Die primordinalen Störungen.

Von Aug. Weiler.

1. Ueber die Bestimmung der säcularen Störungen von k h k_1 h_1 .

In Nr. 3666 habe ich die Störungen der Ellipse bestimmt, welche der Normalgleichung entspricht. In dieser Lösung des Störungsproblems kommen hauptsächlich säculare Störungen in Betracht, unter welchen immer solche Sinus- und Cosinus-Glieder verstanden sind, deren Argumente die Form $A + Bv$ haben, wo von den Beständigen A und B die letztere mit der störenden Masse m_1 multiplicirt ist. Doch sind in dieser Lösung nur die säcularen Störungen der ersten Ordnung vorgesehen, also nur diejenigen säcularen Störungen, welche durch die Integration der unmittelbar als gegebene Functionen der Zeit vorliegenden Störungsglieder entstehen. Ich muss auf einen Umstand hinweisen, welcher von vornherein dafür spricht, dass die säcularen Störungen der zweiten Ordnung nicht sehr beträchtlich sein können. Die säcularen Störungen der ersten Ordnung haben den

Factor $\frac{m_1}{B}$. Werden dieselben nach den Potenzen von Bv entwickelt, so sind in diesen Entwicklungen Glieder vorhanden, welche mit der ersten Potenz von $m_1 v$ multiplicirt sind. Die Entwicklung der säcularen Störungen zweiter Ordnung nach den Potenzen von Bv führt zu dem Ergebniss, dass die sämmtlichen Glieder dieser Entwicklung mit der zweiten Potenz von $m_1 v$ multiplicirt sind. Offenbar sind aus diesem Grunde, unter der Voraussetzung, dass das Product $m_1 v$ ein kleiner Bruchwerth sei, die säcularen Störungen der zweiten Ordnung nicht sehr beträchtlich. Der Zeitraum, für welchen die Lösung des Störungsproblems gelten soll, kann soweit verkürzt werden, dass das Quadrat von $m_1 v$ einen sehr kleinen Werth nicht überschreitet. Die Störungen der zweiten Ordnung können dann in der That unmerklich sein. Aber es giebt auch säculare Störungen der zweiten Ordnung, in deren Entwicklungen nach den Potenzen von Bv ebenso wie in den Entwicklungen der säcularen Störungen der ersten Ordnung Glieder vorhanden sind, welche die erste Potenz von $m_1 v$ zum Factor haben. Zur Unterscheidung von den vorerwähnten säcularen Störungen der zweiten Ordnung nenne ich dieselben primordinalen Störungen. Es versteht sich, dass durch eine Verkürzung des Zeitraums, für welchen die Lösung des Störungsproblems gültig sein soll, die primordinalen Störungen nicht unmerklich gemacht werden können.

Die Bestimmung der säcularen Störungen der Veränderlichen k h k_1 h_1 betreffend ist in Nr. 2908 unter 5. und 6. ein Verfahren auseinander gesetzt, an welchem ich

später in Nr. 3032 unter 2. eine Vereinfachung habe anbringen können. Ich werde den diesem Verfahren zum Grund liegenden Gedankengang hier in einem Zusammenhang wiedergeben.

Für den inneren Planeten ist der Parameter der gestörten Ellipse, welche der parametrischen Gleichung entspricht, durch die Gleichung:

$$\frac{p^2}{p_0^2} - 1 = 2 \frac{p}{r} (k \cos v + h \sin v)$$

gegeben, in welcher p_0 der Werth des halben Parameters ist für einen jeden Zeitpunkt, an welchem der auf der rechten Seite der Gleichung stehende Factor von $\frac{p}{r}$ gleich Null ist.

Die Veränderlichen k und h bestimmen sich aus den Störungsgleichungen:

$$-k' = \sin v Q v' \quad (1)$$

$$h' = \cos v Q v', \quad (2)$$

in welchen zur Abkürzung gesetzt ist:

$$m p_0^2 Q = \frac{r^3}{p^3} \left(f \frac{p_0}{r} + q + r \frac{d\Omega}{dr} + P \right),$$

und die Grösse P nur Glieder der zweiten und der höheren Ordnungen enthält. Werden nur die Glieder der zweiten Ordnung von P berücksichtigt, so ist:

$$\frac{P}{m p_0^2} = \frac{3}{8} \frac{p}{r} \left(\frac{p^2}{p_0^2} - 1 \right)^2 = \frac{3}{2} \left(\frac{p}{r} \right)^3 (k \cos v + h \sin v)^2.$$

Diese Aufzeichnungen sind dem Aufsatz in Nr. 2908 unter 2. entnommen.

Wenn die säcularen Störungen von k und von h bestimmt werden sollen, so ist in dem Werthe von Q neben der Störungsfuction auch die Veränderliche q in Betracht zu ziehen. Eliminirt man diese Veränderliche mittelst des Integrals der lebendigen Kraft, welches zu diesem Behufe in der Form:

$$\frac{1}{2} (q - q_0 + q_1 - q_{01}) = \Omega - c$$

geschrieben werden soll, vgl. Nr. 3590 S. 242, so ist

$$m p_0^2 Q = \frac{r^3}{p^3} \left(f \frac{p_0}{r} + q_0 - 2c - q_1 + q_{01} + 2\Omega + r \frac{d\Omega}{dr} + P \right).$$

Wenn die säcularen Störungen von k und von h bestimmt werden sollen, so kommt in diesem Werthe von Q die Veränderliche $q_1 - q_{01}$ nicht in Betracht. Man kann sich daher in dieser Absicht der einfacheren Gleichung bedienen:

$$m \dot{p}_0^2 Q = \frac{r^3}{\dot{p}^3} \left(f \frac{\dot{p}_0}{r} + q_0 + 2 \Omega + r \frac{d\Omega}{dr} + P \right), \quad (3)$$

in welcher zur Abkürzung q_0 anstatt $q_0 - 2c$ geschrieben ist. Dies folgt aus einer bekannten Eigenschaft der Veränderlichen $q_1 - q_{01}$.

Zum Behuf der Integration muss in den Störungsgleichungen (1) und (2) das Product $\frac{r_1^2}{\dot{p}_1^2} Q$ nach den Cosinus der Vielfachen von v und v_1 entwickelt werden. Durch diese Operation erhalten alle Störungsglieder die Form:

$$C \frac{\dot{p}_1^2}{r_1^2} \cos(A + Bv + cv - c_1 v_1) v',$$

in welcher A und B beständige Grössen sind, von denen die letztere mit der störenden Masse multiplicirt ist. In Nr. 3032 S. 115 ist gezeigt worden, dass die mit dem entwickelten Factor $\frac{\dot{p}_1^2}{r_1^2}$ verbundenen Störungsglieder nur dann zu säcularen Störungen führen, wenn in dem Argument des Cosinus die beiden ganzzahligen Coefficienten c und c_1 gleich Null sind. Ferner ist in Nr. 3032 S. 191 gezeigt worden,

$$\frac{P_1}{\lambda m_0 \dot{p}_{01}^2} = \frac{3}{8} \lambda \frac{\dot{p}_1}{r_1} \left(\frac{\dot{p}_1^2}{\dot{p}_{01}^2} - 1 \right)^2 = \frac{3}{2} \lambda \left(\frac{\dot{p}_1^3}{r_1^3} \right) (k_1 \cos v_1 + h_1 \sin v_1)^2,$$

vgl. Nr. 2908 unter 2.

Bei der Bestimmung der säcularen Störungen von k_1 und von h_1 kommt in dem vorliegenden Werthe von Q_1

$$\lambda m_0 \dot{p}_{01}^2 Q_1 = \frac{r^2}{\dot{p}^2} \frac{r_1}{\dot{p}_1} \left(f \frac{\dot{p}_{01}}{r_1} + q_{01} - 2c - q + q_0 + 2\Omega + r_1 \frac{d\Omega}{dr_1} + P_1 \right), \quad (3)_1$$

so sind die säcularen Störungen von k_1 unabhängig von den mit $q - q_0$ multiplicirten Störungsgliedern. Aus den so beschaffenen Störungsgliedern ergeben sich zwar säculare Störungen von h_1 ; doch sind diese säcularen Störungen von h_1 weniger von Belang, weil sich deren Coefficienten als kubische Formen der Excentricitäten darstellen.

Die Bestimmung derjenigen säcularen Störungen, welche aus den mit $q - q_0$ multiplicirten Störungsgliedern hervorgehen, vereinfacht sich durch eine partielle Integration. Indem ich nur die mit $q - q_0$ multiplicirten Störungsglieder in Betracht ziehe, habe ich zur Bestimmung von k_1 die Störungsgleichung:

$$\lambda m_0 \dot{p}_{01}^2 k_1' = \sin v_1 \frac{r^2}{\dot{p}^2} \frac{r_1}{\dot{p}_1} (q - q_0) v',$$

welche umgeschrieben werden kann in:

$$\lambda^2 m_0 \dot{p}_{01}^2 k_1' = \sin v_1 \frac{r_1^3}{\dot{p}_1^3} (q - q_0) v_1'.$$

Noch einfacher schreibt sich dieselbe in der Form:

dass es in dem Werthe des Productes $\frac{r_1^2}{\dot{p}_1^2} (q_1 - q_{01})$ keine Cosinus-Glieder giebt, in deren Argument der Coefficient c_1 gleich Null ist. Es versteht sich, dass auch in dem Werthe des Productes $\frac{r^3}{\dot{p}^3} \frac{r_1^2}{\dot{p}_1^2} (q_1 - q_{01})$ derartige Cosinus-Glieder nicht vorhanden sind, dass dasselbe also nicht zu säcularen Störungen von k und von h führt.

In der äusseren Bahn ist der Parameter der gestörten Ellipse, welche der parametrischen Gleichung entspricht, durch die Gleichung:

$$\frac{\dot{p}_1^2}{\dot{p}_{01}^2} - 1 = 2 \frac{\dot{p}_1}{r_1} (k_1 \cos v_1 + h_1 \sin v_1)$$

gegeben, in welcher $\dot{p}_{01}$ eine Integrationsbeständige ist. Die Veränderlichen k_1 und h_1 bestimmen sich aus den Störungsgleichungen:

$$-k_1' = \sin v_1 Q_1 v' \quad (1)_1$$

$$h_1' = \cos v_1 Q_1 v', \quad (2)_1$$

in welchen zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\lambda m_0 \dot{p}_{01}^2 Q_1 = \frac{r^2}{\dot{p}^2} \frac{r_1}{\dot{p}_1} \left(f \frac{\dot{p}_{01}}{r_1} + q_1 + r_1 \frac{d\Omega}{dr_1} + P_1 \right),$$

und die Veränderliche P_1 aus Gliedern der zweiten und der höheren Ordnungen zusammengesetzt ist. Werden nur die Glieder der zweiten Ordnung von P_1 berücksichtigt, so ist

neben der Störungsfuction auch die Veränderliche q_1 in Betracht. Eliminiert man diese mittelst des Integrals der lebendigen Kraft, schreibt man also die Gleichung:

$$\lambda^2 e_1 m_0 \dot{p}_{01}^2 k_1' = \left(\frac{r_1^2}{\dot{p}_1^2} \right)' \frac{q - q_0}{2},$$

und mit Rücksicht auf die Störungsgleichung:

$$\frac{1}{2} q' = \frac{d\Omega}{dv} v'$$

kann man auch schreiben:

$$\lambda^2 e_1 m_0 \dot{p}_{01}^2 k_1' = \left(\frac{r_1^2}{\dot{p}_1^2} \frac{q - q_0}{2} \right)' - \frac{r_1^2}{\dot{p}_1^2} \frac{d\Omega}{dv} v'.$$

Auf der rechten Seite ist das Integral des ersten Theils frei von säcularen Gliedern. Auch die Integration des zweiten Theils führt nicht zu säcularen Gliedern, weil in der partiellen Derivirten $\frac{d\Omega}{dv}$ kein Sinus-Glied vorhanden ist, in dessen

Argument der ganzzahlige Coefficient von v gleich Null ist. Man sieht nun, dass die mit $q - q_0$ multiplicirten Störungsglieder säculare Störungen von k_1 nicht im Gefolge haben.

Sollen diejenigen säcularen Störungen von h_1 bestimmt werden, welche aus den mit $q - q_0$ multiplicirten Störungs-

gliedern hervorgehen, so handelt es sich um die Integration der Störungsgleichung:

$$-\lambda m_0 p_{01}^2 h_1' = \cos v_1 \frac{r_1^2}{p_1^2} (q - q_0) v',$$

welche umgeschrieben werden kann in:

$$-\lambda^2 m_0 p_{01}^2 h_1' = \cos v_1 \frac{r_1^3}{p_1^3} (q - q_0) v_1' = \left(\frac{r_1^2}{p_1^2} - \frac{r_1^3}{p_1^3} \right) \frac{q - q_0}{e_1} v_1'.$$

Man findet die Derivirten:

$$\begin{aligned} \left(\frac{r_1}{p_1} e_1 \sin v_1 \right)' &= \left(\frac{r_1}{p_1} - (1 - e_1^2) \frac{r_1^2}{p_1^2} \right) v_1' \\ \left(\frac{r_1^2}{p_1^2} e_1 \sin v_1 \right)' &= \left(-\frac{r_1}{p_1} + 3 \frac{r_1^2}{p_1^2} - 2(1 - e_1^2) \frac{r_1^3}{p_1^3} \right) v_1'. \end{aligned}$$

Durch deren Addition entsteht:

$$\left[\left(\frac{r_1}{p_1} + \frac{r_1^2}{p_1^2} \right) e_1 \sin v_1 \right]' = \left[3 e_1^2 \frac{r_1^2}{p_1^2} + 2(1 - e_1^2) \left(\frac{r_1^2}{p_1^2} - \frac{r_1^3}{p_1^3} \right) \right] v_1'.$$

Die zur Bestimmung von h_1 gegebene Störungsgleichung geht daher über in:

$$-\lambda^2 m_0 p_{01}^2 h_1' = \left[\left(\frac{r_1}{p_1} + \frac{r_1^2}{p_1^2} \right) \frac{\sin v_1}{1 - e^2} \right]' \frac{q - q_0}{2} - \frac{3}{2} \frac{e_1}{1 - e_1^2} \frac{r_1^2}{p_1^2} (q - q_0) v_1'$$

Die Integration des ersten Theils rechts führt nicht zu säcularen Störungen. Man erhält daher die säcularen Störungen von h_1 aus der einfachen Gleichung:

$$\lambda m_0 p_{01}^2 h_1' = \frac{3}{2} \frac{e_1}{1 - e_1^2} \frac{r_1^2}{p_1^2} (q - q_0) v'. \quad (4)_1$$

Ich erwähne, dass diese partiellen Integrationen, durch deren Vermittelung die säcularen Störungen von h_1 und von h_2 bestimmt werden sollen, schon im § 12 der Pbl. XII der A. G. vorgenommen sind.

Werden die Störungsglieder in der Form:

$$C \frac{p_1^2}{r_1^2} \cos(A + Bv + cv - c_1 v_1) v'$$

geschrieben, welche den unentwickelten Factor $\frac{p_1^2}{r_1^2}$ hat, so führen dieselben nur dann zu säcularen Störungen, wenn in dem Argument der Cosinus die beiden Coefficienten c und c_1 gleich Null sind, vgl. Nr. 3032 S. 115. Aus diesem Satze folgt, dass man zu den sämtlichen säcularen Störungen von h_1 gelangt, welche durch die Integration der Gleichung (4)₁ entstehen, wenn man den Werth von $q - q_0$ auf diejenigen Glieder beschränkt, in welchen eine Function der Veränderlichen v allein mit dem unentwickelten Factor $\frac{p_1^2}{r_1^2}$ verbunden ist. Es erübrigt noch, dass man in den Gliedern des Pro-

ductes $\frac{r_1^2}{p_1^2} (q - q_0)$ den gemeinsamen Factor von $\frac{p_1^2}{r_1^2}$ auf die säcularen Glieder dieses Factors beschränke.

