Der Kurzschlußstrom eines Wechselstromgenerators.

Von

W. Rogowski.

(Mitteilung aus dem Elektrotechnischen Institut der Technischen Hochschule Aachen.)

Ziel. Über den Stromstoß bei Kurzschluß eines Wechselstromgenerators sind wir hinreichend unterrichtet. Wir kennen die Höhe der ersten Stromspitze. Auch wissen wir genügend genau, mit welcher Geschwindigkeit die aufeinanderfolgenden Stromspitzen abnehmen. Ich brauche hier nur auf die wertvollen Arbeiten von Biermanns und Dreyfus hinzuweisen¹⁾²⁾. Wenn ich trotzdem das Wort ergreife, so geschieht es deshalb, weil ich eine einfache und durchsichtige Rechnung mitteilen möchte. Die bisherigen Bearbeiter haben ihre Untersuchung so angelegt, daß möglichst viele Einzelheiten im Verlauf des Kurzschlußstromes herausgearbeitet werden. Dafür ist ihnen das Interesse und der Dank aller derer sicher, die sich eingehend von Berufs wegen mit solchen Kurzschlußvorgängen befassen müssen. Im Gegensatz hierzu will ich im folgenden durch weitgehende Vernachlässigungen möglichst Einzelheiten abstreifen, um so den nackten Kern des Kurzschlußproblems bloßzulegen. Ich suchte nach einer solchen Behandlung, als ich meinen Studenten das Zustandekommen der ungewöhnlichen Kurzschlußströme klar machen wollte. Die vorliegende Mitteilung ist aber vielleicht auch diesem oder jenem Fachmanne nicht unwillkommen. Denn sie bildet meines Erachtens eine Vorstufe, von der aus die Arbeiten von Biermanns und Dreyfus erst richtig gewürdigt und genossen werden können. Ich bin weit davon entfernt, die Bedeutung solcher aus pädagogischen Gründen durchgeführten Rechnungen zu überschätzen. Man soll sie aber auch nicht unterschätzen.

Der Gedanke, der der folgenden Rechnung zugrunde liegt, besteht darin, den Widerstand in Stator und Rotor zu erster Näherung gleich Null zu setzen. Hiermit lassen sich dann sofort (S. 149) die entstehenden Kurzschlußströme niederschreiben. Natürlich ergeben sich so zeitlich ungedämpfte Werte.

Wollen wir über die Art des Abklingens etwas erfahren, so müssen wir die Widerstände doch berücksichtigen. Aber die mit den Widerständen R_1 und R_2 behafteten Spannungsabfälle $R_1 i_1$ und $R_2 i_2$ sind dann nur noch Berichtigungsgrößen. Es genügt, wenigstens für den Anfang des Kurzschlußvorganges, für die Ströme i_1 und i_2 in der Feld- und Statorspule die aus der ersten Näherung bekannten Werte einzusetzen. Eine einfache Integration führt bei diesem Wege zu der zweiten Näherung, die auch die wesentlichen Eigentümlichkeiten der Dämpfung aufdeckt.

Ein einfaches Beispiel möge den Weg beleuchten: Es werde ein Element (elektromotorische Kraft E) an eine mit Widerstand (R) und Selbstinduktion (L) behaftete Spule geschaltet. Der Einschaltvorgang wird bekanntlich durch die folgende Differentialgleichung beschrieben:

¹⁾ Biermanns, Magnetische Ausgleichsvorgänge in elektrischen Maschinen, Springer 1919, S. 48.

²⁾ Dreyfus, Arch. f. Elektrotechnik, V, S. 103.

$$L \frac{di}{dt} + iR = E. \quad (1)$$

Setzen wir in erster Näherung $R = 0$; so ist

$$L \frac{di}{dt} = E; \quad i = \frac{E}{L} t. \quad (2)$$

Wird in zweiter Annäherung R als klein angenommen, so ergibt sich:

$$L \frac{di}{dt} = E \left[1 - \frac{R}{L} t \right]. \quad (3)$$

$$i = \frac{E}{L} t \left[1 - \frac{R}{2L} t \right] \quad (4)$$

Entwickelt man in der bekannten strengen Lösung von (1)

$$i = \frac{E}{R} \left[1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right] \quad (5)$$

die Exponentialfunktion, so erhält man, wenn man nach dem zweiten Gliede die Entwicklung abbricht, genau den in (4) angegebenen Wert. Genügt dieser Grad der Genauigkeit, so leitet man die Näherungslösung (4) am besten, wie wir es getan haben, unmittelbar aus der Differentialgleichung ab und nicht, was ja auch möglich wäre, aus der strengen Lösung.

