Dämpfungskonstanten und Koppelungskoeffizienten in geschlossener algebraischer Form. Die Methode, von der wir dabei Gebrauch machten, läßt sich nun ohne weiteres auch auf den Fall von beliebig vielen, beliebig gekoppelten Kondensatorkreisen übertragen. Das Verfahren ist überall das gleiche: es wird die charakteristische Gleichung bestimmt, und je nachdem man die Effektivwerte der Quadrate oder der Produkte erhalten will, multipliziert man die Gleichung für i_x mit i_x , $\partial i_x / \partial t \dots$ usw. oder mit i_m , $\partial i_m / \partial t, \dots$ usw., wo $m \leq x$ ist. Durch partielle Integration unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen erhält man dann soviel lineare Gleichungen, als man Integralwerte hat.¹⁾ Wir gehen jetzt zur Betrachtung spezieller Fälle über.

Gewöhnliche Funkenerregung.

In diesem Falle hat man die Anfangsbedingungen für $t = 0$:

$$q_1 = q_{10}, \quad i_{10} = 0, \quad q_{20} = 0, \quad i_{20} = 0.$$

Wir setzen $x = (\kappa_2^2 - \kappa_1^2) / \kappa_1^2$ und führen η_1 und η_2 ein. (Vgl. Anm. 1, p. 493.) Dann hat man:

$$(8_1) \quad J_{1,2} = m \cdot \frac{x}{A},$$

wo

$$m = \frac{\pi}{2} \varrho_2 \eta_2 \kappa_1 q_{10}^2$$

1) Diese Theorie hatten wir schon Weihnachten 1907 ausgearbeitet. In seiner Arbeit in der Physik. Zeitschr. 9. p. 437. 1908 hat inzwischen B. Mackû dasselbe Verfahren angegeben, um die Integralwerte aus den Differentialgleichungen direkt zu berechnen. In einer späteren Arbeit (Jahrb. f. drahtlose Telegraphie 2. p. 251. 1909) werden von B. Mackû ausführlich die für die Messung wichtigen Integralwerte zweier gekoppelter Schwingungskreise behandelt.

Aus (8) folgt weiter:

$$(16) \quad 6. \quad \eta_1 + \eta_2 = \pi \sqrt{x_1 x_2} \sqrt{\frac{1 + \frac{\pi^2 \varrho^2}{\eta_1 \eta_2}}{1 + \varrho^2 \frac{\eta_1}{\eta_2}}},$$

wo x_1 und x_2 zwei Werte von x sind, für welche $J_{1,2}$ den gleichen Wert hat, d. h. $J_{1,2}(x_1) = J_{1,2}(x_2)$.

In den Figg. 1 und 2 ist der Verlauf der für verschiedene η_1 , η_2 und ϱ berechneten $\int_0^\infty i_1 i_2 dt$ -Kurven gezeichnet.

Extremlose Koppelung $\varrho^2 = 0$.

Kurve I: $\eta_1 = 0,05$, $\eta_2 = 0,01$. Kurve II: $\eta_1 = 0,01$, $\eta_2 = 0,01$.

Fig. 1. Einfluß der Dämpfung.

Kurve I: $\varrho^2 = 0$. Kurve II: $\varrho^2 = \eta_1 \eta_2 / 2 \pi^2$.
 $\eta_1 = 0,05$, $\eta_2 = 0,01$.

Fig. 2. Einfluß der Koppelung.

Aus dem Verlauf der $\int_0^\infty i_1 i_2 dt$ -Kurve, bzw. aus den Formeln (9) bis (16) lassen sich folgende Schlüsse ziehen:

Ändert man x von -1 bis $+\infty$, so daß alle übrigen Parameter unverändert bleiben, also etwa im sekundären Kreis die Kapazität c_2 (von $c_2 = \infty$ bis $c_2 = 0$), wie man bei der Aufnahme einer gewöhnlichen Bjerknesschen Resonanzkurve zu tun pflegt, so nimmt zunächst $\int_0^\infty i_1 i_2 dt$ vom Wert, der durch Gleichung (14) gegeben ist, bis zum Minimalwert $\bar{J}_{1,2}$ ab, den es bei $x = -x_0$ ($c_2 = \bar{c}_2$) erreicht, wächst dann, indem es bei $x = 0$ ($c_2 = c_{20}$) durch Null hindurchgeht, bis zum Maximalwert $\bar{J}_{1,2}^+$, den es bei $x = x_0$ ($c_2 = c_2^+$) erreicht, und fällt bei weiter abnehmendem c_2 auf Null ab. Die Größe von x , bei welcher $J_{1,2}$ gleich Null wird, ist Null, also von ρ^2 unabhängig, dagegen hängt die Lage der Extremwerte, wie allgemein die Form der $J_{1,2}$ -Kurve (vgl. Gleichung (16)) von ρ^2 ab. Nun werden aber diese Größen von ρ^2 unabhängig, falls man

$$\rho^2 \text{ gegenüber } \frac{\eta_1 \eta_2}{2\pi^2}$$

vernachlässigen darf.¹⁾ Diese Bedingung, die mit der M. Wienschen Bedingung der extrem losen Koppelung bei der Bjerknesschen Methode wesentlich identisch ist, wollen wir nun im folgenden als erfüllt betrachten. Unter dieser Voraussetzung erhalten wir:

$$(8_2) \quad J_{1,2} = \frac{\pi^3}{2} \frac{q_2 x_1 q_1^2}{\eta_1} \frac{x}{\pi^2 x^2 + (\eta_1 + \eta_2)^2 + \eta_1 (\eta_1 + \eta_2) x},$$