In Nr. 3032 S. 115 ist auch bewiesen, dass sich in dem Werthe von $q - q_0$ diejenigen Glieder, welche die verlangte Beschaffenheit haben, in welchen also eine Function von v allein mit dem unentwickelten Factor $\frac{p_1^2}{r_1^2}$ verbunden ist, durch die erste partielle Integration der Störungsglieder ergeben. Indem ich das Product $\frac{r_1^2}{p_1^2} \Omega = \Omega_1$ setze, führe ich die zur Bestimmung von $q - q_0$ gegebene Störungsgleichung über in:

$$\frac{1}{2} q' = \frac{p_1^2}{r_1^2} \frac{d\Omega_1}{dv} v'.$$

In der Entwicklung der partiellen Derivirten $\frac{d\Omega_1}{dv}$ sind nur diejenigen Glieder zu berücksichtigen, welche als Functionen von v allein gegeben sind. Durch die erste partielle Integration der Störungsgleichung erhält man daher den Werth:

$$\frac{1}{2} (q - q_0) = \frac{p_1^2}{r_1^2} \Omega_1.$$

Es versteht sich, dass in die Entwicklung von Ω_1 nur die von v abhängigen Glieder aufzunehmen, die beständigen Glieder also fortzulassen sind.

Es ist Ω_1 für den Fall $n = 1$ zu nehmen:

$$\Omega_1 : \lambda m_0 p_{01}^2 = -m \lambda \sum_{i=0} D_i^{(1)} \frac{p^{2i+1}}{p_{01}^{2i+1}} \left(\frac{r}{p} \right)^{2i+1} \left(\frac{p_1}{r_1} \right)^{2i} \cos(A - B_1 v + v - v_1).$$

Schreibt man in dieser Gleichung nur diejenigen Glieder, welche als Functionen von v allein gegeben sind, so ist:

$$\Omega_1 : \lambda m_0 p_{01}^2 = -m \lambda \sum_{i=0} D_i^{(1)} \frac{p^{2i+1}}{p_{01}^{2i+1}} \left(\frac{r}{p} \right)^{2i+1} i e_1 \cos(A - B_1 v + v).$$

In diesem Werthe von Ω_1 setze man die Potenz von $\frac{r}{p}$ gleich 1. Man erhält hiermit den Werth von $q - q_0$, und durch die Substitution dieses Werthes die Störungsgleichung (4)₁ in der Form:

$$h_1' = m \lambda \sum_{i=0} D_i^{(1)} \frac{p^{2i+1}}{p_{01}^{2i+1}} \frac{p_1^2}{r_1^2} \frac{3 i e e_1^2}{1 - e_1^2} \cos(A - B_1 v) v',$$

welche übereinstimmt mit der Gleichung in Nr. 3063 S. 281. Durch deren Integration ergeben sich säculare Störungen der ersten Ordnung von h_1 , welche mit einer kubischen Form der Excentricitäten multiplicirt sind.

Die säcularen Störungen der ersten Ordnung in der Bewegung des Perihels der äusseren Bahn sind in Nr. 3063 S. 285 bestimmt worden. Zu diesen säcularen Störungen gebe ich an dieser Stelle einen Nachtrag. Indem man nur

die mit $q - q_0$ multiplicirten Störungsglieder in Betracht zieht, hat man zur Bestimmung der Veränderlichen

$$\omega_1 + \cos i_1 \vartheta = \zeta_1$$

die Störungsgleichung:

$$\lambda m_0 p_{01}^2 \zeta_1' = \frac{3}{2} \frac{r^2}{p^2} (q - q_0) v'.$$

Setzt man den oben erhaltenen Werth von

$$\frac{1}{2} \frac{q - q_0}{\lambda m_0 p_{01}^2} = - m \lambda \sum_{i=0} D_i^{(1)} \frac{p^{2i+1}}{p_{01}^{2i+1}} \frac{p_1^2}{r_1^2} i e_1 \cos(A - B_1 v + v)$$

in diese Störungsgleichung ein, so ist:

$$\zeta_1' = m \lambda \sum_{i=0} D_i^{(1)} \frac{p^{2i+1}}{p_{01}^{2i+1}} \frac{p_1^2}{r_1^2} 3 i e e_1 \cos(A - B_1 v) v'.$$

Durch die Integration entsteht die nachzutragende säculare Störung der ersten Ordnung des Perihels der äusseren Bahn.

Die Entwicklung von $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q_1$ betreffend habe ich in Nr. 3543 S. 229 nachgewiesen, dass das Product $\frac{r^2}{p^2} \frac{r_1^3}{p_1^3} (q - q_0)$ zu beständigen und auch zu solchen Gliedern führe, welche die Form $C e_1 \cos v_1$ haben, und die Rechnung hat das folgende Resultat gegeben:

$$\frac{r^2}{p^2} \frac{r_1^3}{p_1^3} (q - q_0) = \kappa m m_1 \sum_{i=0} D_i^{(0)} \frac{p^{2i}}{p_{01}^{2i+1}} 4 i e^2 (1 - 3 e_1 \cos v_1)$$

Zu diesem Resultat kann man sehr schnell auf einem anderen Wege gelangen. Offenbar sind hier in der Störungsgleichung:

$$\frac{1}{2} q' = \frac{d\Omega}{dv} v'$$

nur diejenigen Glieder von Ω in Betracht zu ziehen, welche dem Falle $n = 0$ entsprechen. Bleiben die von v_1 abhängigen Glieder ausser Acht, so ist die Störungsfunktion:

$$\Omega = \kappa m m_1 \sum_{i=0} D_i^{(0)} \frac{p^{2i}}{p_{01}^{2i+1}} \left(\frac{r}{p}\right)^{2i}.$$

$$\frac{r^2}{p^2} \frac{r_1^3}{p_1^3} (q - q_0) = \kappa m m_1 \sum_{i=0} D_i^{(0)} \frac{p^{2i}}{p_{01}^{2i+1}} 4 i e^2 (1 - 3 e_1 \cos v_1),$$

übereinstimmend mit dem Obigen.

Setzt man die Störungen der ersten Ordnung des Parameters und des Perihels an die Stelle dieser Veränderlichen in die Störungsgleichungen ein, so erhält man die Störungsglieder der zweiten Ordnung. Indem man nur die säcularen und diejenigen periodischen Störungen der ersten Ordnung einsetzt, welche ebenso wie die säcularen mit der

Durch die Integration der Störungsgleichung entsteht nun:

$$\frac{1}{2} (q - q_0) = \Omega.$$

In der Störungsfunktion setze man $\left(\frac{r}{p}\right)^{2i} = - 2 i e \cos v$.

Es ist dann:

$$\frac{1}{2} (q - q_0) = - \kappa m m_1 \sum_{i=0} D_i^{(0)} \frac{p^{2i}}{p_{01}^{2i+1}} 2 i e \cos v.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $\frac{r^2}{p^2} \frac{r_1^3}{p_1^3}$, so ist das Product

störenden Masse nicht multiplicirt sind, gelangt man zu Störungsgliedern der zweiten Ordnung, welche ebenso wie die Störungsglieder der ersten Ordnung mit der ersten Potenz der störenden Masse multiplicirt sind. Die Integration dieser Störungsglieder der zweiten Ordnung führt zu säcularen Störungen der zweiten Ordnung, welche mit der störenden Masse nicht multiplicirt sind.

2. Säculare Störungen der zweiten Ordnung von h für den Fall $n = 0$.

In den Störungsgleichungen (1) und (2) kommen zunächst diejenigen Glieder von Q in Betracht, welche dem Falle $n = 0$ entsprechen, also unabhängig sind von den

Veränderlichen $x = u - u_1$ und $y = u + u_1$. Die allgemeine Entwicklung der Störungsfunktion ist in Nr. 3362 S. 29 gegeben. Von den vier Theilen dieser Entwicklung

sind hier der zweite und der vierte fortzulassen; in dem ersten Theil ist nur der Fall $n = 0$ zu berücksichtigen, in dem dritten Theil sind die geraden Zahlen $n = 2$ bis $n = \infty$ zu setzen, doch nur für den Fall $k = 0$. Hiernach ist, nachdem man $\alpha = p_0^3$ gesetzt hat:

$$\Omega: m p_0^2 = m_1 \sum_{i=0} D_i^{(0)} \frac{p_0^{2i+1}}{p_1^{2i+1}} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{2i} \left(\frac{r}{p}\right)^{2i} \left(\frac{p_1}{r_1}\right)^{2i+1} \\ - m_1 \sum_{n=2} n \alpha^{n-1} \beta \sum_{i=0} D_i^{(n)} \frac{p_0^{2i+n+1}}{p_1^{2i+n+1}} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{2i+n} \left(\frac{r}{p}\right)^{2i+n} \left(\frac{p_1}{r_1}\right)^{2i+n+1},$$

und nun geht die unter 1. gegebene Gleichung (3) über in:

$$Q = \frac{f}{m p_0^2} \frac{r^2 p_0}{p^2 p} + \frac{q_0}{m p_0^2} \frac{r^3}{p^3} + m_1 \sum_{i=0} D_i^{(0)} \frac{p_0^{2i+1}}{p_1^{2i+1}} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{2i} (2i+2) \left(\frac{r}{p}\right)^{2i+3} \left(\frac{p_1}{r_1}\right)^{2i+1} \\ - m_1 \sum_{n=2} n \alpha^{n-1} \beta \sum_{i=0} D_i^{(n)} \frac{p_0^{2i+n+1}}{p_1^{2i+n+1}} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{2i+n} (2i+n+2) \left(\frac{r}{p}\right)^{2i+n+3} \left(\frac{p_1}{r_1}\right)^{2i+n+1} + \frac{3}{8} \frac{r^2}{p^2} \left(\frac{p^2}{p_0^2} - 1\right)^2. \quad (5)$$

In diese Gleichung sollen die Störungen der ersten Ordnung von p eingesetzt werden. Bekanntlich ist:

$$\frac{p^2}{p_0^2} - 1 = 2 \frac{p}{r} (k \cos v + h \sin v) = 2 \frac{p}{r} (\varrho + \varrho_0),$$

wo die mit der störenden Masse m_1 nicht multiplicirten Glieder der ersten Ordnung von $k \cos v + h \sin v$ mit ϱ , die mit der störenden Masse multiplicirten mit ϱ_0 bezeichnet sind. Nach vollzogener Substitution von $\frac{p}{p_0}$ sind den mit ϱ multiplicirten Gliedern von Q diejenigen Störungsglieder zu

entnehmen, durch deren Integration die mit der störenden Masse nicht multiplicirten säcularen Störungen der zweiten Ordnung entstehen. Setzt man $\varrho_0 = 0$, so ist, wie aus dem unter 1. gegebenen Werthe von P zu ersehen ist, diese Grösse eine Function von ϱ allein. Es ist schon im § 3 von Nr. 2515 gezeigt worden, dass die Veränderliche P in dieser Beschränkung nicht zu säcularen Störungen von k und von h führe. In dem Werthe von Q sind aber diejenigen Glieder von P zu berücksichtigen, welche neben ϱ den Factor ϱ_0 haben. Ich schreibe daher die Glieder der zweiten Ordnung von

$$Q = \frac{-f}{m p_0^2} \frac{r}{p} \varrho + m_1 \sum_{i=0} D_i^{(0)} \frac{p_0^{2i+1}}{p_1^{2i+1}} 2i(2i+2) \left(\frac{r}{p}\right)^{2i+2} \left(\frac{p_1}{r_1}\right)^{2i+1} \varrho \\ - m_1 \sum_{n=2} n \alpha^{n-1} \beta \sum_{i=0} D_i^{(n)} \frac{p_0^{2i+n+1}}{p_1^{2i+n+1}} (2i+n)(2i+n+2) \left(\frac{r}{p}\right)^{2i+n+2} \left(\frac{p_1}{r_1}\right)^{2i+n+1} \varrho + 3 \varrho_0 \varrho. \quad (6)$$

In den Störungsgleichungen (1) und (2) müssen diejenigen Glieder der zweiten Ordnung aufgestellt werden, in welchen die Veränderlichen k und h einen beständigen Factor haben. Man gelangt zu diesen Störungsgliedern der zweiten Ordnung, indem man in der Entwicklung des Productes $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q$ nur diejenigen Glieder berücksichtigt, in welchen ϱ einen

beständigen Factor oder auch den Factor $\cos 2v$ hat. Um zugleich die mit e^2 und die mit e_1^2 multiplicirten Störungsglieder der zweiten Ordnung zu erhalten, schreibe ich in dem aus der Gleichung (6) abgeleiteten Producte $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q$ die folgenden Entwicklungen:

$$\frac{r_1^2}{p_1^2} \frac{r}{p} = (1 + \frac{3}{2} e_1^2) \left(1 + \frac{e^2}{2} + \frac{e^2}{2} \cos 2v\right) \\ \left(\frac{p_1}{r_1}\right)^{2i-1} \left(\frac{r}{p}\right)^{2i+2} = [1 + (i - \frac{1}{2})(i - 1) e_1^2] [1 + (i + 1)(i + \frac{3}{2}) e^2 (1 + \cos 2v)].$$

In dem letzten Gliede von $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q$ hat ϱ den Factor $\frac{r_1^2}{p_1^2} \varrho_0$, wo ϱ_0 die mit der störenden Masse multiplicirten Glieder der ersten Ordnung von $k \cos v + h \sin v$ bezeichnet, insoweit dieselben dem Falle $n = 0$ entsprechen. Da nur diejenigen Glieder von ϱ_0 verlangt sind, welche als beständige Grössen oder in der Form $C e^2 \cos 2v$ vorliegen, welche also Functionen von v allein sind, so bestimmen sich dieselben leicht aus der in Nr. 2908 S. 53 gegebenen Gleichung:

$$\frac{d^2 \varrho}{dv^2} + \varrho = Q. \quad (7)$$

Man multiplicire diese Gleichung mit $\frac{r_1^2}{p_1^2}$, und setze alsdann von den Gliedern der ersten Ordnung des aus der Gleichung (5) abgeleiteten Productes $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q$ die beständigen und die mit $e^2 \cos 2v$ multiplicirten in die Gleichung (7) ein. Auf der

linken Seite dieser Gleichung ist der Factor $\frac{r_1^2}{p_1^2}$ als eine Beständige zu betrachten, und man findet durch die Integration dieser Gleichung den Werth:

$$\begin{aligned} \frac{r_1^2}{p_1^2} Q_0 &= (1 + \frac{3}{2} e_1^2) \left(\frac{f}{m p_0^2} (1 + \frac{3}{2} e^2 - \frac{1}{2} e^2 \cos 2v) + \frac{q_0}{m p_0^2} (1 + 3 e^2 - e^2 \cos 2v) \right) \\ &+ m_1 \sum_{i=0} D_i^{(0)} \frac{p_0^{2i+1}}{p_1^{2i+1}} (2i+2) [1 + (i - \frac{1}{2})(i-1) e_1^2 + (i + \frac{3}{2})(i+2) e^2 (1 - \frac{1}{3} \cos 2v)] \\ &- m_1 \sum_{n=2} n \alpha^{n-1} \beta \sum_{i=0} D_i^{(n)} \frac{p_0^{2i+n+1}}{p_1^{2i+n+1}} (2i+n+2). \end{aligned}$$

Diese Entwicklungen sind nun in das aus der Gleichung (6) abgeleitete Product $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q$ einzusetzen. Indem ich zunächst diejenigen Glieder der zweiten Ordnung von $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q$ schreibe, welche mit f oder mit q_0 multiplicirt sind, erhalte ich die Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{r_1^2}{p_1^2} Q &= (1 + \frac{3}{2} e_1^2) \left(\frac{2f}{m p_0^2} (1 + 2 e^2) + \frac{3q_0}{m p_0^2} (1 + 3 e^2) - \frac{2f + 3q_0}{m p_0^2} e^2 \cos 2v \right) Q \\ &= (1 + \frac{3}{2} e_1^2) (1 + \frac{1}{2} e^2) \left(\frac{2f}{m p_0^2} (1 + \frac{3}{2} e^2) + \frac{3q_0}{m p_0^2} (1 + \frac{5}{2} e^2) \right) (1 - e^2 \cos 2v) Q. \end{aligned}$$

Jener Forderung zufolge, dass aus der Entwicklung von $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q$ diejenigen Glieder wegfallen sollen, welche die Form $C e \cos v$ haben, hat sich in Nr. 3420 S. 181 die folgende Gleichung ergeben:

$$\begin{aligned} (1 + \frac{3}{2} e_1^2) \left(\frac{2f}{m p_0^2} (1 + \frac{3}{2} e^2) + \frac{3q_0}{m p_0^2} (1 + \frac{5}{2} e^2) \right) &= m_1 \sum_{n=2} n \alpha^{n-1} \beta \sum_{i=0} D_i^{(n)} \frac{p_0^{2i+n+1}}{p_1^{2i+n+1}} (2i+n+2) (2i+n+3) \\ &- m_1 \sum_{i=0} D_i^{(0)} \frac{p_0^{2i+1}}{p_1^{2i+1}} (2i+2) (2i+3) [1 + (i - \frac{1}{2})(i-1) e_1^2 + \frac{1}{2} (i+2) (i + \frac{5}{2}) e^2]. \end{aligned} \quad (8)$$

Offenbar sind in der Entwicklung von $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q$ die Glieder der zweiten Ordnung eine Function der Grösse:
 $2f(1 + \frac{3}{2} e^2) + 3q_0(1 + \frac{5}{2} e^2),$
 deren Werth durch die Gleichung (8) gegeben ist. Wird

dieser Werth in die vollständige Entwicklung von $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q$ eingesetzt, so findet man, dass sich alle diejenigen Glieder gegeneinander aufheben, welche mit e^2 nicht multiplicirt sind, und man behält die einfache Gleichung:

$$\frac{r_1^2}{p_1^2} Q = m_1 \sum_{i=0} D_i^{(0)} \frac{p_0^{2i+1}}{p_1^{2i+1}} 2i(i + \frac{1}{2})(i+1)(i + \frac{3}{2})(1 + 2 \cos 2v) e^2 Q.$$

Indem man diejenigen Cosinus-Glieder ausser Acht lässt, deren Argument gleich $3v$ ist, stellt man die identische Gleichung auf:

$$(1 + 2 \cos 2v) (k \cos v + h \sin v) = 2 k \cos v.$$

Man kann daher schreiben:

$$\frac{r_1^2}{p_1^2} Q = m_1 \sum_{i=0} D_i^{(0)} \frac{p_0^{2i+1}}{p_1^{2i+1}} 4i(i + \frac{1}{2})(i+1)(i + \frac{3}{2}) e^2 k \cos v.$$

Dass alle die mit e^2 nicht multiplicirten Glieder von $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q$ wegfallen, ist schon in der Nr. 2909 unter 17. nachgewiesen. Doch sind dort die mit e^2 multiplicirten Glieder unvollständig angegeben.