Genau das Entsprechende werden wir nun bei dem sehr viel schwierigeren Problem des Kurzschlusses eines Wechselstromgenerators durchführen, bei dem die strenge Lösung bisher nicht bekannt ist¹⁾.

Der Kurzschluß in erster Hauptstellung.

a) Vernachlässigung der Widerstände. Die Feldspule unseres zunächst leerlaufenden Wechselstromgenerators habe keinen Widerstand. Es fließe in ihr der Strom i_0 . Unter diesen Umständen benötigen wir zu seiner Aufrechterhaltung keiner EMK. Solange die Statorspule geöffnet bleibt, ist der Erregerstrom $i_1 = i_0$ unveränderlich. Das erzeugte Magnetfeld läuft um. Der Fluß der Statorspule M_0 (M = Gegeninduktivität) schwankt auf und nieder und ruft hierdurch die bekannten Wechselspannungen bei Leerlauf hervor. Legen wir die durch Bild 1 festgehaltene Lage von Stator und Feldspule (erste Hauptlage) als Anfangslage fest und charakterisieren wir irgendeine andere Lage durch den Drehwinkel α , so können wir schreiben:

$$M = M_0 \sin \alpha \quad (6)$$

(M_0 = Gegeninduktivität in erster Hauptlage s. Bild 1). Die erste Hauptlage entspreche der Zeit $t = 0$. Es ist somit

$$\alpha = \omega t. \quad (7)$$

Bild 1. Stellung von Statorspule und Polad in erster Hauptlage

Im Augenblick $t = 0$ werde nun die Statorspule kurz geschlossen. Da ihr kein Widerstand zukommen sollte, so muß sie von nun an den Fluß, den sie im Kurzschlußmoment hatte, dauernd beibehalten; denn ihr Ohm'scher Spannungsabfall ist Null

¹⁾ Die genaue Lösung ist nur bekannt für den Fall $\frac{R_1}{L_1} = \frac{R_2}{L_2}$ also gleicher Zeitkonstanten der Feld- und Statorspule, s. Biermanns, a. a. O.

und nach dem Induktionsgesetz ergänzen sich die Flußänderungen $\frac{d\Phi_2}{dt}$ und Ohmscher Spannungen $i_2 R_2$ zu Null:

$$\frac{d\Phi_2}{dt} = 0. \quad (8)$$

Im Augenblick des Kurzschlusses ist aber $\Phi_2 = 0$; folglich behält die Statorspule auch nach dem Kurzschluß den Fluß

$$\Phi_2 = 0 \quad (9)$$

bei.

Die gleiche Überlegung führen wir für die Feldspule durch. Auch sie soll keinen Widerstand haben. Im Kurzschlußmomente ist ihr Fluß

$$\Phi_1 = L_1 i_0 \quad (10)$$

Bild 2. Stark ausgesogen: Plötzlicher Kurzschlußstrom der Erregerwicklung.
Dünn ausgesogen: Plötzlicher Kurzschlußstrom der Statorspule.
Gestrichnet: Stationärer Kurzschlußstrom.

(L_1 Eigeninduktivität der Erregerwicklung). Nach dem Kurzschluß ist aus dem oben angeführten Grunde für alle späteren Zeiten ebenfalls

$$\Phi_1 = L_1 i_0. \quad (11)$$

Nun ist durch Eigen- und Gegeninduktivitäten ausgedrückt:

$$\Phi_1 = L_1 i_1 + M i_2 = L_1 i_0. \quad (12)$$

$$\Phi_2 = L_2 i_2 + M i_1 = 0 \quad (13)$$

hieraus folgt sofort:

$$i_2 = -\frac{M i_1}{L_2}. \quad (14)$$

$$i_1 \cdot \left(1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}\right) = i_0, \quad (15)$$

$$i_1 = \frac{i_0}{1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}} \quad (16)$$

und mit Rücksicht auf (6) und (7)

$$i_1 = \frac{i_0}{1 - \frac{M_0^2}{L_1 L_2} \sin^2 \omega t} \quad (17)$$

$$i_2 = -\frac{M_0}{L_2} \cdot \frac{i_0 \sin \omega t}{1 - \frac{M_0^2}{L_1 L_2} \sin^2 \omega t} \quad (18)$$

Die Stromspitze in der Feldspule übertrifft den stationären Feldstrom um das $\frac{1}{1 - \frac{M_0^2}{L_1 L_2}}$, also um das τ -fache, wo $\tau = 1 - \frac{M_0^2}{L_1 L_2}$ den Streukoeffizienten bezeichnet.