$$(9_1) \quad J_{1,2} = 0 \quad \text{für} \quad x = \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_1^2} = \left(\frac{c_{20} - c_2}{c_2} \right) = 0,$$

$$(10_1) \quad \frac{\partial J_{1,2}}{\partial t} = 0, \quad \text{für} \quad \pi x = \pm (\eta_1 + \eta_2),$$

$$(13_1) \quad \eta_1 = 2\pi \frac{|\bar{J}_{1,2}| - |\bar{J}_{1,2}^+|}{|\bar{J}_{1,2}| + |\bar{J}_{1,2}^+|},$$

$$(16_1) \quad \pi^2 x_1 x_2 = (\eta_1 + \eta_2)^2.$$

Aus diesen Formeln folgt nun: Die $\int_0^\infty i_1 i_2 dt$ -Kurve bei extremloser Koppelung gestattet die Parameter des Kreises 1 zu bestimmen, und zwar erhält man die Schwingungsdauer nach

1) Denn es ist praktisch $\eta_1 \eta_2 / 2\pi^2$ fast immer kleiner wie η_2 / η_1 .

der Gleichung (9₁) und das logarithmische Dekrement nach der Gleichung (10₁) aus der Lage der Extremwerte von $\int_0^\infty i_1 i_2 dt$. Diese theoretische Betrachtung liefert also folgendes Verfahren zur Bestimmung der Konstanten

$$\kappa_1^2 = \nu_1^2 + \delta_1^2 \quad \text{und} \quad \eta_1 = 2\pi \frac{\delta_1}{\kappa_1}$$

eines Kondensatorkreises.

Der zu untersuchende Kondensatorkreis wird mit einem zweiten „Resonanzkreis“ mit variabler Kapazität c_2 , dessen Konstanten

$$\eta_2(\varepsilon_2) \quad \text{und} \quad \kappa_2^2 = \frac{1}{p_2 c_2}$$

bekannt sind, extrem lose gekoppelt und die Kurve des $\int_0^\infty i_1 i_2 dt$ Effektes als Funktion von c_2 bestimmt. Für den Wert von $c_2 = c_{20}$, für welchen $\int_0^\infty i_1 i_2 dt = 0$ ist, ist nun

$$\kappa_1^2 = \kappa_2^2 = \frac{1}{p_2 c_{20}}.$$

Für die Werte von

$$c_2 = \begin{cases} + \\ - \end{cases} c_2,$$

für welche $\int_0^\infty i_1 i_2 dt$ ein $\begin{cases} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{cases}$ wird, ist

$$\eta_1 + \eta_2 = \pi |x| = \pi \left| \frac{c_{20} - c_2}{c_2} \right| \quad \text{bzw.} \quad \pi \left| \frac{c_{20} - c_2}{c_2} \right|.$$

Wegen der Unsicherheit, mit welcher die genaue Lage der Extremwerte bei dem verhältnismäßig flachen Verlauf der Kurve in der Nähe der Extremwerte ermittelt werden kann, ist bei *genaueren* Bestimmungen das Verfahren, das auf Formel (16₁) begründet ist, vorzuziehen. Nach diesem Verfahren bestimmt man die Werte c_2' , c_2'' , für welche $J_{1,2}$ den gleichen Wert (auch dem Zeichen nach) hat, und erhält

$$(20) \quad \eta_1 + \eta_2 = \pi \sqrt{\frac{c_{20} - c_2'}{c_2'} \cdot \frac{c_{20} - c_2''}{c_2''}}$$

„Stoßerregung“.

Bei der Stoßerregung ist man nicht berechtigt, *ohne weiteres* anzunehmen, daß zur Zeit $t = 0$, d. h. im Moment der durch das Abreißen des Funkens bewirkten automatischen Ausschaltung des Stoßkreises, der Strom in dem vom Stoßkreis erregten primären Kreis gleich Null ist, also, daß $i_{10} = 0$ ist. Aus der allgemeineren Formel (8), die für beliebige i_{10} gilt, kann man aber sich leicht überzeugen, daß im Falle einer *extremlosen* Koppelung die von i_{10} abhängigen Glieder sowohl auf die Form der $J_{1,2}$ -Kurve wie auch der J_2 -Kurve praktisch keinen Einfluß haben. Man ist also in *diesem* Falle berechtigt, die für die Funkenerregung erhaltenen Formeln auch auf die Stoßerregung anzuwenden.

2. Theorie des Instrumentes.

Um $\int_0^\infty i_1 i_2 dt$ zu messen¹⁾, wäre es am einfachsten, ein Dynamometer zu gebrauchen, durch dessen eine Spule der Strom i_1 und durch die andere der Strom i_2 durchgeschickt werden kann. Bei der Kleinheit der zu messenden Kräfte und bei der praktisch stets zu erfüllenden Bedingung eines kleinen Widerstandes macht die Konstruktion eines Dynamometers mit Stromzuführungen zu der beweglichen Spule Schwierigkeiten. Aus diesen Gründen wurde als Meßinstrument für $\int_0^\infty i_1 i_2 dt$ folgendes *Dynamometer* („Kurzschlußring“-dynamometer) konstruiert. Da sich das Instrument bei unseren Messungen sehr gut bewährt hat, auch bezüglich der mechanischen Eigenschaften (Konstanz der Nullage, Kleinheit der Schwingungsdauer, gute Dämpfung), so wollen wir es näher beschreiben und auf die Theorie des Instrumentes etwas genauer eingehen.