In Nr. 3053 unter 9. habe ich die sämmtlichen säcu-

laren Störungen der ersten Ordnung von k bestimmt, in soweit deren Coefficienten lineare oder auch kubische Formen der Excentricitäten sind. Setzt man:

$$k = \frac{C e_1}{B} (\cos(A + Bv) - \cos A),$$

so geht die obige Gleichung über in:

$$\frac{r_1^2}{p_1^2} Q = m_1 \sum_{i=0} D_i^{(0)} \frac{p_0^{2i+1}}{p_1^{2i+1}} 4i(i + \frac{1}{2})(i+1)(i + \frac{3}{2}) \frac{C e_1}{B} e^2 (\cos(A + Bv) - \cos A) \cos v.$$

Dasjenige Glied von $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q$, welches die Form $Ce \cos v$ hat, ist fortzubringen, was vermittelt einer Correction der überzähligen Integrationsbeständigen f und q_0 geschehen kann. Alsdann hat man den Werth von Q in die Störungsgleichungen (1) und (2):

$$-k' = \sin v Q v', \quad h' = \cos v Q v'$$

einzusetzen. Durch deren Integration gelangt man nicht zu

säcularen Störungen der zweiten Ordnung von k ; dagegen erhält man, nachdem $(1 - e_1^2)^{3/2}$ an die Stelle des Factors $\frac{p_1^2}{r_1^2}$ gesetzt ist, die säcularen Störungen:

$$h = \frac{E}{B} e_1 e^2 (\sin(A + Bv) - \sin A), \quad (9)$$

in welchen zur Abkürzung gesetzt ist:

$$E = m_1 \sum_{i=0} D_i^{(0)} \frac{p_0^{2i+1}}{p_1^{2i+1}} 2i(i + 1/2)(i + 1)(i + 3/2)(1 - e_1^2)^{3/2} \frac{C}{B}.$$

Hiermit sind auch die primordialen Störungen gegeben:

$$h = \frac{E}{B} e_1 e^2 \cos A \sin Bv. \quad (10)$$

Werden die Störungen der ersten Ordnung von p an die Stelle dieser Veränderlichen in die von u und u_1 unabhängigen Glieder der Störungsfunktion eingesetzt, so hat es den Anschein, dass durch die Integration der Störungsgleichungen (1) und (2) säculare Störungen der zweiten Ordnung entstehen, welche mit der ersten Potenz einer Excentricität multiplicirt sind. Derartige Störungen sind aber nicht vorhanden. Denn es ist nun gezeigt worden, dass die säcularen Störungen der zweiten Ordnung, welche durch diese Substitution entstehen, mit der kubischen Form $e_1 e^2$ multiplicirt sind.

Die Forderung, dass in der Entwicklung des Productes $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q$ nach den Cosinus der Vielfachen von v und v_1 diejenigen Glieder der ersten Ordnung verschwinden sollen, welche die Form $Ce \cos v$ haben, hat zu jener Gleichung (8) geführt, welche zwischen den überzähligen Integrationsbeständigen f und q_0 besteht. Vermittelt dieser Gleichung eliminiren sich aus den oben erhaltenen Gliedern der zweiten Ordnung des Productes $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q$ die beiden Beständigen f und q_0 . Denn die Summe dieser Glieder der zweiten Ordnung ist dieselbe Function von f und q_0 , welche durch die mit

$Ce \cos v$ multiplicirten Glieder der ersten Ordnung ausgedrückt ist. Es folgt hieraus, dass die Glieder der zweiten Ordnung von $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q$ unabhängig sind von einer zweiten Relation, welche zwischen den Beständigen f und q_0 aufgestellt wird. Wie auch diese zweite Relation zwischen f und q_0 beschaffen sein mag, die Glieder der zweiten Ordnung von $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q$ bleiben davon unberührt.

In Nr. 3420 sind unter 1. die überzähligen Integrationsbeständigen f und q_0 so bestimmt worden, dass in der Entwicklung des Productes $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q$ nicht bloss diejenigen Glieder, welche die Form $Ce \cos v$ haben, sondern auch die beständigen Glieder verschwinden. Es ist dort gesagt worden, es seien die beständigen Glieder von $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q$ in der Absicht fortzubringen, damit diejenigen säcularen Störungen der zweiten Ordnung von k und von h wegfallen, welche ebenso wie säculare Störungen der ersten Ordnung von k und von h mit der ersten Potenz einer Excentricität multiplicirt sind. Das Irrige dieser Behauptung ist nun erwiesen. Denn diejenigen säcularen Störungen der zweiten Ordnung, welche mit der ersten Potenz einer Excentricität multiplicirt sind, fallen auch dann weg, wenn nur die in der Form $Ce \cos v$ gegebenen Glieder der ersten Ordnung von $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q$ gleich Null gesetzt werden.

3. Ueber die beständigen Glieder des Productes $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q$.

Die überzähligen Integrationsbeständigen f und q_0 sollen so bestimmt werden, dass aus dem nach den Cosinus der Vielfachen von v und v_1 entwickelten Producte $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q$ alle Glieder wegfallen, welche die Form $Ce \cos v$ haben, und auch diejenigen Glieder, welche sich als beständige Grössen darstellen. In Nr. 3420 unter 1. habe ich die Bestimmung von f und q_0 in diesem Sinne ausgeführt. Dass diejenigen Glieder von $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q$ wegfallen müssen, welche die Form $Ce \cos v$ haben, ist sofort ersichtlich. Denn es wird verlangt, dass der Werth der Veränderlichen h kein Glied enthalte, welches

der Zeit proportional ist. Dies kann nur dann erreicht werden, wenn die erwähnten Glieder aus dem Producte $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q$ weggebracht werden. Dass auch diejenigen Glieder von $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q$ wegfallen müssen, welche als beständige Grössen gegeben sind, dafür habe ich schon in Nr. 2909 unter 17. eine Erklärung gegeben, und derselben in Nr. 3420 unter 2. eine eingehendere Betrachtung gewidmet. Dem ungeachtet ist diese Erklärung eine verfehlte, wie sich vorhin unter 2. gezeigt hat. Dieser Irrthum ist entstanden, weil ich unterlassen hatte, die Summe aller derjenigen säcularen Glieder zweiter

Ordnung von h' zu bestimmen, welche in dem Vorhandensein der beständigen Glieder des Productes $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q$ ihren Grund haben. Die Summe dieser säcularen Störungsglieder ist aber

$$\varepsilon + \eta - (e + \beta) \sin(\varepsilon + \eta) = \frac{\sqrt{f}}{a_0^{3/2} (1 + m)} \left(1 - \frac{f}{2 m p_0^2} \right) (t - t_0) + \zeta.$$

Wenn die Bewegung des Leitstrahls in der Ellipse aus der Beobachtung bekannt ist, so kann man aus dieser Gleichung den Werth der grossen Halbaxe a_0 der der Normalgleichung entsprechenden gestörten Ellipse bestimmen. Es versteht sich, dass eine Variation der überzähligen Integrationsbeständigen f auch eine Variation der grossen Halbaxe a_0 im Gefolge hat. Wollte man $f = 0$ setzen, so würde sich ein Werth von a_0 ergeben, welcher mit einer in dem Folgenden zu besprechenden Forderung der Störungstheorie nicht vereinbar ist.

In der parametrischen Gleichung der gestörten Ellipse

$$r = a(1 - e \cos \varepsilon)$$

ist die grosse Axe $2a$ gegeben durch die Gleichung:

$$\frac{a^2}{a_0^2} - 1 = 2 \frac{p}{r} (k \cos v + h \sin v) = 2 \frac{p}{r} \varrho,$$

in welcher k und h veränderliche Grössen sind; dagegen a_0 ebenso wie e eine beständige Grösse ist. Es versteht sich, dass es während des einzelnen Umlaufs des Planeten um die Sonne jedesmal zwei Zeitpunkte giebt, an welchen $\varrho = 0$ ist. Der vorliegenden Gleichung zufolge ist für jeden Zeitpunkt $\varrho = 0$ die grosse Halbaxe gleich der Integrationsbeständigen a_0 . In der Normalgleichung der gestörten Ellipse

$$r = a_0 (1 - (e + \beta) \cos(\varepsilon + \eta))$$

ist die grosse Halbaxe zu jeder Zeit gleich a_0 , vgl. Nr. 3666 S. 315. Man muss sich vergegenwärtigen, dass es darauf ankommt, die überzähligen Integrationsbeständigen so einzurichten, dass die gestörte Ellipse, welche der Normalgleichung entspricht, während des einzelnen Umlaufs des Planeten um die Sonne so nahe als möglich mit einer Ellipse zusammenfällt, in welcher die Elemente beständige Grössen sind. Diese Absicht ist am vollkommensten erreicht, wenn die gestörte Ellipse, welche der parametrischen Gleichung entspricht, so nahe als möglich mit derjenigen zusammenfällt, in welche sie für den Fall $\varrho = 0$ übergeht, also mit derjenigen Ellipse, deren Gleichung ist:

$$r = a_0 (1 - e \cos \varepsilon).$$

Ich weise darauf hin, dass diese Ellipse dieselbe grosse Axe hat, wie die der Normalgleichung entsprechende gestörte Ellipse. Die überzähligen Integrationsbeständigen f und g_0 müssen daher so eingerichtet werden, dass in der zur Bestimmung der grossen Axe $2a$ gegebenen Gleichung der mittlere Werth der Veränderlichen ϱ gleich Null ist.

Wenn der Werth von ϱ durch eine Function der Veränderlichen v allein ausgedrückt ist, so haben alle Glieder von ϱ die Form:

$$C \cos(nA + nBv + cv),$$

gleich Null. Ich bin nun genöthigt, abermals auf eine Besprechung dieses Gegenstandes einzugehen.

Um die Bewegung des Leitstrahls in der der Normalgleichung entsprechenden gestörten Ellipse zu bestimmen, habe ich in Nr. 3666 S. 319 die folgende Gleichung aufgestellt:

in welcher n und c positive oder negative Zahlenwerthe sind. Für den Fall, dass die Coefficienten n und c beide gleich Null sind, ist das betreffende Glied von ϱ gleich C , also eine Beständige. Der mittlere Werth eines jeden dieser Glieder kann gleich Null gesetzt werden, mit alleiniger Ausnahme desjenigen, welches sich als eine beständige Grösse darstellt. Es kommt also darauf an, durch die geeignete Bestimmung der überzähligen Integrationsbeständigen f und g_0 die beständigen Glieder des in Rede stehenden Werthes von ϱ fortzubringen. Man kann aber nachweisen, dass in diesem Werthe von ϱ beständige Glieder nicht vorhanden sind,

nachdem man in der Entwicklung des Productes $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q$ nach den Cosinus der Vielfachen von v und v_1 die beständigen Glieder fortgebracht hat.

Gesetzt, es sei in dieser Entwicklung von $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q$ ein beständiges Glied γ vorhanden. In diesem Falle ergeben sich in den Werthen der Derivirten k' und h' die Störungsglieder:

$$-k' = \frac{p_1^2}{r_1^2} \gamma \sin v v', \quad h' = \frac{p_1^2}{r_1^2} \gamma \cos v v'.$$

Durch die erste partielle Integration dieser Gleichungen erhält man:

$$k = \frac{p_1^2}{r_1^2} \gamma \cos v \quad h = \frac{p_1^2}{r_1^2} \gamma \sin v$$

und demzufolge den Werth $\varrho = \frac{p_1^2}{r_1^2} \gamma$. Offenbar sind hier in dem Werthe von ϱ beständige Glieder vorhanden, welche wegfallen, wenn $\gamma = 0$ ist.

Nachdem man das beständige Glied γ fortgebracht hat, haben alle übrigen Glieder der Entwicklung von $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q$ die Form:

$$C \cos(nA + nBv + cv - c_1 v_1),$$

in welcher die Coefficienten n c c_1 gegebene positive oder negative Zahlen sind, doch nicht sämmtlich gleich Null sein können, in welchem Falle sich das Glied als ein beständiges darstellen würde. Die Bedeutung der Beständigen A und B ist durch die Gleichung:

$$\varpi - \varpi_1 = A + Bv + \sigma - \sigma_1$$

angezeigt, in welcher $\sigma - \sigma_1$ nur goniometrische Functionen von v und v_1 enthält. Die Integration der Störungsgleichungen (1) und (2) führt bekanntlich zu einem Werthe von ϱ , dessen Glieder die Form:

$$C \frac{p_1^2}{r_1^2} \cos(nA + nBv + cv - c_1 v_1)$$

haben. Wird nun in diesem Werthe von q die Veränderliche v_1 durch v ausgedrückt, so hat es den Anschein, dass man doch zu beständigen Gliedern von q gelange. In Nr. 3053 S. 71 ist das folgende Glied des Werthes von q gegeben:

$$C \frac{p_1^2}{r_1^2} e_1 \cos v_1 .$$

Um hier die Veränderliche v_1 als eine Function von v dar-

$$\frac{p_1^2}{r_1^2} e_1 \cos v_1 = -2e_1^2 \sin^2(\mu v - M) + 2e_1^2 \cos^2(\mu v - M) = 2e_1^2 \cos 2(\mu v - M) .$$

Man sieht also, dass unter den mit e_1^2 multiplicirten Gliedern des transformirten Werthes von q nicht solche vorhanden sind, welche sich als beständige Grössen darstellen. Man kann es als erwiesen ansehen, dass in dem als eine Function von v allein dargestellten Werthe von q beständige Glieder nicht vorhanden sind, nachdem man in der Entwicklung des Productes $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q$ nach den Cosinus der Vielfachen von v und v_1 die beständigen Glieder fortgebracht hat.

In dem als eine Function der beiden Veränderlichen v und v_1 erhaltenen Werthe von q sind auch säculare Glieder

$$\begin{aligned} \frac{p_1^2}{r_1^2} e \cos(A + Bv - v_1) &= 2e e_1 \sin(\mu v - M) \sin(A + Bv - \mu v + M) \\ &+ 2e e_1 \cos(\mu v - M) \cos(A + Bv - \mu v + M) = 2e e_1 \cos(A + Bv - 2\mu v + 2M) . \end{aligned}$$

Es ist hieraus ersichtlich, dass durch die Elimination von v_1 in dem vorerwähnten Werthe von q weitere säculare Glieder nicht entstehen.

