ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

N^o 2965.

Notiz über einen Tisserand'schen Satz, die Umgestaltung der Cometenbahnen betreffend.

Von H. Seeliger.

Wenn ein Comet einem grossen Planeten so nahe kommt, dass letzterer mit Vorthail als der Centralkörper der Bewegung betrachtet werden kann, pflegt man die Umgestaltung der Cometenbahn nach den von Laplace¹⁾ aufgestellten Grundsätzen zu berechnen. Herr Tisserand²⁾ hat neuerdings ein schönes Theorem gefunden, welches eine Gleichung zwischen den Elementen vor und nach der Umgestaltung der Bahn giebt. Er leitet dasselbe aus einer Formel von Jacobi her. Man kann indessen zu diesem Satze auf ganz elementarem und direktem Wege gelangen. In einem höchst interessanten Aufsätze über den Cometen Wolf hat Herr Lehmann-Filhés³⁾ eine einfache Ableitung des genannten Satzes gegeben, hierbei aber ziemlich weitgehende Voraussetzungen gemacht, die nicht nothwendig sind. Es wird deshalb vielleicht nicht überflüssig sein, auf diesen Gegenstand zurückzukommen.

Bezeichnen $m x y z r$ bez. $m' x' y' z' r'$ Masse, heliocentrische Coordinaten und Radiusvector des Cometen bez. des Planeten, ferner Δ die gegenseitige Entfernung beider

Himmelskörper und wählt man die Zeiteinheit (ungefähr 58 Tage) so, dass

$$k^2 (1 + m) = 1$$

wird, wo k die Anziehungsconstante ist, setzt ferner zur Abkürzung

$$\mu = \frac{m'}{1 + m}$$

so sind die Bewegungsgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\frac{x}{r^3} + \mu \frac{x' - x}{\Delta^3} - \mu \frac{x'}{r'^3} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= -\frac{y}{r^3} + \mu \frac{y' - y}{\Delta^3} - \mu \frac{y'}{r'^3} \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= -\frac{z}{r^3} + \mu \frac{z' - z}{\Delta^3} - \mu \frac{z'}{r'^3} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Dennt man v die Geschwindigkeit des Cometen, so folgt aus (1) unmittelbar:

$$\begin{aligned} v^2 &= 2\gamma' + \frac{2}{r} + \frac{2\mu}{\Delta} + 2\mu \int \frac{dt}{\Delta^3} \left((x' - x) \frac{dx'}{dt} + (y' - y) \frac{dy'}{dt} + (z' - z) \frac{dz'}{dt} \right) \\ &\quad - 2\mu \int \frac{dt}{r'^3} \left(x' \frac{dx'}{dt} + y' \frac{dy'}{dt} + z' \frac{dz'}{dt} \right) \end{aligned}$$

worin γ' eine Constante ist.

Es sollen nun die beiden Annahmen gemacht werden, dass der Planet ungestört und zwar in einer Kreisbahn um die Sonne sich bewege. Selbstverständlich braucht man diese Annahmen nur für die kurze Zeit der grossen Annäherung der beiden Körper zu machen. Die erste Annahme erlaubt $z' = \frac{dz'}{dt} = 0$ zu setzen, während die zweite durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{dx'}{dt} &= -n'y' \\ \frac{dy'}{dt} &= n'x' \end{aligned}$$

ihren Ausdruck findet. Bezeichnet L' das zweite Integralglied in der obigen Formel für v^2 , so kann man diese jetzt schreiben:

$$v^2 = 2\gamma' + \frac{2}{r} + \frac{2\mu}{\Delta} + 2\mu n' \int \frac{x y' - x' y}{\Delta^3} dt - L'$$

Aus den beiden ersten Gleichungen (1) folgt aber

$$x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} = \mu (x y' - x' y) \left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3} \right)$$

und hieraus

$$v^2 = 2\gamma' + \frac{2}{r} + \frac{2\mu}{\Delta} + 2n' \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) + L$$

wo, wie leicht zu sehen

$$L = \frac{2\mu}{r'^3} \int \left(\Delta \frac{d\Delta}{dt} - r \frac{dr}{dt} \right) dt = \frac{\mu}{r'^3} (\Delta^2 - r^2).$$

Man kann den halben Parameter p der augenblicklichen Bahn des Cometen um die Sonne und die Neigung i derselben gegen die Planetenbahn einführen. Dann ist

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = \sqrt{p} \cos i$$

und demzufolge:

¹⁾ Méc. céle. livr. IX, Chap. II. ²⁾ Bullet. astron. VI pag. 292. ³⁾ Astr. Nachr. Nr. 2953.

$$v^2 = 2\gamma + \frac{2}{r} + \frac{2\mu}{A} + 2n' \sqrt{p} \cos i - \frac{\mu}{r'^3} (r^2 - A^2) \quad (2)$$

