dazwischen liegenden. Ich hoffe das Gesetz bald strenger nachweisen zu können, wenn ich die schon im Jahre 1842 angefangenen, aber leider durch eine sehr lange Krankheit unterbrochenen Messungen der thermo-elektrischen Ströme werde beendigt haben. Dann werde ich auch die Veränderungen noch genauer mittheilen, welche die obigen Reihen erleiden, wenn man die Temperaturunterschiede immer von 100° zu 100° wachsen läßt. Während z. B. die oben zuerst mitgetheilte Reihe für Temperaturdifferenzen von 100° gilt, ändert sie sich für weitere 100° nur darin, daß das Zink unter das Silber tritt; erst bei höheren Temperaturdifferenzen treten dann auch die Umkehrungen ein.

IV. *Ueber den Zusammenhang der Formeln, welche die Wärmeentwicklung durch den elektrischen und durch den galvanischen Strom bestimmen; von K. W. Knochenhauer.*

Nachdem ich die Formeln für die Wärmeentwicklung bei der Entladung der Batterie gefunden hatte, war mein Augenmerk unausgesetzt auf ihren Zusammenhang mit den für den galvanischen Strom geltenden Formeln gerichtet, da ich mich bei aller anscheinenden Verschiedenheit derselben doch nicht davon überzeugen konnte, daß beide Ströme, abgesehen von der freien Spannung, die beim elektrischen stattfindet, in ihren sonstigen Eigenschaften von einander abweichen sollten. Ausgehend hierbei von der Bemerkung, die ich meiner letzten Mittheilung als Zusatz angefügt habe, wonach die gleich geladene Batterie bei allen Veränderungen des Schließungsdrahtes dasselbe Wärmequantum liefert, mußte ich zunächst in den galvanischen Formeln, sofern nämlich die

Angaben des Multiplicators zugleich als Angaben für die Wärmeentwicklung gelten sollten, einen Fehler vermuthen. Denn setzt man in einer galvanischen Kette bei einem Widerstande $=1$ die Stromstärke $=C$, und bezeichnet den Widerstand der constanten Schließung mit W , eines variablen Theils dagegen mit w , so folgt die Stromstärke I aus:

$$I = \frac{C}{W + w}.$$

Eliminirt man aber w und fügt dafür eine beliebige Anzahl Zweigbahnen ein, deren Widerstände $w', w'', w''' \dots$

seyen, setzt man ferner zur Abkürzung $\frac{1}{w'} = \rho', \frac{1}{w''} = \rho''$ u. s. w., so ist die Stromstärke in einer beliebigen Zweigbahn, die den Index r habe:

$$I_r = \frac{C \frac{\rho_r}{\rho' + \rho'' + \dots \rho^n}}{W + \frac{1}{\rho' + \rho'' + \dots \rho^n}}.$$

Da nun die frei werdende Wärme in jedem Drahte sich seinem Widerstande proportional verhält, so hätten wir im ersten Falle, wo w eingeschoben war, mit Berücksichtigung der passenden Einheit für die hervortretende Wärme:

$$I = \frac{C w}{W + w},$$

dagegen im andern Falle in der r^{ten} Zweigbahn:

$$I_r = \frac{C \frac{1}{\rho' + \rho'' + \dots \rho^n}}{W + \frac{1}{\rho' + \rho'' + \dots \rho^n}}.$$

Wir wollen aber zur leichteren Uebersicht die Widerstände der Zweigbahnen unter einander gleich setzen, jeden $=w$, und zwar wieder so, daß ihre Leitungsfähigkeit zusammengenommen $=\frac{1}{w}$ bleibe, folglich:

$$\frac{1}{w} = \frac{n}{w_i} = n v_i,$$

so erhalten wir:

$$I = \frac{C \frac{1}{n v_i}}{W + \frac{1}{n v_i}},$$

und hiermit die freiwerdende Wärme in allen n Zweigen zusammen oder:

$$I = \frac{C \frac{n}{n v_i}}{W + \frac{1}{n v_i}} = \frac{n C w}{W + w},$$

Der galvanische Strom bewegt sich hier mit gleicher Leichtigkeit, es mögen w oder die n Zweigbahnen eingeschaltet seyn, und doch ist die entwickelte Wärme im letzteren Falle n mal so groß als im andern, offenbar ein Resultat, welches allen bisher bekannten Naturgesetzen widerspricht. Der Fehler verschwindet nur, wenn man zur Angabe der Wärme in den galvanischen Formeln wenigstens den Zähler quadriert. Als ich mir zur Constatirung der Thatsachen bereits den nothwendigen Apparat angefertigt hatte, erhielt ich die im ersten Hefte dieses Jahrganges der Annalen enthaltene Abhandlung von Lenz, welche meine Vermuthung nicht nur bestätigt, sondern selbst noch darin erweitert, daß sie zur Bestimmung der Wärme die galvanischen Formeln im Zähler und Nenner zu quadriren lehrt. Da ich nun mit meinem Apparate nicht das Ganze umfassen kann, auch nicht den Schein herbeiführen möchte, als wolle ich die von Lenz gefundenen Resultate irgendwie einer Prüfung unterwerfen, so werde ich von dem Dargebotenen unmittelbar ausgehen, und erst zum Schlusse eine kurze Angabe meiner Versuche hinzufügen, welche namentlich für Diejenigen, denen weniger umfangreiche Mittel zu Gebote stehen, einigermaßen beachtenswerth seyn mögen.

Es sey also eine galvanische Kette gegeben, die, wie oben, aus festen Theilen und an einer Stelle aus n Zweigbahnen besteht; wir bezeichnen die freiwerdende Wärme in der r ten Zweigbahn mit Θ^r , in der festen Schließung mit Θ , und in der gesammten Kette mit T , so haben wir, unter Beibehaltung der obigen Zeichen, in t Zeiteinheiten eine Wärme:

$$\Theta^r = \frac{C \frac{\rho^r}{(\rho' + \rho'' + \dots \rho^n)^2}}{\left[W + \frac{1}{\rho' + \rho'' + \dots \rho^n} \right]^2} \cdot t \dots \dots (1)$$

$$\Theta = \frac{C W}{\left[W + \frac{1}{\rho' + \rho'' + \dots \rho^n} \right]^2} \cdot t \dots \dots (2)$$

und
$$T = \frac{C}{W + \frac{1}{\rho' + \rho'' + \dots \rho^n}} \cdot t \dots \dots (3)$$

Nach den von mir mitgetheilten Formeln erhalten wir bei der Entladung der Batterie, wenn $\frac{1}{\lambda'}$ durch l' , $\frac{1}{\lambda''}$ durch l'' u. s. w ersetzt wird, übrigens die gleichen Bezeichnungen bleiben:

$$\Theta^r = \frac{C \left(\frac{l^r}{l' + l'' + \dots l^n} \right)^2 \omega^r}{W + \left(\frac{l'}{l' + l'' + \dots l^n} \right)^2 \omega' + \left(\frac{l''}{l' + l'' + \dots l^n} \right)^2 \omega'' + \dots} \quad (4)$$

$$\Theta = \frac{C W}{W + \left(\frac{l'}{l' + l'' + \dots l^n} \right)^2 \omega' + \left(\frac{l''}{l' + l'' + \dots l^n} \right)^2 \omega'' + \dots} \quad (5)$$

$$T = C \dots \dots \dots (6)$$

In diesen Formeln sind die Größen λ' , λ'' . . . nicht constant, sondern ändern sich mit dem vermehrten Widerstande. Da sie aber nach meinen früheren Angaben in ihrer Geltung erst durch die Anwesenheit der freien Spannung entstehen, und der galvanische Strom aus dem elektrischen entspringt, wenn diese freie Spannung ver-