In der mittleren Ebene einer flachen Spule S_2 (Fig. 3) aus wenigen Windungen hängt an biflarer Aufhängung konzentrisch mit S_2 ein *Ring* aus dünnem Aluminiumblech. Kon-

1) Eine Methode zur Messung von $\int_0^\infty i_1 i_2 dt$ hat M. Dieckmann (l. c.) ausgearbeitet.

zentrisch sowohl zum Ring wie auch zu S_2 befindet sich in der zum Ring senkrechten, durch die Drehungsachse hindurchgehenden Ebene eine zweite ebenso flache Spule S_1 . Sowohl S_1 wie auch S_2 können um die Drehungsachse des Ringes mittels Schraubenvorrichtung beliebige kleine Drehungen erteilt werden. Gemessen werden mittels Skala und Fernrohr die Drehungswinkel des Ringes. Die Dimensionen der Teile des Apparates waren die folgenden.

Fig. 3. Schema der Anordnung der Spulen des Dynamometers.

Die Spulen S_1 bzw. S_2 bestanden aus zwei bzw. vier Windungen 2 mm starken, isolierten Kupferdrahtes und hatten quadratische Form. Die Seitenlänge der Quadrate betrug für die Spule S_1 9,5 cm, für die Spule S_2 6,5 cm. Die Nadel hatte die Form eines Ringes von 4 cm äußerem Durchmesser, der Breite 3 mm und 0,1 mm Dicke. Der Ring wurde mit Seidenpapier beklebt, trug in der Mitte einen kleinen Glasspiegel und befand sich zwischen einer Glasplatte, die die vordere Seite der Spule S_2 bedeckte, und einem Blatt schwarzen Papiers, das auf der hinteren Seite von S_2 befestigt war. Auf diese Weise wurde eine vorzügliche *Dämpfung* erzielt.

Die *Wirkungsweise* des Apparates ist nun die folgende. Man schickt den Strom i_2 durch S_2 ; dann wird in dem Ring ein Strom i_3 induziert, der, falls der induktive Widerstand des Ringes genügend groß¹⁾ gegen den Ohmschen Widerstand ist, proportional zu i_2 ist. Wegen der symmetrischen Lage des Ringes in bezug auf S_2 wird auf den Ring *kein Drehmoment* ausgeübt. Schickt man aber den Strom i_1 durch S_1 , so induziert i_1 *keinen* Strom in dem Ringe, übt aber, falls in dem Ringe schon ein Strom i_3 fließt, ein zu $i_1 i_3$ proportionales Drehmoment. Schickt man also gleichzeitig durch S_1 den Strom i_1 und durch S_2 den Strom i_2 , so wirkt auf den Ring ein zu $i_1 i_2$ proportionales Drehmoment. Benutzt man also das Instrument in der Weise, daß man die Nadel etwa mittels

1) Vgl. unter Anmerkung p. 503.

eines Torsionskopfes in die Nullage zurückführt, so wäre dann der Drehungswinkel proportional zu $\int_0^{\infty} i_1 i_2 dt$. Nun ist aber

1. schwierig eine *vollkommene* Abgleichung zu erzielen und
2. ist es viel einfacher — und so haben wir das Instrument stets benutzt — direkt die Ausschläge zu messen.

Da in diesem Falle der Ring aus der Nullage um einen kleinen Winkel ϑ verdreht wird, so treffen die Voraussetzungen der entwickelten einfachen Theorie nicht mehr zu. Um nun aus den Ausschlägen auf die Werte von $\int_0^{\infty} i_1 i_2 dt$ schließen zu können, müssen wir auf die Theorie des Instrumentes näher eingehen.

Die *genauere Theorie des Dynamometers* gestaltet sich folgendermaßen.

Bezeichnen wir durch p_3 den Selbstinduktionskoeffizienten des Ringes, durch $p_{1,3}$ bzw. $p_{2,3}$ die wechselseitigen Induktionskoeffizienten zwischen J_1 bzw. J_2 und dem Ring, durch W die magnetische Energie des Systems, also

$$W = p_{1,3} i_1 i_3 + p_{2,3} i_2 i_3 + p_{1,2} i_1 i_2 + \frac{1}{2} p_1 i_1^2 + \frac{1}{2} p_2 i_2^2 + \frac{1}{2} p_3 i_3^2,$$

durch N die Zahl der Einzelentladungen in der Sekunde und durch a^2 die Direktionskraft der Aufhängung, so ist der Drehungswinkel ϑ durch die Gleichung

$$(17) \quad a^2 \vartheta = N \int_0^{\infty} \left(\frac{dW}{d\vartheta} \right)_i dt$$

bestimmt, wobei bei der Differentiation nach ϑ die Ströme i als von ϑ unabhängig anzusehen sind. Nun ist

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \vartheta} \right)_i = \left(\frac{\partial p_{1,3}}{\partial \vartheta} i_1 + \frac{\partial p_{2,3}}{\partial \vartheta} i_2 \right) i_3$$

und, da nach der Voraussetzung¹⁾

$$(18) \quad p_3 i_3 = -p_{1,3} i_1 - p_{2,3} i_2,$$

1) Die Bedingungen, unter welchen man von dem Einfluß des Widerstandes eines induktiven Kreises in einem gedämpften Wechsel Felde absehen darf, sind von N. Papalexı (Ann. d. Phys. 14. p. 756. 1904) abgeleitet worden. Auf den hier betrachteten Fall dürfen die Bedingungen nicht ohne weiteres übertragen werden. In der Tat zeigt

so ist

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \vartheta} \right)_i = - \frac{1}{2 p_3} \left\{ \frac{\partial (p_{1,3})}{\partial \vartheta} i_1^2 + \frac{\partial (p_{2,3})}{\partial \vartheta} i_2^2 + 2 \frac{\partial (p_{1,3} p_{2,3})}{\partial \vartheta} i_1 i_2 \right\},$$

und

$$\begin{aligned} a^2 \vartheta = & - \frac{N}{2 p_3} \left\{ \frac{\partial p_{1,3}}{\partial \vartheta} \int_0^\infty i_1^2 dt + \frac{\partial p_{2,3}}{\partial \vartheta} \int_0^\infty i_2^2 dt \right. \\ & \left. + 2 \frac{\partial (p_{1,3} p_{2,3})}{\partial \vartheta} \int_0^\infty i_1 i_2 dt \right\}. \end{aligned}$$