Wenn der Zeitraum, für welchen die Lösung der Störungsaufgabe gelten soll, so begrenzt ist, dass das Product Bv einen kleinen Bruchwerth darstellt, so ist man im Stande, der gestörten Ellipse, welche der parametrischen Gleichung entspricht, einen noch engeren Anschluss an diejenige Ellipse zu geben, deren Gleichung

$$r = a_0 (1 - e \cos \epsilon)$$

$$\frac{r_1^2}{p_1^2} \frac{r^3}{p^3} \left(2\Omega + r \frac{d\Omega}{dr} \right) : m p_0^2 = -m_1 \sum_{i=0} D_i^{(1)} \frac{p_0^{2i+2}}{p_1^{2i+2}} (2i+3) \left(\frac{r}{p} \right)^{2i+4} \left(\frac{p_1}{r_1} \right)^{2i} \cos(A + Bv + v - v_1) .$$

Schreibt man nur die säcularen Glieder dieses Ausdrucks, so ist:

$$\frac{r_1^2}{p_1^2} \frac{r^3}{p^3} \left(2\Omega + r \frac{d\Omega}{dr} \right) : m p_0^2 = m_1 \sum_{i=0} D_i^{(1)} \frac{p_0^{2i+2}}{p_1^{2i+2}} i(2i+3)(i+2) e e_1 \cos(A + Bv) .$$

In diesen mit $m_1 e e_1$ multiplicirten säcularen Gliedern darf man anstatt $\cos(A + Bv)$ den Factor $\cos A$ schreiben, weil die Differenz $\cos(A + Bv) - \cos A$ den Factor $\sin \frac{1}{2} Bv$ hat. Man erhält hiermit weitere beständige Glieder in der Entwicklung von $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q$. Der Werth von f ist in Nr. 3420 unter 1. bestimmt worden, und es hat sich ergeben:

$$\begin{aligned} \frac{f}{m p_0^2} &= m_1 \sum_{i=0} D_i^{(0)} \frac{a_0^{2i+1}}{p_1^{2i+1}} 2i(2i+2) \left(1 + \frac{(i-2)(2i+1)}{2} e_1^2 \right) \left(1 + \frac{(2i-3)(2i+1)}{8} e^2 \right) \\ &- m_1 \sum_{n=2} n a^{n-1} \beta \sum_{i=0} D_i^{(n)} \frac{a_0^{2i+n+1}}{p_1^{2i+n+1}} (2i+n)(2i+n+2) . \end{aligned}$$

zustellen, bediene ich mich der in Nr. 3307 S. 311 gegebenen Gleichung:

$$v_1 - \mu v + M = 2e_1 \sin v_1 - 2\mu e \sin v + \dots$$

Ich erhalte die mit e_1^2 multiplicirten Glieder des vorliegenden Integrals, indem ich

$$\frac{p_1^2}{r_1^2} e_1 \cos v_1 = e_1 \cos v_1 + 2e_1^2 \cos^2 v_1$$

setze. Durch die Substitution von v_1 entsteht die Gleichung:

vorhanden. Man könnte glauben, dass man durch die Elimination von v_1 zu noch weiteren säcularen Gliedern von q gelangen würde. In Nr. 3053 S. 71 ist das folgende Glied des Werthes von q bestimmt worden:

$$C \frac{p_1^2}{r_1^2} e \cos(A + Bv - v_1) .$$

Wird hier v_1 als eine Function von v eingeführt, und werden nur die mit $e e_1$ multiplicirten Glieder in Betracht gezogen, so findet man

ist, als in dem Bisherigen geschehen ist. In den Störungsgleichungen (1) und (2) ist der Factor Q S. 19 gegeben durch die Gleichung (3):

$$m p_0^2 Q = \frac{r^3}{p^3} \left(f \frac{p_0}{r} + q_0 + 2\Omega + r \frac{d\Omega}{dr} \right) .$$

Zur Bestimmung der überzähligen Integrationsbeständigen f und q_0 kann man hier auch die säcularen Glieder der Entwicklung von $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q$ heranziehen. Indem man die Störungsfunktion für den Fall $n = 1$ nimmt, erhält man:

Auf dem dort eingeschlagenen Wege ergeben sich hier weitere Glieder der ersten Ordnung in dem Werthe von f . Man findet:

$$\frac{f}{m \dot{p}_0^2} = -m_1 \sum_{i=0} D_i^{(1)} \frac{a_0^{2i+2}}{\dot{p}_0^{2i+2}} 3i(2i+3)(i+2) e e_1 \cos A. \quad (11)$$

Handelt es sich um die Störungen der äusseren Bahn, so kommt die S. 20 gegebene Gleichung (3)₁:

$$\lambda m_0 \dot{p}_{01}^2 \frac{r_1^2}{\dot{p}_1^2} Q_1 = \frac{r^2}{\dot{p}^2} \frac{r_1^3}{\dot{p}_1^3} \left(f_1 \frac{\dot{p}_{01}}{r_1} + q_{01} + 2\Omega + r_1 \frac{d\Omega}{dr_1} \right)$$

in Betracht. Wird die Störungsfunktion für den Fall $n = 1$ genommen, so ist:

$$\frac{r^2}{\dot{p}^2} \frac{r_1^3}{\dot{p}_1^3} \left(2\Omega + r_1 \frac{d\Omega}{dr_1} \right) : \lambda m_0 \dot{p}_{01}^2 = m \lambda \sum_{i=0} D_i^{(1)} \frac{\dot{p}^{2i+1}}{\dot{p}_{01}^{2i+1}} 2i \left(\frac{r}{\dot{p}} \right)^{2i+3} \left(\frac{\dot{p}_1}{r_1} \right)^{2i-1} \cos(A - B_1 v + v - v_1).$$

Schreibt man nur die säcularen Glieder, so ist:

$$\frac{r^2}{\dot{p}^2} \frac{r_1^3}{\dot{p}_1^3} \left(2\Omega + r_1 \frac{d\Omega}{dr_1} \right) : \lambda m_0 \dot{p}_{01}^2 = -m \lambda \sum_{i=0} D_i^{(1)} \frac{\dot{p}^{2i+1}}{\dot{p}_{01}^{2i+1}} i(2i+3)(i-1/2) \cos(A - B_1 v).$$

In Nr. 3421 unter 6. und verbessert in Nr. 3543 S. 231 ist der folgende Werth bestimmt worden:

$$\begin{aligned} \frac{f_1}{\lambda m_0 \dot{p}_{01}^2} &= m \lambda \sum_{i=0} D_i^{(0)} \frac{a^{2i}}{\dot{p}_{01}^{2i}} (2i-1)(2i+1) \left(1 + \frac{i(2i+1)}{2} e^2 \right) \left(1 + \frac{i(i-2)}{2} e_1^2 \right) \\ &- m \lambda \sum_{n=2} n \alpha^{n-1} \beta \sum_{i=0} D_i^{(n)} \frac{a^{2i+n}}{\dot{p}_{01}^{2i+n}} (2i+n-1)(2i+n+1). \end{aligned}$$

Zu diesem Werthe kommt nun der folgende hinzu:

$$\frac{f_1}{\lambda m_0 \dot{p}_{01}^2} = m \lambda \sum_{i=0} D_i^{(1)} \frac{a^{2i+1}}{\dot{p}_{01}^{2i+1}} 3i(2i+3)(i-1/2) e e_1 \cos A. \quad (12)$$

4. Säculare Störungen der zweiten Ordnung von k und von h für den Fall $n = 1$.

Man gelangt zu säcularen Störungen der zweiten Ordnung von k und von h , wenn man diejenigen Störungen der ersten Ordnung von $\dot{p}$ und von $\varpi - \varpi_1$, welche in die erste Classe gehören, an die Stelle dieser Veränderlichen in die dem Falle $n = 1$ entsprechenden Glieder der Störungsfunktion einsetzt. Indem ich von der in Nr. 3362 S. 29 gegebenen Entwicklung der Störungsfunktion nur die mit $\cos(u - u_1)$ multiplicirten Glieder berücksichtige, schreibt sich dieselbe in der Form:

$$\Omega : m \dot{p}_0^2 = -m_1 \sum_{i=0} D_i^{(1)} \frac{\dot{p}_0^{2i+2}}{\dot{p}_1^{2i+2}} \left(\frac{\dot{p}}{\dot{p}_0} \right)^{2i+1} \left(\frac{r}{\dot{p}} \right)^{2i+1} \left(\frac{\dot{p}_1}{r_1} \right)^{2i+2} \cos(\varpi - \varpi_1 + v - v_1).$$

Die mit β multiplicirten Glieder der Entwicklung können fortgelassen werden. Der vorliegende Werth der Störungsfunktion ist in die Gleichung (3)

$$m \dot{p}_0^2 Q = \frac{r^3}{\dot{p}^3} \left(f \frac{\dot{p}_0}{r} + q_0 + 2\Omega + r \frac{d\Omega}{dr} + P \right)$$

einzusetzen, und man erhält hiermit neben dem S. 25 durch die Gleichung (5) gegebenen Werth von Q noch den folgenden:

$$Q = -m_1 \sum_{i=0} D_i^{(1)} \frac{\dot{p}_0^{2i+2}}{\dot{p}_1^{2i+2}} \left(\frac{\dot{p}}{\dot{p}_0} \right)^{2i+1} (2i+3) \left(\frac{r}{\dot{p}} \right)^{2i+4} \left(\frac{\dot{p}_1}{r_1} \right)^{2i+2} \cos(\varpi - \varpi_1 + v - v_1) + \frac{3}{8} \frac{r^2}{\dot{p}^2} \left(\frac{\dot{p}^2}{\dot{p}_0^2} - 1 \right)^2. \quad (13)$$

Die zu substituierenden Störungen der ersten Ordnung von $\dot{p}$ und von $\varpi - \varpi_1$ sind:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{p}^2}{\dot{p}_0^2} - 1 &= 2 \frac{\dot{p}}{r} (k \cos v + h \sin v) = 2 \frac{\dot{p}}{r} (\varrho + \varrho_0) \\ \varpi &= -2 \frac{\dot{p}}{r} (k \sin v - h \cos v) + e \sin v (k \cos v + h \sin v) + \omega, \end{aligned}$$

vgl. Nr. 3256 S. 249. In der ersteren Gleichung bedeutet q die mit der störenden Masse nicht multiplicirten, q_0 die mit der störenden Masse multiplicirten Glieder der ersten Ordnung von $k \cos v + h \sin v$, insofern dieselben dem Falle $n = 1$ entsprechen. Unter der Voraussetzung, dass der

störende Planet eine ungestörte Ellipse beschreibe, ist bekanntlich $\varpi_1 + \cos i_1 \vartheta = 0$. Indem man genähert $\varpi_1 + \cos i \vartheta = 0$, ferner $\omega + \cos i \vartheta = \varsigma$ setzt, wird die zweite Gleichung übergeführt in:

$$\varpi - \varpi_1 = -2 \frac{p}{r} (k \sin v - h \cos v) + e \sin v (k \cos v + h \sin v) + \varsigma.$$

In die beiden Gleichungen sind anstatt k, h, ς die säcularen Störungen der ersten Ordnung dieser Veränderlichen einzusetzen. Die zu substituierenden Störungen der ersten Ordnung von p und von $\varpi - \varpi_1$ sind daher als Functionen der Veränderlichen v allein gegeben. Auch die Glieder der Entwicklung von $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q$ sind als Functionen von v allein darzustellen. Ich schreibe daher in dieser Entwicklung das Product:

$$\left(\frac{p_1}{r_1}\right)^{2i} \cos(\varpi - \varpi_1 + v - v_1) = i e_1 \cos(\varpi - \varpi_1 + v).$$

Um die Glieder der zweiten Ordnung von $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q$ zu erhalten, hat man den Factor $\cos(\varpi - \varpi_1 + v)$ nach den Potenzen der Störungen von $\varpi - \varpi_1$ zu entwickeln. Doch sind die beständigen und die mit dem Bogen v multiplicirten Glieder von $\varpi - \varpi_1$ in dem Argument des Cosinus zu belassen. Die so beschaffenen Glieder von $\varpi - \varpi_1$ sind sämmtlich in dem Werthe der Veränderlichen ς enthalten. Es ergeben sich daher die Glieder der zweiten Ordnung von $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q$ in der folgenden Form:

$$\frac{r_1^2}{p_1^2} Q = -m_1 \sum_{i=0} D_i^{(1)} \frac{p_0^{2i+2}}{p_1^{2i+2}} i(2i+3) e_1 \cdot \left(\frac{r}{p}\right)^{2i+4} \left\{ \left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{2i+1} - 1\right] \cos(A + Bv + v) - (\varpi - \varpi_1 - A - Bv) \sin(A + Bv + v) \right\} + 3 \frac{r_1^2}{p_1^2} q_0 q. \quad (14)$$

Den in die Gleichung (14) zu substituierenden Werth von q_0 erhält man aus der Gleichung (7):

$$\frac{d^2 q}{dv^2} + q = Q.$$

Nachdem man dieselbe mit $\frac{r_1^2}{p_1^2}$ multiplicirt hat, nehme man

von den Gliedern der ersten Ordnung des aus der Gleichung (13) abgeleiteten Productes $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q$ diejenigen, welche die Form $C \cos(A + Bv)$ oder die Form $C \cos(A + Bv + 2v)$ haben. Aus der Gleichung (13) ergibt sich alsdann:

$$\frac{r_1^2}{p_1^2} Q = m_1 \sum_{i=0} D_i^{(1)} \frac{p_0^{2i+2}}{p_1^{2i+2}} i(2i+3)(i+2) e e_1 (\cos(A + Bv) + \cos(A + Bv + 2v)).$$

Von den beiden in den Klammern stehenden Gliedern ist aber das erstere fortzulassen, weil es, wie S. 33 gezeigt worden ist, zu den beständigen Gliedern des Productes

$\frac{r_1^2}{p_1^2} Q$ gezogen werden soll. Durch die Integration der Gleichung (7) entsteht nun:

$$3 \frac{r_1^2}{p_1^2} q_0 = -m_1 \sum_{i=0} D_i^{(1)} \frac{p_0^{2i+2}}{p_1^{2i+2}} i(2i+3)(i+2) e e_1 \cos(A + Bv + 2v).$$

Die Gleichung (14) nimmt daher die folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} \frac{r_1^2}{p_1^2} Q = & -m_1 \sum_{i=0} D_i^{(1)} \frac{p_0^{2i+2}}{p_1^{2i+2}} i(2i+3) e_1 \\ & \cdot (k \cos v + h \sin v) \left[(2i+1) \left(\frac{r}{p}\right)^{2i+3} \cos(A + Bv + v) - \left(\frac{r}{p}\right)^{2i+4} e \sin v \sin(A + Bv + v) \right. \\ & \left. + (i+2) e \cos v \cos(A + Bv + v) - (i+2) e \sin v \sin(A + Bv + v) \right] \\ & + \left[2 \left(\frac{r}{p}\right)^{2i+3} (k \sin v - h \cos v) - \left(\frac{r}{p}\right)^{2i+4} (\varsigma - A - Bv) \right] \sin(A + Bv + v). \end{aligned}$$

Von den zu substituierenden Störungen der ersten Ordnung sind in Nr. 3053 S. 93 und S. 95 gegeben:

$$k \cos v + h \sin v = \frac{C e_1}{B} (\cos (A + Bv + v) - \cos (A + v))$$

$$k \sin v - h \cos v = \frac{C e_1}{B} (\sin (A + Bv + v) - \sin (A + v)) .$$

Wenn in diesen Werthen nur die mit der ersten Potenz einer Excentricität multiplicirten Glieder in Betracht kommen, so ist:

$$C = m_1 \sum_{i=0} D_i^{(1)} \frac{p_0^{2i+2}}{p_1^{2i+2}} i(i + \frac{3}{2})$$

zu setzen. Ferner ist für diesen Fall in Nr. 3421 S. 209 gegeben:

$$\zeta - A - Bv = -\frac{C e_1}{B} (4i + 5) e ([\sin (A + Bv + v) - \sin (A + v)] \cos v - [\cos (A + Bv + v) \cos (A + v)] \sin v) .$$

Setzt man auch dies in die Gleichung (14) ein, ferner die Producte:

$$2 (\cos (A + Bv + v) - \cos (A + v)) \cos (A + Bv + v) = -\cos Bv + 1$$

$$2 (\cos (A + Bv + v) - \cos (A + v)) \sin (A + Bv + v) = -\sin Bv$$

$$2 (\sin (A + Bv + v) - \sin (A + v)) \sin (A + Bv + v) = -\cos Bv + 1 ,$$

so geht die zur Bestimmung von Q gegebene Gleichung über in:

$$\frac{r_1^2}{p_1^2} Q = -m_1 \sum_{i=0} D_i^{(1)} \frac{p_0^{2i+2}}{p_1^{2i+2}} i(i + \frac{3}{2}) \frac{C}{B} e e_1^2 \cdot ((4i^2 + 7i + 2) \cos v (\cos Bv - 1) - (5i + 8) \sin v \sin Bv) .$$

Dieser Werth von Q ist nun in die Störungsgleichungen (1) und (2):

$$-k' = \sin v Q v', \quad h' = \cos v Q v'$$

einzusetzen. Der zweite Theil des vorliegenden Werthes von Q führt zu einer säcularen Störung der zweiten Ordnung von k . Es ist:

$$k = -m_1 \sum_{i=0} D_i^{(1)} \frac{p_0^{2i+2}}{p_1^{2i+2}} \frac{1}{2} i(i + \frac{3}{2}) (5i + 8) (1 - e_1^2)^{\frac{3}{2}} \frac{C}{B} e e_1^2 \frac{\cos Bv - 1}{B} . \quad (15)$$

Dasjenige Glied von $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q$, welches die Form $C e \cos v$ hat, ist durch eine Correction der überzähligen Integrationsbeständigen f und q_0 fortzubringen. Der erste Theil in dem vorliegenden Werthe von Q führt alsdann zu der säcularen

Störung der zweiten Ordnung:

$$h = -\frac{F}{B} e e_1^2 \sin Bv ,$$

in welcher zur Abkürzung gesetzt ist:

$$F = m_1 \sum_{i=0} D_i^{(1)} \frac{p_0^{2i+2}}{p_1^{2i+2}} \frac{1}{2} i(i + \frac{3}{2}) (4i^2 + 7i + 2) (1 - e_1^2)^{\frac{3}{2}} \frac{C}{B} .$$

Offenbar ist diese säculare Störung von h eine primordiale. Die hier erlangten säcularen Störungen der zweiten Ordnung von k und von h sind mit der cubischen Form der Excentricitäten $e e_1^2$ multiplicirt.