schwindet, so darf man die Annahme geltend machen, daß λ' , λ'' , nach und nach in ϖ' , ϖ'' , übergehen, sobald die freie Elektrizität mehr und mehr zurücktritt, um endlich im galvanischen Strome diese äußersten Gränzwerte zu erlangen. Es werde demnach λ' , λ'' ... = ϖ' , ϖ'' oder l' , l'' = ϱ' , ϱ'' so gehen die Formeln (4), (5), (6) über in:

$$\Theta^e = \frac{C \frac{\varrho^e}{(\varrho' + \varrho'' + \dots \varrho^n)^2}}{W + \frac{1}{\varrho' + \varrho'' + \dots \varrho^n}} \dots \dots (7)$$

$$\Theta = \frac{C W}{W + \frac{1}{\varrho' + \varrho'' + \dots \varrho^n}} \dots \dots (8)$$

$$T = C \dots \dots \dots (9)$$

und der einzige Unterschied zwischen ihnen und den galvanischen besteht noch darin, daß wir auf die Zeit keine Rücksicht genommen haben. Bei der Batterie beobachten wir nämlich die gesammte Wärme, und lassen es außer Beachtung, innerhalb welcher Zeit diese entwickelt wird. Es sey aber die Zeit der Entladung = τ , so ist zunächst so viel ersichtlich, daß diese Zeit einmal von der Fläche (5) abhängt, auf welcher die Ladung vertheilt ist; diese Verhältnisse werden indess in den obigen Formeln schon durch die Constante C umfaßt; andererseits hängt die Zeit von dem Widerstande ab, den die Schließung darbietet, und τ steht in dieser Beziehung proportional zu $W + \frac{1}{\varrho' + \varrho'' + \dots \varrho^n}$; wollen wir also die Wärme

kennen lernen, die in t Zeiteinheiten unter sich gleichbleibender Entladungsweise entwickelt werden würde, so müssen wir die Formeln (7), (8), (9) noch mit $\frac{t}{\tau}$

multipliciren oder mit $\frac{At}{W + \frac{1}{\varrho' + \varrho'' + \dots \varrho^n}}$, worin A

eine Constante bezeichnet, die von den zum Grunde gelegten Einheiten abhängt. Wenn man diesen Factor den Formeln hinzufügt und der Einfachheit wegen abermals mit C die gesammten Constanten umfaßt, so bekommt man dieselben Formeln (1), (2), (3), welche für den galvanischen Strom gelten.

Die vorstehende Auseinandersetzung lehrt hienach, daß die elektrischen Formeln als die Grundformeln für dieß ganze Gebiet, die galvanischen als die für einen speciellen Fall daraus abgeleiteten angesehen werden müssen.

Uebrigens möchte es, nach Abschlufs der Untersuchung über die im Schließungsdrahte freiwerdende Wärme nicht als überflüssig erscheinen, wenn ich in aller Kürze den Gang der Darstellung andeute, den ich jetzt wählen würde, da ich in meinen früheren Aufsätzen aus Mangel an klarer Uebersicht über das Ganze Einzelnes nicht scharf und sicher genug entwickeln konnte. Man geht am besten von dem galvanischen Strome aus. Bezeichnet man die elektromotorische Kraft des galvanischen Elementes, oder die durch dasselbe bedingte galvanische Spannung mit k und *mißt* die Stromstärke I durch die Angaben einer Magnetnadel, so sey unter Beibehaltung der obigen Bezeichnungen $I=1$ bei $k=1$ und bei einem Widerstande der Kette $=1$, dann ist allgemein in der einfachen Schließung:

$$I = \frac{k}{W},$$

und wenn diese noch n Zweigbahnen enthält.

$$I = \frac{k}{W + \frac{1}{\rho' + \rho'' + \dots \rho^n}},$$

$$I = \frac{k \cdot \frac{\rho^x}{\rho' + \rho'' + \dots \rho^n}}{W + \frac{1}{\rho' + \rho'' + \dots \rho^n}}.$$