Nun kann man, indem man ϑ^2 und höhere Potenzen von ϑ vernachlässigt, allgemein setzen:

eine genauere Rechnung, die wir für den Fall einer extrem losen Kopplung durchgeführt haben, daß man mit dem Apparat in der ersten Annäherung nicht $J_{1,2}$, sondern

$$J_{1,2} + \frac{\eta_1 \eta_2}{\pi^2 Q_2} J_2$$

mißt. Hier bezeichnet

$$\eta_3 = \frac{2 \pi \delta_3}{\kappa_1}, \quad \text{wo} \quad 2 \delta_3 = \frac{w_3}{p_3}$$

die Dämpfungskonstante der beweglichen Spule (des Ringes) bedeutet. Daraus folgt weiter, daß der Ausschlag verschwindet nicht für $x = 0$, sondern

$$x = - \frac{\eta_3 (\eta_1 + \eta_2)}{\pi^2}$$

und daß der Ausschlag Maximum wird für

$$\pi^2 x + \eta_3 (\eta_1 + \eta_2) = \pm \pi (\eta_1 + \eta_2).$$

Mit anderen Worten: um den Resonanzpunkt zu finden, muß man zu dem x , bei welchem der Ausschlag Null ist, eine Korrektur

$$+ \frac{\eta_3 (\eta_1 + \eta_2)}{\pi^2}$$

anbringen. Dagegen bestimmt sich die Summe $\eta_1 + \eta_2$ aus der Lage der Maxima richtig. Wir erhalten also als *Bedingung* für die Zulässigkeit der Vernachlässigung des Widerstandes in der beweglichen Spule $\frac{\eta_3 (\eta_1 + \eta_2)}{\pi^2}$ muß kleiner sein als die Genauigkeitsgrenze, mit welcher der Resonanzpunkt bestimmt werden soll.

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2p_3} \frac{\partial}{\partial \vartheta} p_{1,3} = L_1 + M_1 \vartheta, \\ -\frac{1}{2p_3} \frac{\partial}{\partial \vartheta} p_{2,3} = L_2 + M_2 \vartheta, \\ -\frac{1}{2p_3} \frac{\partial}{\partial \vartheta} 2p_{1,3} p_{2,3} = L_{1,2} + M_{1,2} \vartheta, \end{array} \right.$$

so daß:

$$a^2 \vartheta = N \{ (L_1 + M_1 \vartheta) J_1 + (L_2 + M_2 \vartheta) J_2 + (L_{1,2} + M_{1,2} \vartheta) J_{1,2} \},$$

wo für

$$\int_0^\infty i_1^2 dt, \quad \int_0^\infty i_2^2 dt \quad \text{und} \quad \int_0^\infty i_1 i_2 dt$$

die Bezeichnungen J_1 , J_2 und $J_{1,2}$ eingeführt sind.

Daraus erhält man schließlich:

$$(20) \quad \vartheta = N \frac{L_1 J_1 + L_2 J_2 + L_{1,2} J_{1,2}}{a^2 + N [M_1 J_1 + M_2 J_2 + M_{1,2} J_{1,2}]}.$$

Wir gehen nun zur Diskussion dieser Formel und wenden sie auf folgende Fälle an.

Fall I. *Vollkommene Symmetrie und Abgleichung des Apparates.*

In diesem Fall muß für $i_1 = 0$ $\vartheta_1 = 0$, und für $i_2 = 0$ $\vartheta_2 = 0$ sein.

Für $i_1 = 0$ ergibt (20):

$$\vartheta_1 = N \frac{L_2 J_2}{a^2 + N \cdot M_2 J_2} = 0,$$

also:

$$L_2 = 0.$$

Für $i_2 = 0$:

$$\vartheta_2 = N \frac{L_1 J_1}{a^2 + N \cdot M_1 J_1} = 0,$$

also:

$$L_1 = 0.$$

Außerdem muß aus Gründen der vorausgesetzten Symmetrie ϑ in $-\vartheta$ übergehen, falls man das Zeichen von i_1 oder von i_2 wechselt, d. h. es muß:

$$\frac{L_{1,2} J_{1,2}}{a^2 + N (M_1 J_1 + M_2 J_2 + M_{1,2} J_{1,2})} = \frac{L_{1,2} J_{1,2}}{a^2 + N (M_1 J_1 + M_2 J_2 - M_{1,2} J_{1,2})}$$

sein, oder:

$$M_{1,2} = 0.$$

Man hat also in diesem Fall:

$$(20_1) \quad \vartheta = N \frac{L_{1,2} J_{1,2}}{a^2 + N(M_1 J_1 + M_2 J_2)}.$$

Berücksichtigt man nun, daß für unsere Zwecke: Benutzung der $J_{1,2}$ -Kurve zur Bestimmung von logarithmischen Dekrementen, es sich um den Fall einer extrem losen Koppelung handelt, daß also J_2 sehr klein und J_1 merklich konstant ist, so nimmt die Formel (20) die Gestalt an:

$$(20_2) \quad \vartheta = N \cdot \frac{L_{1,2} J_{1,2}}{a^2 + N \cdot M_1 J_1},$$

in welcher $a^2 + N \cdot M_1 J_1$ als konstant in bezug auf i_1 und i_2 anzusehen ist. Aus Formel (20₂) folgt nun, daß im Falle vollkommener Symmetrie und Abgleichung *tatsächlich* die stationären Ablenkungswinkel des beweglichen Ringes proportional zu $\int_0^\infty i_1 i_2 dt$ sind.