5. Reduction der primordialen Störungen.

Unter 2. und 4. habe ich die primordialen Störungen von h bestimmt. Die Summe dieser primordialen Störungen ist:

$$h = (E e \cos A - F e_1) \frac{e e_1 \sin Bv}{B}$$

Auch in den Werthen anderer Veränderlichen giebt es primordiale Störungen. Indem ich in der S. 25 gegebenen Gleichung (5) alle diejenigen Glieder der zweiten Ordnung schreibe, welche zu primordialen Störungen führen, alsdann die Gleichung mit $(1 - e_1^2)^{\frac{3}{2}}$ multiplicire, erhalte ich:

$$\begin{aligned} \frac{r_1^2}{p_1^2} Q (1 - e_1^2)^{\frac{3}{2}} &= \frac{f'}{m p_0^2} (1 + \frac{3}{2} e^2) (1 - 2 e \cos v) + \frac{q_0'}{m p_0^2} (1 + \frac{3}{2} e^2) (1 + \frac{1}{2} e^2 - 3 e \cos v) \\ &\quad + 2 e \cos v (E e e_1 \cos A - F e_1^2) (\cos Bv - 1) . \end{aligned} \quad (17)$$

Die Beständigen f' und q_0' sind als Correctionen der in Nr. 3420 unter 1. erhaltenen Werthe der überzähligen Integrationsbeständigen f und q_0 aufzufassen. Die Summe derjenigen Glieder von $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q$, welche die Form $C e \cos v$ haben, ist bekanntlich gleich Null zu setzen. Man erhält daher zur Bestimmung der Correctionen f' und q_0' die Gleichung:

$$\frac{f'}{m \dot{p}_0^2} (1 + \frac{3}{2} e^2) + \frac{3}{2} \frac{q_0'}{m \dot{p}_0^2} (1 + \frac{5}{2} e^2) + E e e_1 \cos A - F e_1^2 = 0. \quad (18)$$

Diese Gleichung führt in der That zu weiteren primordinalen Störungen, wenn sie in Verbindung gebracht wird mit derjenigen Gleichung, durch welche das Perihel der der Normalgleichung entsprechenden gestörten Ellipse gegeben ist. In Nr. 3666 S. 323 habe ich die folgende Gleichung aufgestellt:

$$-m \dot{p}_0^2 \zeta' = f \frac{\dot{p}_0}{r} + \frac{3}{2} (q_0 - q_1 + q_{01}) + 3 \Omega + 2 r \frac{d\Omega}{dr} + P + N$$

zu bestimmen ist. Die säcularen Störungen der zweiten Ordnung von ζ sind in Nr. 3053 unter 10. bestimmt worden. Dieselben haben die Form $C(Bv)^2$, wo C eine quadratische Form der Excentricitäten ist. Zu diesen Störungen der zweiten Ordnung kommen nun noch diejenigen hinzu, welche aus der folgenden Gleichung hervorgehen:

$$-\zeta' = \left(\frac{f'}{m \dot{p}_0^2} (1 + \frac{1}{2} e^2) + \frac{3}{2} \frac{q_0'}{m \dot{p}_0^2} (1 + \frac{3}{2} e^2) \right) v',$$

vgl. Nr. 3420 S. 189. Es ist zu beachten, dass die rechte Seite dieser Gleichung dieselbe Function von f' und q_0' ist, wie die Summe derjenigen Glieder der Entwicklung von $\frac{r_1^2}{\dot{p}_1^2} Q$, welche die Form $C e \cos v$ haben. In dem Werthe der Derivirten ζ' eliminiren sich daher die beiden Beständigen f' und q_0' mittelst der Gleichung (18), und man erhält durch die Integration der vorliegenden Störungsgleichung den Werth:

$$\zeta = (E e e_1 \cos A - F e_1^2) (1 - e^2) v. \quad (19)$$

Offenbar ist hiermit eine primordiale Störung der Veränderlichen ζ gegeben. Man kann diese primordiale Störung von ζ aus der primordialen Störung von h ableiten, indem man den mit der ersten Potenz von $m_1 v$ multiplicirten Gliedern der primordialen Störung von h den Factor $\frac{1 - e^2}{e}$ giebt.

Setzt man die primordialen Störungen von ζ und h an die Stelle dieser Veränderlichen in die Gleichung:

$$H + \cos i \vartheta = \zeta - h \frac{1 - e^2}{e}$$

ein, so ergibt sich eine Reduction. Man sieht sofort, dass sich in der Bewegung der Apsidenlinie die mit der ersten Potenz von $m_1 v$ multiplicirten Glieder dieser primordialen Störungen gegeneinander aufheben. Die in der Bewegung der Apsidenlinie noch übrigen Glieder der primordialen Störungen haben daher den Factor $C(Bv)^3$, wo C eine quadratische Form der Excentricitäten ist. In der Bewegung der Apsidenlinie kommen die primordialen Störungen erst dann zur Geltung, wenn der Zeitraum, für welchen die Störungen bestimmt werden sollen, so lang ist, dass die Differenz $Bv - \sin Bv$, mit welcher die Summe dieser primordialen Störungen multiplicirt ist, nicht mehr gleich Null gesetzt werden kann.

$$H + \cos i \vartheta = \zeta - h \frac{1 - e^2}{e},$$

in welcher die Veränderliche $\zeta = \omega + \cos i \vartheta$ aus der Störungsgleichung:

Ich werde nun zeigen, dass von den Gliedern der zweiten Ordnung des Productes $\frac{r_1^2}{\dot{p}_1^2} Q$ auch diejenigen, welche sich als beständige Grössen darstellen, zu primordialen Störungen führen. Es ergeben sich durch die Substitution derjenigen Störungen von p und von $\varpi - \varpi_1$, welche in die erste Classe gehören, in der Entwicklung von $\frac{r_1^2}{\dot{p}_1^2} Q$ beständige Glieder. Es ist zu beachten, dass die Glieder der ersten Ordnung von $\frac{r_1^2}{\dot{p}_1^2} Q$ sämmtlich mit der störenden Masse multiplicirt sind, und dass die zu substituierenden Störungen der ersten Ordnung von p und von $\varpi - \varpi_1$ den Factor $m_1 v$ haben. Die durch diese Substitutionen entstehenden beständigen Glieder der zweiten Ordnung von $\frac{r_1^2}{\dot{p}_1^2} Q$ haben daher den Factor $m_1^2 v$. Auch sind dieselben mit einer quadratischen Form der Excentricitäten multiplicirt. Die so beschaffenen beständigen Glieder von $\frac{r_1^2}{\dot{p}_1^2} Q$ sind daher ausser Acht zu lassen. Dagegen können die in die Gleichung (17) aufgenommenen beständigen Glieder von $\frac{r_1^2}{\dot{p}_1^2} Q$ nicht ausser Acht bleiben. Die Summe dieser Glieder ist bekanntlich gleich Null zu setzen, und es ergibt sich somit neben (18) eine zweite Gleichung zur Bestimmung der Unbekannten f' und q_0' . Indem ich diese Glieder mit $3(1 - \frac{1}{2} e^2)$ multiplicire, erhalte ich:

$$\frac{3f'}{m \dot{p}_0^2} (1 + e^2) + \frac{3q_0'}{m \dot{p}_0^2} (1 + \frac{5}{2} e^2) = 0.$$

Diese Gleichung kann umgeschrieben werden in:

$$\frac{f'}{m \dot{p}_0^2} + \frac{2f'}{m \dot{p}_0^2} (1 + \frac{3}{2} e^2) + \frac{3q_0'}{m \dot{p}_0^2} (1 + \frac{5}{2} e^2) = 0.$$

Mit Rücksicht auf die Gleichung (18) ergibt sich aus derselben der Werth:

$$\frac{f'}{2 m \dot{p}_0^2} = E e e_1 \cos A - F e_1^2. \quad (20)$$

Die Bewegung des Leitstrahls in der der Normalgleichung entsprechenden gestörten Ellipse bestimmt sich aus der in Nr. 3666 S. 319 gegebenen Gleichung:

$$\varepsilon + \eta - (e + \beta) \sin(\varepsilon + \eta) = n t + c + \zeta,$$

welche mit Rücksicht auf den in Nr. 3666 S. 316 erhaltenen Werth von ζ übergeht in:

$$\varepsilon + \eta - (e + \beta) \sin(\varepsilon + \eta) = n(t - t_0) + \frac{h}{e} (1 - e^2)^{3/2}.$$

Die mittlere Geschwindigkeit n des Leitstrahls in der gestörten Ellipse, welche der parametrischen Gleichung entspricht, ist als eine Function von f dargestellt worden. Es ist in Nr. 3666 S. 308 die Gleichung gegeben:

$$n \left(1 + \frac{f}{2 m p_0^2} \right) = \frac{\sqrt{f}}{a_0^{3/2} (1 + m)}.$$

Durch die Correction von f erleidet die Beständige n die Correction:

$$n' = - \frac{n f'}{2 m p_0^2}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $t - t_0$, setzt alsdann $n(t - t_0) = v$, und den durch die Gleichung (20) gegebenen Werth von f' ein, so ist:

$$n'(t - t_0) = - (E e e_1 \cos A - F e_1^2) v. \quad (21)$$

Offenbar ist das Product $n'(t - t_0)$ eine primordiale Störung der Veränderlichen $n(t - t_0)$. Man kann diese primordiale Störung der Veränderlichen $n(t - t_0)$ aus der primordialen Störung von h ableiten, indem man den mit der ersten Potenz von $m_1 v$ multiplicirten Gliedern der primordialen Störung von h den Factor $-\frac{1}{e}$ giebt.

$$Bv - \sin Bv = \pi - Bv_1 - \sin Bv_1 = \pi - 2Bv_1 + \frac{(Bv_1)^3}{2 \cdot 3} - \frac{(Bv_1)^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$$

Offenbar kann hier von einer Reduction der primordialen Störungen nicht mehr die Rede sein. Ebenso wenig ergibt sich eine solche Reduction, wenn der Kreisbogen Bv dem

Setzt man nun die primordialen Störungen von $n(t - t_0)$ und von h an die Stelle dieser Veränderlichen in die Gleichung:

$$\varepsilon + \eta - (e + \beta) \sin(\varepsilon + \eta) = n(t - t_0) + \frac{h}{e} (1 - e^2)^{3/2}$$

ein, so heben sich die mit der ersten Potenz von $m_1 v$ multiplicirten Glieder der primordialen Störungen nicht vollständig gegeneinander auf. Man erhält die in der Bewegung des Leitstrahls vorhandenen mit der ersten Potenz von $m_1 v$ multiplicirten Glieder der primordialen Störungen, indem man die primordialen Störungen der Veränderlichen $n(t - t_0)$ mit $\frac{3}{2} e^2$ multiplicirt.

Es wäre ein Irrthum zu glauben, dass sich das Vorhandensein der hiermit nachgewiesenen Reductionen der primordialen Störungen auf den unbegrenzten Zeitraum erstreckt. Diese Reductionen sind nichts weiter, als der Ausdruck einer Entwicklungsform der Integrale, welche nur dann zulässig ist, wenn der Kreisbogen Bv dem ersten Quadranten angehört. Wenn $Bv < \frac{1}{2} \pi$ ist, so fällt in der Entwicklung der Differenz $Bv - \sin Bv$ nach den Potenzen von Bv , mit welcher die in den Bewegungen der Apsidenlinie und des Leitstrahls vorhandenen säcularen Störungen der zweiten Ordnung multiplicirt sind, die erste Potenz von Bv weg. Denn es ist:

$$Bv - \sin Bv = \frac{(Bv)^3}{2 \cdot 3} - \frac{(Bv)^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$$

Wenn der Kreisbogen Bv dem zweiten Quadranten angehört, so setze man $Bv = \pi - Bv_1$. Es ist dann Bv_1 ein Kreisbogen des ersten Quadranten, und man erhält die Entwicklung:

$$Bv - \sin Bv = \pi - Bv_1 - \sin Bv_1 = \pi - 2Bv_1 + \frac{(Bv_1)^3}{2 \cdot 3} - \frac{(Bv_1)^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$$

dritten Quadranten angehört. Denn setzt man $Bv = \pi + Bv_2$, so dass Bv_2 ein Kreisbogen des ersten Quadranten ist, so hat man die Entwicklung:

$$Bv - \sin Bv = \pi + Bv_2 + \sin Bv_2 = \pi + 2Bv_2 - \frac{(Bv_2)^3}{2 \cdot 3} + \frac{(Bv_2)^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots$$

Wenn endlich der Kreisbogen Bv dem vierten Quadranten angehört, so hat man $Bv = 2\pi - Bv_3$ zu setzen, wo dann Bv_3 ein Kreisbogen des ersten Quadranten ist. Man erhält die Entwicklung:

$$Bv - \sin Bv = 2\pi - Bv_3 + \sin Bv_3 = 2\pi - \frac{(Bv_3)^3}{2 \cdot 3} + \frac{(Bv_3)^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots$$

Auch hier sind die oben nachgewiesenen Reductionen der primordialen Störungen nicht vorhanden, obwohl die mit ersten Potenz von Bv_3 multiplicirten Glieder weggefallen sind.

Durch die Substitution der Störungen erster Ordnung von p und von $\varpi - \varpi_1$ entstehen Glieder der zweiten Ordnung. Es wäre nicht befremdlich, wenn sich nicht bloss in dem Werthe von h' , sondern auch in dem Werthe von k' Glieder der zweiten Ordnung fänden, welche als beständige Grössen gegeben sind. Denn durch die Substitution des

Werthes von $\frac{p}{p_0}$ mittelst der Gleichung:

$$\frac{p^2}{p_0^2} - 1 = 2 \frac{p}{r} \frac{C e_1}{B} (\cos(A + Bv + v) - \cos(A + v))$$

in die Störungsgleichungen:

$$-k' = \sin v Q v', \quad h' = \cos v Q v'$$

erhält man ein beständiges Glied von h' , welches den Factor $\cos A$, und ein beständiges Glied von k' , welches den Factor $\sin A$ hat. Die Integration dieser Störungsglieder führt zu Störungen der zweiten Ordnung von h und von k , welche dem Bogen v proportional sind. Derartige Störungen sind aber in den Werthen von h und von k unzulässig. Vermittelst der überzähligen Integrationsbeständigen lassen sich die dem Bogen v proportionalen Glieder aus dem Werthe von h fortbringen; nicht aber aus dem Werthe von k . In dem erwähnten Werthe von k haben dieselben den Factor $\sin A$, fallen also nur für den Fall $\sin A = 0$ weg.