Und zwar gilt dieses für jede Frequenz. In demselben Verhältnis stehen auch bei der Statorspule die Amplituden des plötzlichen und des stationären Kurzschlußstromes¹⁾ (letzterer hat rund den Wert $i_2^s = \frac{M_0}{L_2} i_0 \sin \omega t$). In Bild 2 sind stationärer und plötzlicher Kurzschlußstrom für einen Generator mit dem Streukoeffizienten $\tau = 0,06$ gezeichnet.

b) Angenäherte Berücksichtigung der Widerstände. Wir nehmen jetzt die Widerstände von Null verschieden an, setzen sie aber als klein voraus. Dann ändert sich nach Vornahme des Kurzschlusses der Fluß der Erregerspule nach folgender Vorschrift:

$$\frac{d\Phi_1}{dt} + i_1 R_1 = E. \quad (19)$$

E bedeutet die Gleichspannung an der Erregerspule. Sie ist offenbar gleich $R_1 i_0$:

$$\frac{d\Phi_1}{dt} = -(i_1 - i_0) R_1. \quad (20)$$

Entsprechend liegt der Schlüssel für die Vorgänge in der Statorspule in der Beziehung:

$$\frac{d\Phi_2}{dt} = -i_2 R_2. \quad (21)$$

Wenn R_1 und R_2 gleich Null sind, dann gelten die Ausdrücke (17) und (18) genau für die plötzlichen Kurzschlußströme. Sind die Widerstände nicht gleich Null, sondern nur klein, so werden (17) und (18) für die auf den Kurzschluß folgende Zeit zwar nicht genau aber doch sehr angenähert gelten. Hält man dies im Auge, dann wird man zugeben müssen, daß uns die rechten Seiten der Gleichungen (20) und (21) angenähert bekannt sind und die Werte:

$$-R_1 i_0 \left[\frac{1}{1 - \frac{M_0^2}{L_1 L_2} \sin^2 \omega t} - 1 \right] \text{ und } R_2 i_0 \frac{M_0}{L_2} \frac{\sin \omega t}{1 - \frac{M_0^2}{L_1 L_2} \sin^2 \omega t}$$

haben. Nun ist i_2 eine periodische Größe, abwechselnd positiv und negativ. Gleich-

¹⁾ s. v. Seite.

chung (21) sagt somit aus, daß der Statorfluß um den Wert Null herumpendelt¹⁾. Von diesen bald positiven bald negativen Änderungen kann man absehen, wenn es einem nur auf den Durchschnittswert ankommt. Wir schreiben somit:

$$\frac{d\Phi_2}{dt} = 0. \quad (22)$$

Anders liegt der Fall bei der Feldspule. Der Strom ($i_1 - i_0$) ist dauernd positiv. Er schwankt kräftig und diese Schwankungen geschehen um den Mittelwert:

$$i_0 \left(\frac{1}{\sqrt{\tau}} - 1 \right) \quad (23)$$

oder angenähert

$$\frac{i_0}{\sqrt{\tau}}. \quad (24)$$

Es folgt nun:

$$\frac{d\Phi_1}{dt} = -R_1 \frac{i_0}{\sqrt{\tau}}. \quad (25)$$

$$(26)$$

Setzen wir für die Flüsse die Werte (12) und (13), so ergibt sich:

$$L_1 i_1 + M i_2 = -R_1 \frac{i_0}{\sqrt{\tau}} \cdot t + L_1 i_0. \quad (27)$$

$$L_2 i_2 + M i_1 = 0. \quad (28)$$

¹⁾ Es ist:

$$\int \frac{\sin \omega t}{1 - \frac{M_0^2}{L_1 L_2} \sin^2 \omega t} dt = -\frac{1}{\omega} \frac{1}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1-\tau}{\tau}} \right) \cos \omega t$$

$$\int \frac{1}{-\frac{M_0^2}{L_1 L_2} \sin^2 \omega t} dt = \frac{1}{\omega \sqrt{\tau}} \operatorname{arctg} (\sqrt{\tau} \operatorname{tg} \omega t)$$

$$\tau = 1 - \frac{M_0^2}{L_1 L_2}.$$

Diese Funktionen sind in ihrem Verlaufe aus Bild 3 ersichtlich.