Diese Gleichung ist völlig strenge aus der Voraussetzung einer kreisförmigen Planetenbahn abgeleitet. Führt man noch die augenblickliche Halbaxe a der Cometenbahn ein durch

$$v^2 = \frac{2}{r} - \frac{1}{a}$$

$$\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_1} = 2n' (\sqrt{p_1} \cos i_1 - \sqrt{p_0} \cos i_0) - \frac{\mu}{r'^3} (r_1^2 - r_0^2). \quad (3)$$

Lässt man das in der That stets kleine letzte Glied fort, so erhält man den Tisserand'schen Satz. Für n' kann man den Näherungswert

$$n' = \frac{\sqrt{a'}}{r'^2} \sqrt{\frac{1+m'}{1+m}}$$

setzen, wo a' die grosse Halbaxe der Planetenbahn ist.

Bogenhausen 1890 Febr. 20.

H. Seeliger.

Zur Bahnbestimmung nach Bruns.

Von K. Schwarzschild.

Die Bahnbestimmungs-Methode, die Herr Prof. Bruns in Nr. 2824 der Astr. Nachr. angegeben hat, löst die Aufgabe nicht vollständig, eine Bahn an drei gegebene Beobachtungen eines Himmelskörpers anzuschliessen. Will man dies aber erreichen, so kann man folgende Methode

benutzen, die die Bruns'sche Methode als erste Annäherung giebt und zeigt, wie weitere Annäherungen zu finden sind.

Nach den in der erwähnten Abhandlung angegebenen Bezeichnungen hat man die Gleichungen:

$$\xi'' + \frac{k^2 \xi}{r^3} + k^2 X P = 0; \quad \eta'' + \frac{k^2 \eta}{r^3} + k^2 Y P = 0; \quad \zeta'' + \frac{k^2 \zeta}{r^3} + k^2 Z P = 0$$

$$\xi = q \cdot f; \quad \eta = q \cdot g; \quad \zeta = q \cdot h; \quad 1 = f^2 + g^2 + h^2; \quad P = \frac{\mu}{R^3} - \frac{1}{r^3}$$

demnach:

$$\left. \begin{aligned} f q'' + 2 f' q' + f'' q + k^2 \frac{q \cdot f}{r^3} + k^2 X P &= 0 \\ g q'' + 2 g' q' + g'' q + k^2 \frac{q \cdot g}{r^3} + k^2 Y P &= 0 \\ h q'' + 2 h' q' + h'' q + k^2 \frac{q \cdot h}{r^3} + k^2 Z P &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Aus diesen Gleichungen erhält man durch Elimination von q'' und q' :

$$0 = k^2 P \left[\left(\frac{X}{f} - \frac{Y}{g} \right) \left(\frac{g'}{g} - \frac{h'}{h} \right) - \left(\frac{Y}{g} - \frac{Z}{h} \right) \left(\frac{f'}{f} - \frac{g'}{g} \right) \right] + q \left[\left(\frac{f''}{f} - \frac{g''}{g} \right) \left(\frac{g'}{g} - \frac{h'}{h} \right) - \left(\frac{g''}{g} - \frac{h''}{h} \right) \left(\frac{f'}{f} - \frac{g'}{g} \right) \right] \quad (2)$$

Diese Gleichung geht in die bekannte Gleichung 8. Grades für r über, wenn man q eliminirt mit Hülfe der Relation: $r^2 = R^2 + q^2 - 2 R q \cos \chi$.

Ferner findet man aus den Gleichungen (1) durch Elimination von q'' und P :

$$0 = -2 q' \left[\left(\frac{X}{f} - \frac{Y}{g} \right) \left(\frac{g'}{g} - \frac{h'}{h} \right) - \left(\frac{Y}{g} - \frac{Z}{h} \right) \left(\frac{f'}{f} - \frac{g'}{g} \right) \right] + q \left[\left(\frac{f''}{f} - \frac{g''}{g} \right) \left(\frac{Y}{g} - \frac{Z}{h} \right) - \left(\frac{g''}{g} - \frac{h''}{h} \right) \left(\frac{X}{f} - \frac{Y}{g} \right) \right] \quad (3)$$

Durch Differentiation der Gleichungen (1) erhält man:

$$\left. \begin{aligned} f q''' + 3 f' q'' + 3 f'' q' + f''' q + k^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{q \cdot f}{r^3} + X P \right) &= 0 \\ g q''' + 3 g' q'' + 3 g'' q' + g''' q + k^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{q \cdot g}{r^3} + Y P \right) &= 0 \\ h q''' + 3 h' q'' + 3 h'' q' + h''' q + k^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{q \cdot h}{r^3} + Z P \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$