In Nr. 3420 S. 183–84 ist gezeigt worden, dass für den Fall $\sin A = 0$ in dem Werthe der Derivirten k' niemals Glieder der zweiten Ordnung vorhanden sind, welche sich als beständige Grössen darstellen. Dies beruht auf einem in Nr. 2515 § 1 bereits bewiesenen Satze. Der Beweis dieses Satzes geht von einer bekannten Eigenschaft der Störungsgleichungen aus. Wenn nämlich nur die Störungsglieder der ersten Ordnung in Betracht kommen, so sind die Derivirten q' und k' als Summen von Sinus-Gliedern, die Derivirten h' und ς' als Summen von Cosinus-Gliedern gegeben, und die Argumente dieser goniometrischen Glieder haben die Form:

$$b\varpi + b_1\varpi_1 + cv + c_1v_1,$$

in welcher die Coefficienten b, b_1, c, c_1 gegebene positive oder negative Zahlen sind. In Nr. 2515 wird gezeigt, dass das Argument:

$$\frac{p^2}{p_{01}} - 1 = 2 \frac{p}{r} (k \cos v + h \sin v,$$

$$\varpi - \varpi_1 = -2 \frac{p}{r} (k \sin v - h \cos v) + e \sin v (k \cos v + h \sin v) + \varsigma.$$

Es wird verlangt, dass in den Werthen der Derivirten q' und k' auch unter den Gliedern der zweiten Ordnung nicht solche vorkommen, welche als beständige Grössen gegeben sind. Offenbar ist das erreicht, wenn sich in den Derivirten q' und k' auch die Glieder der zweiten Ordnung sämmtlich als Sinus-Glieder darstellen, deren Argumente die angegebene Form haben. Die Substitution der vorliegenden Störungen der ersten Ordnung von p und von $\varpi - \varpi_1$ führt aber nur dann zu solchen Störungsgliedern der zweiten Ordnung von q' und von k' , wenn in denselben der Werth von $k \cos v + h \sin v$ nur Cosinus-Glieder, und der Werth von $k \sin v - h \cos v$ nur Sinus-Glieder der erwähnten Art enthält. Es ist zu beachten, dass sich die Störungen der ersten Ordnung von q und von k als Summen von Cosinus-Gliedern, und wenn von den Integrationsbeständigen abgesehen wird, die Störungen der ersten Ordnung von h und von ς als Summen von Sinus-Gliedern darstellen, deren Argumente die vorgeschriebene Form haben. Die Integrationsbeständige h_0 muss daher gleich Null gesetzt werden. Denn nur in dem Falle $h_0 = 0$ ist der Werth von $k \cos v + h \sin v$ als eine Summe von Cosinus-Gliedern, und der Werth von $k \sin v - h \cos v$ als eine Summe von Sinus-Gliedern der erwähnten Art gegeben. Es folgt hieraus, dass es unter den Gliedern der zweiten Ordnung von k' nicht solche giebt, welche sich als beständige Grössen darstellen, wenn $h_0 = 0$ gesetzt wird. Dies ist der oben erwähnte in Nr. 2515 § 1 bereits bewiesene Satz.

Andrerseits ist in Nr. 3032 S. 133–34 gezeigt worden, dass man die Integrationsbeständige $h_0 = C \sin A$ zu setzen

6. Reduction der von den Veränderlichen q und q_1 abhängigen Störungen.

Indem ich zu den Störungen der äusseren Bahn übergehe, mache ich zunächst von der S. 21 gegebenen Gleichung (4)₁:

$$\lambda m_0 p_{01}^2 h_1' = \frac{3}{2} \frac{e_1}{1 - e_1^2} \frac{r^2}{p^2} (q - q_0) v'$$

$$b\varpi + b_1\varpi_1 + cv + c_1v_1,$$

nachdem man $\varpi = k + \gamma t$, $\varpi_1 = k_1 + \gamma_1 t$, $v = h + \beta t$, $v_1 = h_1 + \beta_1 t$ gesetzt hat, keinesfalls in eine beständige Grösse übergeht, dass dasselbe nur dann verschwindet, wenn die Coefficienten b, b_1, c, c_1 sämmtlich gleich Null sind. In diesem Falle ist das Sinus-Glied gleich Null, das Cosinus-Glied gleich der Einheit. Hieraus folgt, dass es in den Werthen der Derivirten q' und k' unter den Gliedern der ersten Ordnung in der That nicht solche giebt, welche sich als beständige Grössen darstellen, dass solche Glieder der ersten Ordnung nur in den Werthen der Derivirten h' und ς' vorkommen können.

Man erhält die Störungsglieder der zweiten Ordnung, indem man die Störungen der ersten Ordnung von p und von $\varpi - \varpi_1$ an die Stelle dieser Veränderlichen in die Störungsgleichungen einsetzt. Die zu substituierenden Störungen der ersten Ordnung sind:

habe, wo C eine gegebene Beständige ist. Die beiden Forderungen $h_0 = 0$ und $h_0 = C \sin A$ sind nur dann vereinbar, wenn $\sin A = 0$ ist. Ich habe hiermit etwas eingehender als in Nr. 3420 S. 183–84 gezeigt, dass in der Derivirten k' beständige Glieder der zweiten Ordnung nicht vorhanden sind, wenn $\sin A = 0$ gesetzt wird. Es ist bekanntlich $A = \varpi_0 - \varpi_{01}$. Unter den Gliedern der zweiten Ordnung von k' giebt es daher nicht solche, welche als beständige Grössen gegeben sind, wenn der Zeitpunkt, an welchem die Abstände der Perihelien des gestörten und des störenden Planeten von den aufsteigenden Knoten gleich gross oder um 180° verschieden sind, zum Anfangspunkt der Bewegung gemacht wird.

In diesem Aufsatz sind unter 2. und 4. die säcularen Störungen der zweiten Ordnung von k bestimmt worden; aber es haben sich keine dem Bogen v proportionalen Glieder von k ergeben, obwohl ich nicht den Fall $\sin A = 0$, sondern einen unbestimmten Anfangspunkt der Bewegung vorausgesetzt habe. Man muss also annehmen, dass sich in dem Werthe der Derivirten k' diejenigen Glieder der zweiten Ordnung, welche sich als beständige Grössen darstellen, gegeneinander aufheben. Ob sich in dem Werthe der Derivirten k' auch diejenigen Glieder der dritten Ordnung, welche sich als beständige Grössen ergeben, gegeneinander aufheben, oder ob man, falls es darauf ankäme, die Störungen der dritten Ordnung von k zu bestimmen, genöthigt wäre, den Zeitpunkt $\sin A = 0$ als den Anfang der Bewegung vorauszusetzen, möge hier dahin gestellt bleiben.

einen Gebrauch. Es ist unter 1. gezeigt worden, dass man die sämmtlichen säcularen Störungen von h_1 erhält, welche durch die Integration der Gleichung (4)₁ entstehen, indem man in diese Gleichung den Werth $q - q_0 = \frac{p_1^2}{r_1^2} \Omega_1$ einsetzt,

wo $\mathcal{Q}_1$ diejenigen Glieder der Entwicklung von $\frac{r_1^2}{\rho_1^2} \mathcal{Q}$ bezeichnet, welche als Functionen von v allein gegeben sind. Man gelangt zu säcularen Störungen der zweiten Ordnung von h_1 , welche mit einer cubischen Form der Excentricitäten

multiplicirt sind, wenn man in diesem Werthe von $q - q_0$ die Störungfunction für den Fall $n = 1$ nimmt; alsdann an die Stelle von ρ_1 und von $\varpi_1 - \varpi$ die Störungen der ersten Ordnung dieser Veränderlichen einsetzt. Es ist dann:

$$\mathcal{Q} = -\kappa m m_1 \sum_{i=0} D_i^{(1)} \frac{\rho^{2i+1}}{\rho_{01}^{2i+2}} \left(\frac{\rho_{01}}{\rho_1}\right)^{2i+2} \left(\frac{r}{\rho}\right)^{2i+1} \left(\frac{\rho_1}{r_1}\right)^{2i+2} \cos(\varpi - \varpi_1 + v - v_1).$$

Indem man nur die Glieder der zweiten Ordnung von $\mathcal{Q}$ schreibt, erhält man die identische Gleichung:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\rho_{01}}{\rho_1}\right)^{2i+2} \cos(\varpi - \varpi_1 + v - v_1) \\ &= \left[\left(\frac{\rho_{01}}{\rho_1}\right)^{2i+2} - 1 \right] \cos(A - B_1 v + v - v_1) + (\varpi_1 - \varpi + A - B_1 v) \sin(A - B_1 v + v - v_1). \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung sind die folgenden Werthe einzusetzen:

$$\frac{\rho_1^2}{\rho_{01}^2} - 1 = 2 \frac{\rho_1}{r_1} (k_1 \cos v_1 + h_1 \sin v_1)$$

$$\varpi_1 - \varpi + A - B_1 v = -2 \frac{\rho_1}{r_1} (k_1 \sin v_1 - h_1 \cos v_1),$$

vgl. Nr. 3256 S. 257, in welchen gegeben ist:

$$k_1 \cos v_1 + h_1 \sin v_1 = \frac{C_1 e}{B_1} (\cos(A - B_1 v - v_1) - \cos(A - v_1))$$

$$k_1 \sin v_1 - h_1 \cos v_1 = -\frac{C_1 e}{B_1} (\sin(A - B_1 v - v_1) - \sin(A - v_1))$$

ferner

$$C_1 = m \lambda \sum_{i=0} D_i^{(1)} \frac{\rho^{2i+1}}{\rho_{01}^{2i+1}} i(i + \frac{3}{2}),$$

vgl. Nr. 3063 S. 281 und S. 285. Die identische Gleichung geht nun über in:

$$\left(\frac{\rho_{01}}{\rho_1}\right)^{2i+2} \cos(\varpi - \varpi_1 + v - v_1) = \frac{i C_1 e}{B_1} \frac{\rho_1}{r_1} (\cos(-B_1 v + v) - \cos v).$$

Man hat dies in den obigen Werth von $\mathcal{Q}$ einzusetzen; alsdann in dem Producte $\frac{r_1}{\rho_1^2} \mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1$ die Potenz von $\frac{\rho_1}{r_1}$ der Einheit gleich zu setzen. Indem man auch die Potenz

von $\frac{r}{\rho}$ der Einheit gleichsetzt, erhält man, weil $m_0 = m_1$ und $\kappa = \lambda^2 \rho_{01}^3$ ist, den Werth:

$$\frac{1}{2} \frac{q - q_0}{\lambda m_0 \rho_{01}^2} = -m \lambda \sum_{i=0} D_i^{(1)} \frac{\rho^{2i+1}}{\rho_{01}^{2i+1}} \frac{\rho_1^2}{r_1^2} \frac{i C_1 e}{B_1} (\cos(-B_1 v + v) - \cos v).$$

Die Gleichung (4)₁ geht nun über in:

$$h_1' = m \lambda \sum_{i=0} D_i^{(1)} \frac{\rho^{2i+1}}{\rho_{01}^{2i+1}} \frac{3 i e_1}{1 - e_1^2} \frac{\rho_1^2}{r_1^2} \frac{C_1 e^2}{B_1} (\cos B_1 v - 1) v'.$$

Das beständige Glied in diesem Werthe von h_1' ist vermittelt einer Correction der überzähligen Integrationsbeständigen fortzubringen. Durch die Integration der Gleichung (4)₁ erhält man säculare Störungen der zweiten Ordnung von h_1 , welche mit der cubischen Form der Excentricitäten $e_1 e^2$ multiplicirt sind. Es ist:

$$h_1 = \frac{D_1}{B_1} e_1 e^2 \sin B_1 v, \quad (22)$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$D_1 = m \lambda \sum_{i=0} D_i^{(1)} \frac{\rho^{2i+1}}{\rho_{01}^{2i+1}} 3 i \frac{C_1}{B_1}.$$

Offenbar sind diese säcularen Störungen der zweiten Ordnung von h_1 primordiale.

Unter 5. ist gezeigt worden, dass sich in der Bewegung der Apsidenlinie der gestörten Ellipse, welche der Normalgleichung entspricht, die mit der ersten Potenz von m multiplicirten Glieder der primordialen Störungen gegeneinander aufheben. In der Bewegung der Apsidenlinie ergeben

sich weitere Reductionen derjenigen säcularen Störungen, welche aus den mit $q - q_0$ multiplicirten Störungsgliedern hervorgehen. Es heben sich nicht bloss die mit der ersten Potenz von $m v$ multiplicirten Glieder, sondern auch alle übrigen Glieder dieser säcularen Störungen gegeneinander auf; und es gilt das ebenso für die säcularen Störungen der ersten Ordnung wie für die der zweiten Ordnung. Wenn nur die mit $q - q_0$ multiplicirten Störungsglieder in Betracht kommen, so hat man zur Bestimmung der säcularen Störungen von h_1 die Gleichung (4)₁:

$$\lambda m_0 p_{01}^2 h_1' = \frac{3}{2} \frac{e_1}{1 - e_1^2} \frac{r^2}{p^2} (q - q_0) v'.$$

Ferner hat man in diesem Falle zur Bestimmung der Veränderlichen $\omega_1 + \cos i_1 \vartheta = \varsigma_1$ die Gleichung:

$$\lambda m_0 p_{01}^2 \varsigma_1' = \frac{3}{2} \frac{r^2}{p^2} (q - q_0) v',$$

vgl. Nr. 3256 S. 257. Ich verweise nun auf die in Nr. 3666 S. 323 gegebene Gleichung:

$$\lambda m_0 p_{01}^2 h_1' = - \left[\left(\frac{r_1}{p_1} + \frac{r_1^2}{p_1^2} \right) \frac{\sin v_1}{1 - e_1^2} \right]' \frac{q - q_0}{2 \lambda} + \frac{3}{2} \frac{e_1}{1 - e_1^2} (q - q_0).$$

Der Werth der Veränderlichen $q - q_0$ ist bekanntlich durch eine einfache Quadratur ausgedrückt. In der vorliegenden transformirten Störungsgleichung lässt sich das Integral des ersten Theils rechts auf eine einfache Quadratur zurückführen. Denn es ist:

$$\left[\left(\frac{r_1}{p_1} + \frac{r_1^2}{p_1^2} \right) \frac{\sin v_1}{1 - e_1^2} \right]' \frac{q - q_0}{2 \lambda} = \left[\left(\frac{r_1}{p_1} + \frac{r_1^2}{p_1^2} \right) \frac{\sin v_1}{1 - e_1^2} \frac{q - q_0}{2 \lambda} \right]' - \left(\frac{r_1}{p_1} + \frac{r_1^2}{p_1^2} \right) \frac{\sin v_1}{1 - e_1^2} \frac{1}{\lambda} \frac{d\Omega}{dv} v'.$$

Das Integral des zweiten Theils der transformirten Störungsgleichung kann nur durch zweifache Quadraturen ausgedrückt werden. Man hat sich daher, um alle diejenigen Störungen von h_1 zu erhalten, welche durch zweifache Quadraturen ausgedrückt sind, der Gleichung (4)₁:

$$\lambda m_0 p_{01}^2 h_1' = \frac{3}{2} \frac{e_1}{1 - e_1^2} \frac{r^2}{p^2} (q - q_0) v'$$

zu bedienen. Wenn auch in der zur Bestimmung von ς_1 gegebenen Störungsgleichung nur die mit $q - q_0$ multiplicirten Glieder berücksichtigt werden, so schreibt sich dieselbe in der Form:

$$\lambda m_0 p_{01}^2 \varsigma_1' = \frac{3}{2} \frac{r^2}{p^2} (q - q_0) v'.$$

Die hiermit erlangten Störungen von ς_1 sind gleichfalls durch zweifache Quadraturen ausgedrückt.