Bild 3. Obere Kurve: $f(t) = \frac{1}{\omega \sqrt{\tau}} \operatorname{arctg} \sqrt{\tau} \operatorname{tg} \omega t$

Gestrichelte Linie: $f(t) = \frac{t}{\sqrt{\tau}}$.

Untere Kurve: $F(t) = -\frac{1}{\omega} \frac{1}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-\tau}{\tau}} \cos \omega t;$
 $= 314 \text{ per/sec; } \tau = 0,06.$

Und hieraus folgt:

$$i_1 = \frac{i_0}{1 - \frac{M_0^2}{L_1 L_2} \sin^2 \omega t} \cdot \left[1 - \frac{R_1}{L_1 \sqrt{t}} t \right]. \quad (29)$$

$$i_2 = - \frac{M_0}{L_2} \frac{i_0 \sin \omega t}{1 - \frac{M_0^2}{L_1 L_2} \sin^2 \omega t} \cdot \left[1 - \frac{R_1}{L_1 \sqrt{t}} t \right]. \quad (30)$$

Wir sehen somit aus den eckigen Klammern der gewonnenen Ausdrücke (29) und (30), daß bei Kurzschluß in der ersten Hauptlage für die Dämpfung der Kurzschlußströme im wesentlichen Widerstand und Streuinduktivität der Erregerspule maßgebend sind.

Zweite Hauptlage.

Wir wollen jetzt die gleichen Betrachtungen für die zweite Hauptlage (Bild 4) durchführen, in der die Kurzschlußströme bekanntlich am stärksten ausfallen. Die Vorzugsrichtung von α falle mit der Polradstellung in der zweiten Hauptlage zusammen:

$$M = M_0 \cos \alpha. \quad (31)$$

Bild 4. Stellung von Statorspule und Polrad in zweiter Hauptlage.

Soll der Kurzschluß bei der neuen Zählweise ebenfalls mit $t=0$ beginnen, so müssen wir wieder

$$\alpha = \omega t \quad (32)$$

setzen. Der Fluß der Statorspule ist im Kurzschlußmoment: $M_0 i_0$. Beim Widerstand Null gelten daher die Beziehungen:

$$\Phi_1 = L_1 i_1 + M i_2 = L_1 i_0. \quad (33)$$

$$\Phi_2 = L_2 i_2 + M i_1 = M_0 i_0. \quad (34)$$

Hieraus folgt:

$$i_2 = \frac{M_0 i_0}{L_2} - \frac{M i_1}{L_2}, \quad (35)$$

$$i_1 = i_0 \frac{\left[1 - \frac{M_0^2}{L_1 L_2} \cos^2 \omega t \right]}{1 - \frac{M_0^2}{L_1 L_2} \cos^2 \omega t}, \quad (36)$$

$$i_2 = i_0 \frac{M_0}{L_2} \frac{[1 - \cos \omega t]}{1 - \frac{M_0^2}{L_1 L_2} \cos^2 \omega t}. \quad (37)$$

Die Kurzschlußströme i_1 und i_2 fallen am größten aus, wenn $\cos \omega t = -1$ wird; sie erreichen dann die Werte:

$$i_{1 \max} = i_0 \frac{\left[1 + \frac{M_0^2}{L_1 L_2}\right]}{\tau}, \quad (38)$$

$$i_{2 \max} = i_0 \frac{M_0}{L_2} \cdot \frac{2}{\tau}, \quad \tau = 1 - \frac{M_0^2}{L_1 L_2}. \quad (39)$$

Der Strom der Erregerspule wird angenähert, der Strom der Statorspule genau doppelt so groß wie bei Kurzschluß in der ersten Hauptlage.

Berücksichtigung der Widerstände. Für die Abdämpfung der Stromspitzen ist jetzt zu beachten, daß beide Ströme i_1 wie i_2 [Ausdruck (30) und (37)] dauernd positiv sind. Berechnen wir die Mittelwerte, so ergibt sich¹⁾:

$$i_{1m} = \lambda_1 i_0; \quad \lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{\tau}}, \quad (40)$$

$$i_{2m} = \lambda_2 i_0; \quad \lambda_2 = \frac{M_0}{L_2} \frac{1}{\sqrt{\tau}}. \quad (41)$$