Dieser Fall der vollkommenen Symmetrie und vollständiger Abgleichung wird sich aber in aller Strenge praktisch nicht realisieren lassen. Um nun die *Korrekturen* zu finden, die in dem praktisch wichtigen Falle der nur unvollkommenen Symmetrie und angenäherten Abgleichung an die Ablenkungswinkel des Instrumentes anzubringen sind, wenden wir uns zu dem

Fall II. *Unvollkommene Symmetrie und angenäherte Abgleichung.*

In diesem Falle habe man:

$$(21) \quad \text{für } i_2 = 0 \quad \vartheta = N \frac{L_1 J_1}{a^2 + N \cdot M_1 J_1} = \vartheta_1,$$

$$(22) \quad \text{für } i_1 = 0 \quad \vartheta = N \frac{L_2 J_2}{a^2 + N \cdot M_2 J_2} = \vartheta_2.$$

Nun lautet die Differentialgleichung der Bewegung der Nadel:

$$\begin{aligned} T \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} + 2r \frac{d\vartheta}{dt} + [a^2 + N(M_1 J_1 + M_2 J_2 + M_{1,2} J_{1,2})] \vartheta \\ = N \cdot (L_1 J_1 + L_2 J_2 + L_{1,2} J_{1,2}). \end{aligned}$$

Bestimmt man nun die Schwingungsdauer:

$$\tau_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{a^2}{T} - \frac{r^2}{T^2}}} \quad \text{für } i_1 = 0 \quad i_2 = 0,$$

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{a^2}{T} - \frac{r^2}{T^2} + N \frac{M_1 J_1}{T}}} \quad \text{für } i_1 = i_1 \quad i_2 = 0,$$

$$\tau_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{a^2}{T} - \frac{r^2}{T^2} + N \frac{M_2 J_2}{T}}} \quad \text{für } i_1 = 0 \quad i_2 = i_2,$$

$$\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{a^2}{T} - \frac{r^2}{T^2} + N \frac{M_1 J_1 + M_2 J_2 + M_{1,2} J_{1,2}}{T}}} \quad \text{für } i_1 = i_1 \quad i_2 = i_2,$$

so hat man daraus:

$$N \cdot \frac{M_1 J_1}{T} = 4\pi^2 \left(\frac{1}{\tau_1^2} - \frac{1}{\tau_0^2} \right),$$

$$N \cdot \frac{M_2 J_2}{T} = 4\pi^2 \left(\frac{1}{\tau_2^2} - \frac{1}{\tau_0^2} \right),$$

$$N \cdot \frac{M_{1,2} J_{1,2}}{T} = 4\pi^2 \left(\frac{1}{\tau^2} + \frac{1}{\tau_0^2} - \frac{1}{\tau_1^2} - \frac{1}{\tau_2^2} \right).$$

Diese Formeln gestatten also einen exakten Vergleich der relativen Größe von $M_1 J_1$, $M_2 J_2$ und $M_{1,2} J_{1,2}$. Bei Innehaltung der Bedingung der extrem losen Koppelung und angenäherten Symmetrie der Lage vom Ring zu J_1 wird man $M_2 J_2$ und $M_{1,2} J_{1,2}$ gegenüber $M_1 J_1$ vernachlässigen dürfen. Macht man diese Vernachlässigung, so hat man

$$N \cdot \frac{L_{1,2} J_{1,2}}{a^2 + N \cdot M_1 J_1} = \vartheta - \vartheta_1 - \vartheta_2 \frac{a^2}{a^2 + N \cdot M_1 J_1}$$

oder:

$$(23) \quad N \cdot \frac{L_{1,2} J_{1,2}}{a^2 + N \cdot M_1 J_1} = \vartheta - \vartheta_1 - \vartheta_2 \frac{4\pi^2 + \lambda_0^2 \tau_1^2}{4\pi^2 + \lambda_1^2 \tau_0^2},$$

wo λ bzw. λ_1 die logarithmischen Dekremente der Schwingungen der Nadel im Falle $i_1 = 0$, $i_2 = 0$ bzw. $i_1 = i_1$, $i_2 = 0$ bedeuten.

Wir kommen also zum Schlusse, daß man auch im Falle nicht vollkommener Abgleichung und nur angenäherter Symmetrie aus den Ausschlägen des Dynamometers die $J_{1,2}$ -Kurve

erhalten kann, wenn man zu den wirklich beobachteten Ablenkungswinkeln die experimentell bestimmbareren Korrekturen

$$-\vartheta_1 \quad \text{und} \quad -\vartheta_2 \frac{4\pi^2 + \lambda_0^2}{4\pi^2 + \lambda_1^2}$$

anbringt. Bei sehr loser Koppelung wird übrigens wegen der Kleinheit von J_2 die zweite Korrektur keine Rolle spielen.