Um die säcularen Störungen von h_1 und von ς_1 zu erhalten, welche sich aus diesen Gleichungen ergeben, sind S. 22 an die Stelle von $q - q_0$ die dort angegebenen Glieder des Werthes von $q - q_0$ eingesetzt worden. Hier aber kommen in diesen Gleichungen die sämtlichen Glieder des Werthes von $q - q_0$ in Betracht. Werden die auf diesem Wege erlangten Störungen von h_1 und von ς_1 in die Gleichung:

$$\Pi_1 + \cos i_1 \vartheta = \varsigma_1 - h_1 \frac{1 - e_1^2}{e_1}$$

eingesetzt, so heben sich auch die nicht säcularen Störungen von h_1 und von ς_1 gegeneinander auf. Es ist zu beachten,

$$\Pi_1 + \cos i_1 \vartheta = \varsigma_1 - h_1 \frac{1 - e_1^2}{e_1},$$

durch welche das Perihel der der Normalgleichung entsprechenden gestörten Ellipse gegeben ist. Setzt man in diese Gleichung diejenigen säcularen Störungen von h_1 und von ς_1 ein, welche aus den vorliegenden Störungsgleichungen hervorgehen, so heben sich diese säcularen Störungen auch in dem unbegrenzten Zeitraum gegeneinander auf. »In der Bewegung der Apsidenlinie der der Normalgleichung entsprechenden gestörten Ellipse sind also diejenigen säcularen Störungen, welche aus den mit der Veränderlichen $q - q_0$ multiplicirten Störungsgliedern hervorgehen, bedeutungslos.«

Werden in der zur Bestimmung von h_1 gegebenen Störungsgleichung nur die mit $q - q_0$ multiplicirten Glieder berücksichtigt, so ist:

$$- \lambda m_0 p_{01}^2 h_1' = \cos v_1 \frac{r_1}{p_1} (q - q_0).$$

S. 21 ist diese Gleichung vermittelt einer partiellen Integration übergeführt worden in:

dass alle diejenigen Störungen der elliptischen Elemente, welche sich als zweifache Quadraturen darstellen, ausschliesslich aus den mit $q - q_0$ oder mit $q_1 - q_{01}$ multiplicirten Störungsgliedern hervorgehen. Man kann daher sagen »dass sich in der Bewegung der Apsidenlinie der der Normalgleichung entsprechenden gestörten Ellipse alle diejenigen Störungen der elliptischen Elemente, welche nur durch zweifache Quadraturen erlangt werden können, gegeneinander aufheben.« Dieser Satz gilt ebensowohl für die innere wie für die äussere Bahn.

Für den Fall einer genäherter Commensurabilität der mittleren Bewegungen des gestörten und des störenden Planeten giebt es bekanntlich in den periodischen Störungen der ersten Ordnung, also auch in dem Werthe von $q - q_0$ Glieder, welche beträchtlich gross sind, weil sie den kleinen Integrationsnenner δ haben. Es versteht sich, dass in dem zweifachen Integral $\int (q - q_0) dt$ periodische Glieder vorhanden sind, deren Integrationsnenner mit dem Quadrat von δ multiplicirt sind. Aus dem soeben bewiesenen Satze folgt, »dass in der Bewegung der Apsidenlinie der gestörten Ellipse, welche der Normalgleichung entspricht, periodische Störungen nicht vorhanden sind, welche den Integrationsnenner δ^2 haben, dass der Integrationsnenner δ hier nur in der ersten Potenz vorkommt.« In dem in Rede stehenden Falle ist die Störungsrechnung allerdings dadurch erschwert, dass es periodische Störungen der ersten Ordnung giebt, welche den Integrationsnenner δ^2 haben. Das Vorkommen solcher periodischen Störungen ist aber auf die Bewegung des Leitstrahls der gestörten Ellipse beschränkt.

Man kann leicht nachweisen, dass auch in dem Werthe der Excentricität der gestörten Ellipse die periodischen Störungen der ersten Ordnung frei von dem Integrationsnenner δ^2 sind. Denn die Störungen der Excentricität e_1 ergeben sich, wie in Nr. 3666 S. 316 gezeigt ist, aus den Störungen von k_1 . Ferner erhält man die von der Veränderlichen $q - q_0$ abhängigen Störungen von k_1 aus der Störungsgleichung:

$$\lambda m_0 p_{01}^2 k_1' = \sin v_1 \frac{r_1}{p_1} (q - q_0),$$

welche unter 1. mittelst einer partiellen Integration übergeführt ist in:

$$\lambda^2 e_1 m_0 p_{01}^2 k_1' = \left(\frac{r_1^2}{p_1^2} \frac{q - q_0}{2} \right)' - \frac{r_1^2}{p_1^2} \frac{dQ}{dv} v'.$$

Aus dieser transformirten Gleichung ersieht man, dass die Störungen der ersten Ordnung von k_1 durch einfache Quadraturen ausgedrückt, dass daher die Störungen der ersten Ordnung von e_1 frei sind von dem Integrationsnenner δ^2 .

7. Säculare Störungen der zweiten Ordnung von h_1 für den Fall $n = 0$.

Unter 6. habe ich diejenigen säcularen Störungen der zweiten Ordnung von h_1 bestimmt, welche aus den mit $q - q_0$ multiplicirten Störungsgliedern hervorgehen. Durch die Integration der Störungsgleichung $(2)_1$ gelangt man zu weiteren säcularen Störungen der zweiten Ordnung von h_1 .

Ich betrachte zunächst nur diejenigen Störungsglieder, welche unabhängig sind von den Veränderlichen u und u_1 . In dieser Beschränkung ist die Störungsfunktion unter 2. aufgezichnet. Hier ist:

$$Q: \lambda m_0 p_{01}^2 = m \lambda \sum_{i=0} D_i^{(0)} \frac{p^{2i}}{p_{01}^{2i}} \left(\frac{p_{01}}{p_1} \right)^{2i+1} \left(\frac{r}{p} \right)^{2i} \left(\frac{p_1}{r_1} \right)^{2i+1} \\ - m \lambda \sum_{n=2} n \alpha^{n-1} \beta \sum_{i=0} D_i^{(n)} \frac{p^{2i+n}}{p_{01}^{2i+n}} \left(\frac{p_{01}}{p_1} \right)^{2i+n+1} \left(\frac{r}{p} \right)^{2i+n} \left(\frac{p_1}{r_1} \right)^{2i+n+1}$$

Durch die Substitution der Störungsfunktion geht die unter 1. gegebene Gleichung $(3)_1$ über in:

$$Q_1 = \frac{f_1}{\lambda m_0 p_{01}^2} \frac{r^2}{p^2} \frac{p_{01}}{p_1} + \frac{q_{01}}{\lambda m_0 p_{01}^2} \frac{r^2}{p^2} \frac{r_1}{p_1} - \frac{q - q_0}{\lambda m_0 p_{01}^2} \frac{r^2}{p^2} \frac{r_1}{p_1} - m \lambda \sum_{i=0} D_i^{(0)} \frac{p^{2i}}{p_{01}^{2i}} \left(\frac{p_{01}}{p_1} \right)^{2i+1} (2i-1) \left(\frac{r}{p} \right)^{2i+2} \left(\frac{p_1}{r_1} \right)^{2i} \\ + m \lambda \sum_{n=2} n \alpha^{n-1} \beta \sum_{i=0} D_i^{(n)} \frac{p^{2i+n}}{p_{01}^{2i+n}} \left(\frac{p_{01}}{p_1} \right)^{2i+n+1} (2i+n-1) \left(\frac{r}{p} \right)^{2i+n+2} \left(\frac{p_1}{r_1} \right)^{2i+n} + \frac{3}{8} \lambda \frac{r^2}{p^2} \left(\frac{p_1^2}{p_{01}^2} - 1 \right)^2, \quad (23)$$

nachdem man zur Abkürzung q_{01} anstatt $q_0 - 2c$ geschrieben hat.

In die Gleichung (23) sind anstatt $\frac{p_{01}}{p_1}$ die in die erste Classe gehörigen Störungen der ersten Ordnung dieser Veränderlichen einzusetzen mittelst der Gleichung:

$$\frac{p_1^2}{p_{01}^2} - 1 = 2 \frac{p_1}{r_1} (k_1 \cos v_1 + h_1 \sin v_1) = 2 \frac{p_1}{r_1} (q_1 + q_{01}),$$

in welcher q_1 die mit der störenden Masse nicht multiplicirten, q_{01} die mit der störenden Masse multiplicirten Glieder der ersten Ordnung von $k_1 \cos v + h_1 \sin v$ bezeichnet. Durch diese Substitution erhalten die mit der ersten Potenz

der störenden Masse multiplicirten Störungsglieder der zweiten Ordnung den Factor q_1 . Werden nur diese Störungsglieder der zweiten Ordnung geschrieben, so geht die Gleichung (23) über in:

$$Q_1 = - \frac{f_1}{\lambda m_0 p_{01}^2} \frac{r^2}{p^2} \frac{p_1}{r_1} q_1 + m \lambda \sum_{i=0} D_i^{(0)} \frac{p^{2i}}{p_{01}^{2i}} (2i-1) (2i+1) \left(\frac{r}{p} \right)^{2i+2} \left(\frac{p_1}{r_1} \right)^{2i+1} q_1 \\ - m \lambda \sum_{n=2} n \alpha^{n-1} \beta \sum_{i=0} D_i^{(n)} \frac{p^{2i+n}}{p_{01}^{2i+n}} (2i+n-1) (2i+n+1) \left(\frac{r}{p} \right)^{2i+n+2} \left(\frac{p_1}{r_1} \right)^{2i+n+1} q_1 + 3 \lambda \frac{r^2}{p^2} \frac{p_1^2}{r_1^2} q_{01} q_1. \quad (24)$$

Von diesen Störungsgliedern der zweiten Ordnung kommen diejenigen in Betracht, in welchen q_1 einen beständigen Factor oder den Factor $\cos 2v_1$ hat. Da auch die mit e^2 und die mit e_1^2 multiplicirten Glieder zu berücksichtigen

sind, so schreibe ich in dem Producte $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q_1$ die folgenden Entwicklungen:

$$\frac{r^2}{p^2} \frac{r_1}{p_1} = (1 + \frac{3}{2} e^2) \left(1 + \frac{e_1^2}{2} (1 + \cos 2v_1) \right) \\ \left(\frac{r}{p} \right)^{2i+2} \left(\frac{p_1}{r_1} \right)^{2i-1} = [1 + (i+1) (i + \frac{3}{2}) e^2] [1 + (i - \frac{1}{2}) (i-1) e_1^2 (1 + \cos 2v_1)].$$

In dem letzten Gliede von $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q_1$ hat q_1 den Factor $\frac{r^2}{p^2} q_{01}$, wo q_{01} diejenigen periodischen Störungen der ersten Ordnung von $k_1 \cos v + k_1 \sin v_1$ bezeichnet, welche mit der störenden Masse multiplicirt sind, in sofern dieselben dem Falle $n = 0$ entsprechen, also unabhängig von den Veränderlichen u und u_1 sind. Doch kommen in dem Werthe von q_{01} nur diejenigen Glieder in Betracht, welche sich als beständige Grössen oder in der Form $C e_1^2 \cos 2 v_1$ darstellen. Man erhält dieselben leicht aus der in Nr. 2908 S. 55 gegebenen Gleichung:

$$\lambda \left(\frac{d^2 q_1}{dv_1} + q_1 \right) = \frac{p^2}{r^2} \frac{r_1^2}{p_1^2} Q_1. \quad (7)_1$$

$$\begin{aligned} \lambda \frac{r^2}{p^2} q_{01} &= \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \right) \left[\frac{f_1}{\lambda m_0 p_{01}^2} \left(1 + \frac{3}{2} e_1^2 - \frac{1}{2} e_1^2 \cos 2 v_1 \right) + \frac{q_{01}}{\lambda m_0 p_{01}^2} \left(1 + 3 e_1^2 - e_1^2 \cos 2 v_1 \right) \right] \\ &- m \lambda \sum_{i=0} D_i^{(0)} \frac{p^{2i}}{p_{01}^{2i}} (2i-1) (1 + (i+1) (i + \frac{3}{2}) e^2 + (i-1) (i - \frac{3}{2}) e_1^2 (1 - \frac{1}{3} \cos 2 v_1)) \\ &- m \lambda \sum_{i=0} D_i^{(0)} \frac{p^{2i}}{p_{01}^{2i}} 4 i e^2 + m \lambda \sum_{n=2} n \alpha^{n-1} \beta \sum_{i=0} D_i^{(n)} \frac{p^{2i+n}}{p_{01}^{2i+n}} (2i+n-1). \end{aligned}$$

Die hiermit erlangten Entwicklungen sind nun in das aus der Gleichung (24) abgeleitete Product $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q_1$ einzusetzen. Werden zunächst nur diejenigen Glieder der zweiten Ordnung von $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q_1$ geschrieben, welche mit f_1 oder mit q_{01} multiplicirt sind, so ist:

$$\begin{aligned} \frac{r_1^2}{p_1^2} Q_1 &= (1 + \frac{3}{2} e^2) \left(\frac{2 f_1}{\lambda m_0 p_{01}^2} (1 + 2 e_1^2) + \frac{3 q_{01}}{\lambda m_0 p_{01}^2} (1 + 3 e_1^2) - \frac{2 f_1 + 3 q_{01}}{\lambda m_0 p_{01}^2} e_1^2 \cos 2 v_1 \right) q_1 \\ &= (1 + \frac{3}{2} e^2) (1 + \frac{1}{2} e_1^2) \left(\frac{2 f_1}{\lambda m_0 p_{01}^2} (1 + \frac{3}{2} e_1^2) + \frac{3 q_{01}}{\lambda m_0 p_{01}^2} (1 + \frac{5}{2} e_1^2) \right) (1 + e_1^2 \cos 2 v_1) q_1. \end{aligned}$$

Auf Grund der Forderung, dass in der Entwicklung von $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q_1$ diejenigen Glieder verschwinden sollen, welche die Form $C e_1 \cos v_1$ haben, ist in Nr. 3421 S. 203 und in Nr. 3543 die folgende Gleichung aufgestellt:

$$\begin{aligned} &(1 + \frac{3}{2} e^2) \left(\frac{2 f_1}{\lambda m_0 p_{01}^2} (1 + \frac{3}{2} e_1^2) + \frac{3 q_{01}}{\lambda m_0 p_{01}^2} (1 + \frac{5}{2} e_1^2) \right) \\ &= - m \lambda \sum_{i=0} D_i^{(0)} \frac{p^{2i}}{p_{01}^{2i}} (2i-1) (2i-2) (1 + (i+1) (i + \frac{3}{2}) e^2 + \frac{1}{2} (i - \frac{3}{2}) (i-2) e_1^2) \\ &+ m \lambda \sum_{i=0} D_i^{(0)} \frac{p^{2i}}{p_{01}^{2i}} 12 i e^2 + m \lambda \sum_{n=2} n \alpha^{n-1} \beta \sum_{i=0} D_i^{(n)} \frac{p^{2i+n}}{p_{01}^{2i+n}} (2i+n-1) (2i+n-2). \quad (25) \end{aligned}$$

In der Entwicklung des Productes $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q_1$ sind die Glieder der zweiten Ordnung eine Function der Grösse:

$$2 f_1 (1 + \frac{3}{2} e_1^2) + 3 q_{01} (1 + \frac{5}{2} e_1^2).$$

Nachdem man dieselbe mit $\frac{r^2}{p^2}$ multiplicirt hat, sind auf der rechten Seite von den aus der Gleichung (23) abgeleiteten Gliedern der ersten Ordnung von $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q_1$ diejenigen einzusetzen, welche die vorerwähnte Form haben. Die beständigen Glieder von $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q_1$ betreffend, verweise ich auf ein oben S. 23 erhaltenes Resultat. Um zu integrieren, ist auf der linken Seite der Gleichung (7)₁ der Factor $\frac{r^2}{p^2}$ als eine beständige Grösse zu betrachten. Man erhält alsdann durch die Integration den Werth:

$$\frac{r_1^2}{p_1^2} Q_1 = m \lambda \sum_{i=0} D_i^{(0)} \frac{p^{2i}}{p_{01}^{2i}} \cdot 2 (i-1) (i - \frac{1}{2}) i (i + \frac{1}{2}) (1 + 2 \cos 2 v_1) e_1^2 q_1.$$

Wenn man diejenigen Glieder fortlässt, deren Argument gleich $3 v_1$ ist, so hat man die identische Gleichung:

$$(1 + 2 \cos 2 v_1) (k_1 \cos v_1 + k_1 \sin v_1) = 2 k_1 \cos v_1.$$

Vermittelst der Gleichung (25) kann man diese Grösse aus der Entwicklung von $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q_1$ eliminiren. Es fallen dann aus der letzteren alle Glieder weg, welche nicht mit e_1^2 multiplicirt sind. Man findet:

Man kann daher schreiben:

$$\frac{r_1^2}{p_1^2} Q_1 = m \lambda \sum_{i=0} D_i^{(0)} \frac{p^{2i}}{p_{01}^{2i}} 4(i-1)(i-1/2)i(i+1/2) e_1^2 k_1 \cos v_1.$$