Mit wachsender Zeit muß somit nach den Beziehungen (20) und (21) sowohl der Fluß der Stator- wie der Erregerspule absinken. Wir haben somit:

$$\Phi_1 = L_1 i_1 + M i_2 = i_0 \left[L_1 \quad R_1 \frac{t}{\sqrt{\tau}} \right]. \quad (42)$$

$$\Phi_2 = L_2 i_2 + M i_1 = i_0 \left[M_0 - R_2 \frac{M_0}{L_2} \frac{t}{\sqrt{\tau}} \right]. \quad (43)$$

Der schulgerechte Weg ergibt nun:

$$i_1 = i_0 \frac{\left\{ \left[1 - \frac{R_1}{L_1 \sqrt{\tau}} t \right] - \frac{M_0^2}{L_1 L_2} \cos \omega t \left[1 - \frac{R_2 t}{L_2 \sqrt{\tau}} \right] \right\}}{1 - \frac{M_0^2}{L_1 L_2} \cos^2 \omega t}. \quad (45)$$

$$\begin{aligned} 1) \int \frac{1 - \frac{M_0^2}{L_1 L_2} \cos \omega t}{1 - \frac{M_0^2}{L_1 L_2} \cos^2 \omega t} dt &= \frac{1}{\omega} \frac{1}{\sqrt{\tau}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \omega t}{\sqrt{\tau}} - \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{1-\tau}{\tau}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-\tau}{\tau}} \sin \omega t, \\ \int \frac{1 - \cos \omega t}{1 - \frac{M_0^2}{L_1 L_2} \cos^2 \omega t} dt &= \frac{1}{\omega} \frac{1}{\sqrt{\tau}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \omega t}{\sqrt{\tau}} - \frac{1}{\omega} \frac{1}{\sqrt{\tau}(1-\tau)} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-\tau}{\tau}} \sin \omega t. \end{aligned}$$

Vgl. auch Bild 5.

Bild 5. Obere Kurve: $f(t) = \frac{1}{\omega \sqrt{\tau}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \omega t}{\sqrt{\tau}},$

Gestrichelte Linie: $f(t) = \frac{t}{\sqrt{\tau}},$

Untere Kurve: $F(t) = -\frac{\sqrt{1-\tau}}{\tau} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-\tau}{\tau}} \sin \omega t.$

$$i_2 = -i_0 \frac{M_0 \left[\left\{ 1 - \frac{R_1}{L_1 \sqrt{x}} t \right\} \cos \omega t - \left\{ 1 - \frac{R_2}{L_2 \sqrt{x}} t \right\} \right]}{L_2 \left[1 - \frac{M_0^2}{L_1 L_2} \cos^2 \omega t \right]}. \quad (46)$$

Die ersten Summanden in den großen eckigen Klammern entsprechen den auch in der ersten Hauptlage vorhandenen Kurzschlußströmen. Daß jetzt $\cos \omega t$ statt wie früher gefunden, $\sin \omega t$ steht, rührt von der anderen Festsetzung des Zeitpunktes her (vgl. S. 151). Diese Beiträge sind auch jetzt wieder in ihrer Dämpfung hauptsächlich durch den Erregerwiderstand und die Erregerstreuung bestimmt. Die zweiten Glieder sind Zusatzglieder, die dem Kurzschluß in zweiter Hauptlage eigentümlich sind. Sie sind von gleicher Größenordnung wie die ersten Glieder. Für ihre Dämpfung kommt hauptsächlich Widerstand und Streuung der Statorspule in Betracht.

Mit dem Vorgehenden wird das Wesentliche des Kurzschlußvorganges getroffen. Will man Feinheiten herausarbeiten, so wird man zunächst in Analogie zu den Ergebnissen (S. 148) und die Ausdrücke $\left(1 - \frac{R_1}{L_1 \sqrt{x}} t \right)$ und $\left(1 - \frac{R_2}{L_2 \sqrt{x}} t \right)$ durch die Exponentialfunktion

$$e^{-\frac{R_1}{L_1 \sqrt{x}} t} \quad \text{und} \quad e^{-\frac{R_2}{L_2 \sqrt{x}} t}$$

ersetzen. Auch ist es nicht notwendig sich in den Gleichungen (20) und (21) bei den rechten Seiten auf die Mittelwerte zu beschränken. Wir können die Integration unter Zugrundelegung der Werte (17) und (18) genau durchführen. Wir würden so zu ähnlichen Feinheiten kommen, die Biermanns in seiner strengen Lösung des besonderen Falles $\frac{R_1}{L_1} = \frac{R_2}{L_2}$ beschrieben hat. Doch soll hiervon abgesehen werden.

Im übrigen kann ich auf die Arbeiten von Biermanns und Dreyfus verweisen.