Wir möchten noch folgendes bemerken: Aus

$$(20_2) \quad \vartheta = N \frac{L_{1,2} J_{1,2}}{a^2 + N \cdot M_1 J_1}$$

folgt, daß wenn a^2 klein gegenüber $N \cdot M_1 J_1$ ist,

$$(24) \quad \vartheta = \frac{L_{1,2}}{M_1} \cdot \frac{J_{1,2}}{J_1},$$

d. h. *unabhängig* von N ist.¹⁾ Mit anderen Worten: macht man die Direktionskraft der Aufhängung der Nadel sehr klein im Vergleich mit der Direktionskraft der Spule S_1 , so hängt ϑ nur von

$$\frac{\int_0^\infty i_1 i_2 dt}{\int_0^\infty i_1^2 dt}$$

ab, in sehr weiten Grenzen aber *nicht* mehr von der Zahl der Entladungen N , insbesondere nicht mehr von dem Gang des Unterbrechers ab. Hierin liegt ein praktischer Vorzug des neuen Apparates gegenüber bekannten, auf thermischer Wirkung beruhenden Meßinstrumenten, wie Thermoelement, Bolometer und Dynamometer in gewöhnlicher Ausführung.

1) Einer freundlichen *früheren* Mitteilung des Hrn. Tykociner entnehmen wir, daß er einen direkt anzeigenden Wellenmesser experimentell ausgearbeitet hat, welcher auf einem Verteilungsprinzip der Hochfrequenzströme beruht und bei dem ebenfalls die Unabhängigkeit von der Amplitude erreicht wurde, was für seinen Wellenmesser übrigens prinzipiell unerläßlich ist. In der Literatur ist unseres Wissens eine Anordnung, die eine solche Unabhängigkeit für Hochfrequenzmessungen erreicht, nicht erwähnt.

II. Versuche.

Um die Brauchbarkeit sowohl der dargelegten Methode wie auch des beschriebenen Dynamometers zu prüfen, wurden folgende Versuche angestellt. Es wurden an einem und denselben Kondensatorkreis mit einem und denselben Resonanzkreis gleichzeitig $\int_0^{\infty} i_1 i_2 dt$ - und $\int_0^{\infty} i_2^2 dt$ -Kurven aufgenommen. Die $\int_0^{\infty} i_1 i_2 dt$ -Kurve wurde mit dem Dynamometer, die $\int_0^{\infty} i_2^2 dt$ -Kurve mit einem Brandesschen Thermoelement¹⁾, das mit Gleichstrom geeicht war, aufgenommen und aus den Kurven nach den Vorschriften der Theorie die Schwingungszahlen und die Summe $\epsilon_1 + \epsilon_2$ der logarithmischen Dekremente berechnet.

Um dem theoretischen Falle näher zu kommen, wurden zunächst Versuche mit den „Abreißfunken“ nach Wien²⁾ („Stoßerregung“) gemacht. In diesem Falle fällt der störende Einfluß der Funkenstrecke weg und die Bjerknessche Resonanzkurve entspricht nach Wien³⁾ der Theorie. Es eignet sich also dieser Fall ganz besonders für die Prüfung der Brauchbarkeit unserer Methode. Nachdem nun auf diese Weise die Methode und das Instrument geprüft waren, wurden auch Versuche mit der gewöhnlichen Art der Erregung von schnellen Schwingungen durch eine Funkenstrecke gemacht und somit der Einfluß der Funkenstrecke auf die $\int_0^{\infty} i_1 i_2 dt$ -Kurve beobachtet.

Bei der Prüfung der Methode mittels der „Abreißfunken“ war die Versuchsanordnung die in der Fig. 4 angegebene. Hier bedeuten F die „Abreiß“funkenstrecke, die durch einen Transformator (Resonanzinduktor), welcher mit Wechselstrom der Zentrale gespeist wurde, erregt war; I ist der „primäre“ Kreis, der sehr lose (durch 1) mit II — dem Resonanzkreis — gekoppelt ist. D ist das Dynamometer; Th das Thermoelement. Der Strom i_2 des Resonanzkreises ist direkt durch S_2 des Dynamometers geleitet; ebenso fließt i_1 des primären Kreises

1) Stromempfindlichkeit des Galvanometers $4 \cdot 10^{-8}$ Amp.; innerer Widerstand 5,552; Skalenabstand 50 cm.

2) M. Wien, Physik. Zeitschr. 7. p. 872. 1906.

3) M. Wien, Ann. d. Phys. 25. p. 625. 1908.

direkt durch S_1 . u_1 und u_2 sind Umschalter, welche gestatten, durch S_1 allein oder durch S_2 allein Strom zu schicken und auf diese Weise die Einstellung und Prüfung des Dynamometers nach dem oben angegebenen (p. 506) Verfahren ermöglichen.

Fig. 4. Schema der Versuchsanordnung.