Die säcularen Störungen der ersten Ordnung von k_1 sind in Nr. 3063 unter 5. bestimmt worden für den Fall, dass die Coefficienten lineare oder cubische Formen der Excentricitäten sind. Es ist dort S. 281 gegeben:

$$k_1 = \frac{C_1 e}{B_1} (\cos(A - B_1 v) - \cos A),$$

wo C_1 statt C geschrieben ist. Durch die Substitution dieses Werthes von k_1 geht die vorige Gleichung über in:

$$\frac{r_1^2}{p_1^2} Q_1 = m \lambda \sum_{i=0} D_i^{(0)} \frac{p^{2i}}{p_{01}^{2i}} 4(i-1)(i-1/2)i(i+1/2) \frac{C_1 e}{B_1} e_1^2 (\cos(A - B_1 v) - \cos A) \cos v_1.$$

Dasjenige Glied von $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q_1$, welches die Form $C e_1 \cos v_1$ hat, ist nun vermittelt einer Correction der überzähligen Integrationsbeständigen fortzubringen; alsdann der Werth von Q_1 in die Störungsgleichungen (1)₁ und (2)₁:

$$-k_1' = \sin v_1 Q_1 v' \quad h_1' = \cos v_1 Q_1 v'$$

einzusetzen. Durch deren Integration gelangt man nicht zu säcularen Störungen der zweiten Ordnung von k_1 ; dagegen erhält man die säcularen Störungen der zweiten Ordnung von:

$$h_1 = -\frac{E_1}{B_1} e e_1^2 (\sin(A - B_1 v) - \sin A), \quad (26)$$

in welchen zur Abkürzung gesetzt ist:

$$E_1 = m \lambda \sum_{i=0} D_i^{(0)} \frac{p^{2i}}{p_{01}^{2i}} 2(i-1)(i-1/2)i(i+1/2)(1-e_1^2)^{3/2} \frac{C_1}{B_1}.$$

Die primordialen Störungen sind:

$$h_1 = \frac{E_1}{B_1} e e_1^2 \cos A \sin B_1 v. \quad (27)$$

8. Säculare Störungen der zweiten Ordnung von k_1 und von h_1 für den Fall $n = 1$.

Ich erhalte säculare Störungen der zweiten Ordnung von k_1 und von h_1 , indem ich die in die erste Classe gehörigen Störungen der ersten Ordnung von p_1 und von $\varpi_1 - \varpi$ an die Stelle dieser Veränderlichen in die dem Falle $n = 1$ entsprechenden Störungsglieder einsetze. Die Störungsfunktion ist hier:

$$\mathcal{Q}: \lambda m_0 p_{01}^2 = -\lambda m \sum_{i=0} D_i^{(1)} \frac{p^{2i+1}}{p_{01}^{2i+1}} \left(\frac{p_{01}}{p_1}\right)^{2i+2} \left(\frac{r}{p}\right)^{2i+1} \left(\frac{p_1}{r_1}\right)^{2i+2} \cos(\varpi - \varpi_1 + v - v_1).$$

Die S. 20 gegebene Gleichung (3)₁:

$$\lambda m_0 p_{01}^2 Q_1 = \frac{r^2}{p^2} \frac{r_1}{p_1} \left(f_1 \frac{p_{01}}{r_1} + q_{01} + 2\mathcal{Q} + r_1 \frac{d\mathcal{Q}}{dr_1} + P_1 \right)$$

wird daher übergeführt in:

$$Q_1 = m \lambda \sum_{i=0} D_i^{(1)} \frac{p^{2i+1}}{p_{01}^{2i+1}} \left(\frac{p_{01}}{p_1}\right)^{2i+2} \cdot 2i \left(\frac{r}{p}\right)^{2i+3} \left(\frac{p_{01}}{r_1}\right)^{2i+1} \cos(\varpi - \varpi_1 + v - v_1) + \frac{3}{8} \lambda \frac{r^2}{p^2} \left(\frac{p_1^2}{p_{01}^2} - 1\right)^2. \quad (28)$$

Die zu substituierenden Störungen der ersten Ordnung von p_1 und von $\varpi_1 - \varpi$ sind:

$$\frac{p_1^2}{p_{01}^2} - 1 = 2 \frac{p_1}{r_1} (k_1 \cos v_1 + h_1 \sin v_1) = 2 \frac{p_1}{r_1} (q_1 + q_{01}),$$

$$\varpi_1 - \varpi = -2 \frac{p_1}{r_1} (k_1 \sin v_1 - h_1 \cos v_1) + e_1 \sin v_1 (k_1 \cos v_1 + h_1 \sin v_1) + s_1,$$

vgl. Nr. 3256 S. 257. In der letzteren ist $s_1 = \omega_1 + \cos i_1 \vartheta$, in der ersteren q_1 die mit der störenden Masse nicht multiplicirten, q_{01} die mit der störenden Masse multiplicirten Glieder der ersten Ordnung von $k_1 \cos v_1 + h_1 \sin v_1$, in soweit dieselben dem Falle $n = 1$ entsprechen. Ferner sind anstatt $k_1 h_1 s_1$ die säcularen Störungen der ersten Ordnung dieser Veränderlichen zu setzen. Die zu substituierenden Störungen

der ersten Ordnung von p_1 und von $\varpi_1 - \varpi$ sind daher als Functionen der Veränderlichen v_1 allein gegeben. Auch die Glieder der Entwicklung von $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q_1$ sind als Functionen von v_1 allein darzustellen. Man hat daher in dem Werthe von $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q_1$ die folgende Umformung vorzunehmen:

$$\left(\frac{r}{p}\right)^{2i+3} \cos(\varpi - \varpi_1 + v - v_1) = -(i + 3/2) e \cos(\varpi - \varpi_1 - v_1),$$

und es ergeben sich die Glieder der zweiten Ordnung:

$$\frac{r_1^2}{p_1^2} Q_1 = -m\lambda \sum_{i=0} D_i^{(1)} \frac{p^{2i+1}}{p_{01}^{2i+1}} i(2i+3) e \cdot \left(\frac{p_1}{r_1}\right)^{2i-1} \left\{ \left[\left(\frac{p_{01}}{p_1}\right)^{2i+2} - 1\right] \cos(A - B_1 v - v_1) + (\varpi_1 - \varpi + A - B_1 v) \sin(A - B_1 v - v_1) \right\} + 3\lambda \frac{r^2}{p^2} q_{01} q_1. \quad (29)$$

Um den in die Gleichung (29) zu substituierenden Werth der Veränderlichen $\frac{r^2}{p^2} q_{01}$ zu erhalten, bediene ich mich der S. 53 gegebenen Gleichung (7)₁:

$$\lambda \left(\frac{d^2 q_1}{dv_1^2} + q_1 \right) = \frac{p^2 r_1^2}{r^2 p_1^2} Q_1.$$

Nachdem man diese Gleichung mit $\frac{r^2}{p^2}$ multiplicirt hat, erhält man aus derselben leicht diejenigen Glieder von $\frac{r^2}{p^2} q_{01}$, welche

sich als Functionen von v_1 allein darstellen. Es sollen aber diejenigen Glieder von $\frac{r^2}{p^2} q_{01}$ bestimmt werden, welche die Form $C \cos(A - B_1 v)$ oder die Form $C \cos(A - B_1 v - 2v_1)$ haben. Man hat daher auf der rechten Seite der Gleichung (7)₁ nur diejenigen Glieder der ersten Ordnung von $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q_1$ einzusetzen, welche die angegebene Form haben. Es ergibt sich alsdann aus der Gleichung (28) die Entwicklung:

$$\frac{r_1^2}{p_1^2} Q_1 = -m\lambda \sum_{i=0} D_i^{(1)} \frac{p^{2i+1}}{p_{01}^{2i+1}} i(2i+3) (i - 1/2) e e_1 (\cos(A - B_1 v) + \cos(A - B_1 v - 2v_1)),$$

wo aber, wie S. 33 gezeigt worden ist, in den Klammern das säculare Glied fortgelassen werden soll. Durch die Integration der Gleichung (7)₁ ergibt sich:

$$3\lambda \frac{r^2}{p^2} q_{01} = m\lambda \sum_{i=0} D_i^{(1)} \frac{p^{2i+1}}{p_{01}^{2i+1}} i(2i+3) (i - 1/2) e e_1 \cos(A - B_1 v - 2v_1)$$

Es sind nun in der Gleichung (29) die säcularen Glieder der zweiten Ordnung bekannt. Indem ich:

$$\cos(A - B_1 v - 2v_1) = \cos v_1 \cos(A - B_1 v - v_1) + \sin v_1 \sin(A - B_1 v - v_1)$$

schreibe, erhalte ich:

$$\begin{aligned} \frac{r_1^2}{p_1^2} Q_1 = & -m\lambda \sum_{i=0} D_i^{(1)} \frac{p^{2i+1}}{p_{01}^{2i+1}} i(2i+3) e \cdot \\ & (k_1 \cos v_1 + h_1 \sin v_1) \left[-(2i+2) \left(\frac{p_1}{r_1}\right)^{2i} \cos(A - B_1 v - v_1) + \left(\frac{p_1}{r_1}\right)^{2i-1} e_1 \sin v_1 \sin(A - B_1 v - v_1) \right. \\ & \quad \left. - (i - 1/2) e_1 \cos v_1 \cos(A - B_1 v - v_1) - (i - 1/2) e_1 \sin v_1 \sin(A - B_1 v - v_1) \right] \\ & - \left[2 \left(\frac{p_1}{r_1}\right)^{2i} (k_1 \sin v_1 - h_1 \cos v_1) - \left(\frac{p_1}{r_1}\right)^{2i-1} (e_1 + A - B_1 v) \right] \sin(A - B_1 v - v_1). \end{aligned}$$

Von den zu substituierenden Störungen der ersten Ordnung sind oben S. 47 gegeben:

$$k_1 \cos v_1 + h_1 \sin v_1 = \frac{C_1 e}{B_1} (\cos(A - B_1 v - v_1) - \cos(A - v_1))$$

$$k_1 \sin v_1 - h_1 \cos v_1 = -\frac{C_1 e}{B_1} (\sin(A - B_1 v - v_1) - \sin(A - v_1)).$$

Wenn in diesen Werthen nur die mit der ersten Potenz einer Excentricität multiplicirten Glieder berücksichtigt werden, so ist:

$$C_1 = m\lambda \sum_{i=0} D_i^{(1)} \frac{p^{2i+1}}{p_{01}^{2i+1}} i(i + 3/2).$$

Ferner findet man durch die Integration der Gleichung:

$$-\lambda m_0 p_{01}^2 \zeta_1 = 3\Omega + 2r_1 \frac{d\Omega}{dr_1},$$

vgl. Nr. 3256 S. 257, den Werth:

$$\varepsilon_1 + A - B_1 v = - (4i + 1) \frac{C_1}{B_1} e e_1 (\sin(A - B_1 v) - \sin A).$$

Nachdem man auch dies in die obige Gleichung eingesetzt hat, schreibt man die Producte:

$$\begin{aligned} 2(\cos(A - B_1 v - v_1) - \cos(A - v_1)) \cos(A - B_1 v - v_1) &= -\cos B_1 v + 1 \\ 2(\cos(A - B_1 v - v_1) - \cos(A - v_1)) \sin(A - B_1 v - v_1) &= -\sin B_1 v \\ 2(\sin(A - B_1 v - v_1) - \sin(A - v_1)) \sin(A - B_1 v - v_1) &= -\cos B_1 v + 1, \end{aligned}$$

und die zur Bestimmung von Q_1 gegebene Gleichung geht über in:

$$\frac{r_1^2}{p_1^2} Q_1 = -m\lambda \sum_{i=0} D_i^{(1)} \frac{p^{2i+1}}{p_{01}^{2i+1}} i(i + \frac{3}{2}) \frac{C_1}{B_1} e_1 e^2 ((4i^2 + 5i + \frac{1}{2}) \cos v_1 (\cos B_1 v - 1) - (5i - \frac{1}{2}) \sin v_1 \sin B_1 v).$$

Diesen Werth von Q_1 hat man in die Störungsgleichungen (1)₁ und (2)₁:

$$-k_1' = \sin v_1 Q_1 v' \quad h_1' = \cos v_1 Q_1 v'$$

einzusetzen. Durch deren Integration gelangt man zu säcularen Störungen der zweiten Ordnung von k_1 . Es ist:

$$k_1 = m\lambda \sum_{i=0} D_i^{(1)} \frac{p^{2i+1}}{p_{01}^{2i+1}} \frac{1}{2} i(i + \frac{3}{2}) (5i - \frac{1}{2}) (1 - e_1^2)^{3/2} \frac{C_1}{B_1} e_1 e^2 \frac{\cos B_1 v - 1}{B_1}. \quad (30)$$

In dem Werthe von $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q_1$ sind diejenigen Glieder, welche die Form $C e_1 \cos v_1$ haben, vermittelst einer Correction der überzähligen Integrationsbeständigen fortzubringen. wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$F_1 = m\lambda \sum_{i=0} D_i^{(1)} \frac{p^{2i+1}}{p_{01}^{2i+1}} \frac{1}{2} i(i + \frac{3}{2}) (4i^2 + 5i + \frac{1}{2}) (1 - e_1^2)^{3/2} \frac{C_1}{B_1}.$$

Offenbar ist hiermit eine primordiale Störung von h_1 gegeben. Die hier erlangten säcularen Störungen der zweiten Ordnung von k_1 und von h_1 sind mit der cubischen Form der Excentricitäten $e_1 e^2$ multiplicirt.

Die Summe der unter 6. 7. 8. hergeleiteten primordinalen Störungen der Veränderlichen h_1 ist:

$$h_1 = (D_1 e + E_1 e_1 - F_1 e) \frac{e e_1 \sin B_1 v}{B_1}.$$

Unter 5. ist gezeigt worden, wie man aus den primordinalen Störungen von h_1 die primordinalen Störungen der Veränderlichen $\varepsilon_1 = \omega_1 + \cos i, \vartheta$ ableitet, dass ferner in der Bewegung der Apsidenlinie der gestörten Ellipse, welche der Normalgleichung entspricht, diese primordinalen Störungen von ε_1 durch die mit der ersten Potenz von mv multiplicirten Glieder der primordinalen Störungen von h_1 aufgehoben sind. Unter 5. ist auch gezeigt worden, wie man aus den primordinalen Störungen von h_1 die primordinalen Störungen der Veränderlichen $n_1(t - t_{01})$ ableitet, und dass in der Bewegung des Leitstrahls der gestörten Ellipse die primordinalen Störungen von $n_1(t - t_{01})$ durch die mit der ersten Potenz von mv multiplicirten Glieder der primordinalen Störungen von h_1 zum weitaus grösseren Theil aufgehoben sind. Man kann die in der Bewegung des Leitstrahls der gestörten Ellipse noch übrigen, mit der ersten Potenz von mv multiplicirten

Man erhält alsdann die säcularen Störungen der zweiten Ordnung von:

$$h_1 = -\frac{F_1}{B_1} e_1 e^2 \sin B_1 v \quad (31)$$

Glieder der primordinalen Störungen aus den so beschaffenen Gliedern der primordinalen Störungen von h_1 ableiten, indem man den letzteren den Factor $-\frac{3}{2} e_1$ giebt. Die in der Bewegung des Leitstrahls der gestörten Ellipse noch übrigen Glieder der erwähnten Art haben daher eine biquadratische Form der Excentricitäten zum Factor.

Die Astronomen können die numerische Rechnung in der That auf die Störungen der ersten Ordnung beschränken, insofern als nun allgemein gültig nachgewiesen ist, dass in der gestörten Ellipse, welche der Normalgleichung entspricht, die säcularen Störungen der zweiten Ordnung, die primordinalen nicht ausgenommen, numerisch wenig beträchtlich sind, so dass sie in den Störungsrechnungen kaum in Betracht kommen, wenn vorausgesetzt ist, dass der Kreisbogen Bv einen kleinen Bruchwerth darstelle. Unter den säcularen Störungen der zweiten Ordnung, welche die Astronomen durch ihre analytischen Rechnungen erhalten haben, finden sich auch solche, deren numerischer Werth so beträchtlich ist, dass sie in keinerlei Art mit den Beobachtungswerten in Uebereinstimmung gebracht werden können. Diesen analytischen Resultaten kann aber nicht etwa ein Beweisgrund entnommen werden für die Unmöglichkeit einer analytischen Lösung des Problems der drei Körper. Man muss vielmehr annehmen, dass dieselben in der Unvollkommenheit der bisherigen Störungstheorie eine Erklärung finden.

Karlsruhe, im April 1900 *).

Aug. Weiler.

*) Eingegangen bei der Redaction Anfang October 1900. Kr.