Das Thermoelement Th ist nicht direkt in II eingeschaltet, sondern befindet sich, wie üblich, in einem mit II gekoppelten induktiven Kreis. K_2 und K_2' sind Drehplattenluftkondensatoren, System Telefunken (K_2 16 Platten, K_2' 2 Platten); sie sind geeicht und parallel geschaltet. Die durch die Methode erforderte Veränderung von der Kapazität wird durch Drehung an K_2' bewirkt. Die Figg. 5 und 6 und Tabelle I und II, welche die zugehörigen Werte von K_2 , Ausschläge des Dynamometers (Dyn) und des Thermoelements (Th) für die einzelnen Kurvenpunkte enthalten, geben die Resultate zweier Versuche mit Stoßerregung wieder. Aus der Bjerknesschen Resonanzkurve II wurde die Summe $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ der logarithmischen Dekremente des primären Kreises I und des sekundären Kreises II nach der bekannten Formel

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \pi x \sqrt{\frac{J_2}{J_{2\max.} - J_2}}$$

berechnet, wo J_2 die zu $\int_0^\infty \dot{i}_2^2 dt$ proportionale Ordinate der Kurve, welche zu der Abszisse c_2 gehört, und $x = c_{20} - c_2/c_2$ (c_{20} ist der Wert der Kapazität, für welchen J_2 Maximum ist) bedeutet. Diese Bestimmung ist für die Kurve II der Fig. 5 für drei Werte von x , für die Kurve der Fig. 6 für sechs Werte gemacht, und die sich für $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ ergebenden Werte jedesmal,

wie üblich, an den entsprechenden Stellen der Kurven eingetragen.

Fig. 5. Stoßerregung.

Fig. 6. Stoßerregung.

Tabelle I (zu Fig. 6).

K_2' (cm)	Dyn.	Th
86	+ 55,7	
90,5	59,7	29,6
92,5	60,0	30,8
97,0	61,8	36,0
99,0	62,8	38,0
103,0	63,9	44,0
107	62,6	49,7
111	59,5	57,9
113	55,2	63,5
117	46,7	66,6
119	37,5	72,0
123	23,9	74,5
125	12,3	75,6
127	+ 2,7	75,8
129	— 7,8	74,2
131	— 18,1	70,5
135,5	35,2	64,0
137,8	41,6	61,0
142	51,7	50,7
144	54,8	48,8
146	57,2	46,2
148	59,0	42,1
150	59,7	38,6
152	60,7	36,0
154	60,3	33,0
156	60,2	30,7
160	58,5	
162	58,4	
166	55,6	
168	55,2	
172	52,3	
174	— 51,8	

 $K_2 = 745$ cm. $\lambda_0 =$ ca. 560 m.

Tabelle II (zu Fig. 5).

K_2' (cm)	Dyn.	Th
127	+ 42,7	
131,5	44,8	
135,7	47,3	20,7
140	49,3	24,7
142	49,8	25,8
144	50,5	28,3
146	50,3	30,7
150	47,7	37,5
154	42,8	43,2
158	32,7	48,7
160	24,5	50,1
162	17,0	50,5
164	9,0	50,7
166	+ 0,8	49,7
170	— 15,3	46,7
174	28,0	40,6
176	32,8	36,8
180	39,7	31,5
184	43,2	26,6
188	44,5	22,0
192	44,2	
196	43,0	
200	41,8	
205	— 39,5	
$K_3 = 1025$ cm.		
$\lambda_0 =$ ca. 600 m		

Die Einzelwerte weichen nur sehr wenig voneinander ab: die Resonanzkurve bei der Stoßerregung entspricht also, wie es M. Wien gefunden hat, viel besser als es bei Funken-erregung der Fall ist, der theoretischen Kurve. Der Mittelwert für die Resonanzkurve (Kurve II) der Fig. 5 ergibt sich zu $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0,058$, der Fig. 6 zu $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0,0907$.

Aus der $\int_0^\infty i_1 i_2 dt$ -Kurve (Kurven I der Figg. 5 und 6) wurden entsprechend die Summen $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ der logarithmischen Dekremente bestimmt und zwar aus der Lage der beiden Extremwerte gegenüber dem Nullpunkt nach der Formel (10)¹⁾

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \pm \pi x, \text{ wo } x = \frac{c_{20} - c_2}{c_2}$$

ist und c_{20} der Wert der Kapazität, für welchen $\int_0^\infty i_1 i_2 dt$ Null ist. Diese Werte von $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ sind an den entsprechenden Scheiteln der $\int_0^\infty i_1 i_2 dt$ -Kurve eingetragen. Außerdem aber wurden für jede Kurve je zwei Werte der Summe $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ nach der Formel (20)

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \pi \sqrt{\frac{c_{20} - c_2'}{c_2'} \cdot \frac{c_{20} - c_2''}{c_2''}}$$

ermittelt, wo also c_2' und c_2'' diejenigen Werte der Kapazität sind, welche den Schnittpunkten irgend einer zu der Abszissenachse parallelen Geraden mit der $\int_0^\infty i_1 i_2 dt$ -Kurve entsprechen. Die so ermittelten Werte für $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ sind an den entsprechenden Stellen der Kurven I eingetragen. Als Mittelwert aller dieser Werte ergibt sich für die $\int_0^\infty i_1 i_2 dt$ -Kurve der Fig. 5 $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0,059$ und für die $\int_0^\infty i_1 i_2 dt$ -Kurve der Fig. 6 $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0,090_6$. Auch hier weichen die Einzelwerte voneinander sehr wenig ab. Der Vergleich dieser Werte für $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ mit den aus den Bjerknescschen Resonanzkurven erhaltenen Werten ergibt eine vollkommen genügende Übereinstimmung.¹⁾

1) In den Figg. 5 und 6 und auch in der Fig. 7 ist deutlich eine Verschiebung des Nullpunktes der $\int_0^\infty i_1 i_2 dt$ -Kurve gegenüber dem Resonanz-

Das Schema der Versuchsanordnung bei der *Funkenerregung* unterschied sich von dem für die „Abreibfunkenmethode“ nur dadurch, daß der erregende Kreis fortfiel und der Kreis I eine Funkenstrecke enthielt. Die Selbstinduktion des Kreises I blieb bis auf die Zuführungen dieselbe wie bei der Stoßerregung, dagegen bestand die Kapazität aus vier Leydener Flaschen (zwei Gruppen von je zwei parallel geschalteten Flaschen in symmetrischer Schaltung), so daß die resultierende Kapazität (ca. 10000 cm) mit der sekundären Spule des Resonanzinduktors nahezu in Resonanz mit dem Wechselstrom der Zentrale war. Der Kreis II blieb unverändert.

Die Resultate eines Versuches sind in der Fig. 7 (Tabelle III) wiedergegeben. Man sieht, daß zwar auch hier die beiden Methoden ungefähr gleiche „mittlere“ Dämpfungen ($\epsilon_1 + \epsilon_2$ aus I = 0,142 und aus II $\epsilon_1 + \epsilon_2 = 0,143$) ergeben, daß aber die Übereinstimmung der Einzelwerte sowohl der Kurve I ($\epsilon_1 + \epsilon_2$ zwischen 0,137 und 0,153) wie auch der Kurve II ($\epsilon_1 + \epsilon_2$ zwischen 0,138 und 0,145) unter sich eine schlechtere ist, als bei der Stoßerregung. Die Funkenstrecke scheint auch auf die $\int_0^\infty i_1 i_2 dt$ -Kurve eine deformierende Wirkung auszuüben, ähnlich wie es bei der Bjerknesschen Resonanzkurve seit langem bekannt ist.

punkte der $\int_0^\infty i_2^2 dt$ -Kurve zu konstatieren. Nach der in der Anmerkung 1 p. 503 erwähnten genaueren Theorie ist dies die Folge der Wirkung des Widerstandes des beweglichen Ringes des Dynamometers. Der Sinn der Verschiebung und auch die ungefähre Größe derselben entspricht der Theorie. Da die Größe dieser Verschiebung etwa 0,2 Proz. der Kapazitätswerte, also etwa 0,1 Proz. der Wellenlänge beträgt, so spielt dieser Umstand für die meisten Zwecke keine Rolle, da er ja auch auf die Bestimmung des logarithmischen Dekrementes, wie schon in der Anmerkung 1 p. 503 bemerkt ist, keinen Einfluß hat. — Aus den Figg. 5 und 6 und auch aus Fig. 7 ersieht man ferner, daß im Widerspruch mit der einfachen Formel 12 (p. 497) $|\bar{J}_{1,2}| < |\bar{J}_{1,2}|^+$ ist. Dies steht auch im Einklang mit der genaueren Theorie, nach welcher

$$\frac{|\bar{J}_{1,2}| - |\bar{J}_{1,2}|^-}{|\bar{J}_{1,2}|^+ + |\bar{J}_{1,2}|^-} = \frac{2\eta_3 - \eta_1}{2\pi}$$

ist. Auch durch direkte Versuche, indem allmählich η_1 vergrößert wurde, hat sich diese Formel qualitativ bestätigt.

Fig. 7. Funkenerregung.

Tabelle III (zu Fig. 7).

K_2' (cm)	Dyn.	Th
20	+ 42,0	
33	46,0	
47	52,0	
63	58,4	
80	64,4	23,8
101	65,4	32,2
121	59,6	43,1
142	43,2	51,5
162	20,0	56,6
172	+ 8,0	57,3
182	- 6,0	56,2
201	28,0	49,8
220	44,0	40,2
240	53,0	32,1
259	56,0	25,4
275	55,6	
289	53,0	
302	49,2	
312	43,0	
322	- 42,0	

Funkenlänge ca. 4,3 mm (zwischen Zinkkugeln von ca. 1 cm Durchmesser).

$$K_2 \approx 1530 \text{ cm.} \quad \lambda_0 = 720 \text{ m.}$$

Resultate.

Wir fassen nochmals kurz die Resultate der Arbeit zusammen:

I. Es wurde eine Methode beschrieben zur Untersuchung von Kondensatorkreisen bezüglich Schwingungszahl und Dämpfung, welche einen mit dem zu untersuchenden System lose gekoppelten variablen Kondensatorkreis benutzt und die gesuchten Parameter (Schwingungszahl und logarithmisches Dekrement) aus den Eigenschaften der $\int_0^{\infty} i_1 i_2 dt$ -Kurve ermittelt.

II. Es wurde die allgemeine, für beliebige Koppelung gültige Theorie der $\int_0^{\infty} i_1 i_2 dt$ -Kurve entwickelt und gezeigt, wie man aus der *Lage* des *Nullwertes* dieses Integrals — die Schwingungszahl, aus der *Lage* der Extremwerte — die Summe $\epsilon_1 + \epsilon_2$ der logarithmischen Dekremente bestimmen kann. Die Vorteile dieser Methode sehen wir in der sehr großen Schärfe der Frequenzbestimmung und in der Entbehrlichkeit der Messung der Ausschläge bei der Bestimmung der logarithmischen Dekremente.

III. Es wurde ein „Kurzschlußring“-Dynamometer beschrieben, welches $\int_0^{\infty} i_1 i_2 dt$ zu messen gestattet und seine Theorie entwickelt. Dabei wurde ein Konstruktionsprinzip in Anwendung gebracht, welches eine sehr weitgehende *Unabhängigkeit* der Ausschläge von der *Amplitude* der zu messenden Größe und somit von dem unregelmäßigen Gang des Unterbrechers zu erzielen erlaubt (p. 508).

IV. Es wurde die Brauchbarkeit sowohl der Methode wie des Dynamometers durch vergleichende Versuche erwiesen.

Straßburg i. E., Physikalisches Institut.

(Eingegangen 7. Juni 1910.)