Die letzteren Ausdrücke lassen sich des Späteren wegen

auf folgende Weise ableiten. Kann der galvanische Strom, der auf der vereinigten Leitung schon einen Widerstand W findet, an einer Stelle durch zwei Leitungen oder Zweige hindurchgehen, von denen der eine einen Widerstand ω' , der andere einen Widerstand ω'' darbietet, so spaltet er sich in zwei Theile, von denen

jener $\frac{\frac{1}{\omega'}}{\frac{1}{\omega'} + \frac{1}{\omega''}}$, dieser $\frac{\frac{1}{\omega''}}{\frac{1}{\omega'} + \frac{1}{\omega''}}$ des ganzen ausmacht. Der

erstere Theil findet den Widerstand ω' , den er, da er

sich im Verhältnisse von $\frac{\frac{1}{\omega'}}{\frac{1}{\omega'} + \frac{1}{\omega''}}$ zum ganzen Strom als

der Einheit ausbreiten kann, nur als $\left(\frac{\frac{1}{\omega'}}{\frac{1}{\omega'} + \frac{1}{\omega''}} \right) \omega'$

empfindet, so daß das Hinderniß für den ganzen Strom

von diesem ersten Zweige her $\left(\frac{\frac{1}{\omega'}}{\frac{1}{\omega'} + \frac{1}{\omega''}} \right)^2 \omega'$ beträgt;

vom zweiten ist das Hinderniß $\left(\frac{\frac{1}{\omega''}}{\frac{1}{\omega'} + \frac{1}{\omega''}} \right)^2 \omega''$; der ganze

Widerstand wird also $= W + \frac{1}{\frac{1}{\omega'} + \frac{1}{\omega''}} = W + \frac{1}{\rho' + \rho''}$.

Dasselbe Raisonement läßt sich ohne weiteres auf eine beliebige Anzahl Zweige ausdehnen. — Die erregte Wärme in irgend einem Theile der Schließung wird ferner durch irgend ein Thermometer gemessen; dieß behalte bei allen Versuchen dieselbe Einrichtung, und lie-

fere bei der elektromotorischen Kraft des galvanischen Elementes $=1$, bei einem Widerstande $=1$ und innerhalb einer Zeit $=1$ eine Wärme $=\alpha$, so erhält man in t Zeiteinheiten ein Wärmequantum:

$$\Theta = \alpha I^2 t$$

$$\Theta^* = \alpha (I^*)^2 t,$$

worin Θ und Θ^* abweichend gegen früher nicht die in den ganzen Drähten, sondern nur die im Thermometerdraht freiwerdende Wärme bezeichnen. Die Richtigkeit dieser Angaben hat Lenz erwiesen.

Zweitens um einen elektrischen Strom zu erzeugen, ladet man eine Batterie von mehreren (5) gleichen Flaschen, bis sie sich über zwei beliebig weit von einander entfernte Kugeln entladet; die hiezu erforderliche Elektrizität kann durch die Zahl der Selbstentladungen einer Lanc'schen Flasche bestimmt werden, und betrage q solcher Schläge. Die Spannung der Elektrizität in der Batterie (entsprechend dem obigen k) steht dann proportional zu $\frac{q}{s}$, und findet die Entladung statt, so sey die Stromstärke bei $q=1$, $s=1$ und Widerstand $=1$ ebenfalls $=1$, so ist sie allgemein:

$$I = \frac{q}{s \cdot W}$$

Bei Zweigbahnen in der Schließung erfolgt hier die Theilung des Stromes nicht nach den Widerständen der Zweige, sondern nach ihren compensirten Längen, und zwar wenn diese bei zwei Zweigen λ' und λ'' sind, geht durch den

ersten der $\frac{1}{\lambda'}$ oder $\frac{l'}{l' + l''}$ te, durch den zweiten der

$\frac{1}{\lambda''}$ oder $\frac{l''}{l' + l''}$ te Theil des ganzen Stromes. Dem-

nach erhält man nach den vorher angegebenen Principien ganz allgemein in der vereinigten Leitung:

$$I = \frac{\frac{q}{s}}{W + \left(\frac{l'}{l' + l'' + \dots + l^n} \right)^2 w' + \dots}$$

und in der r ten Zweigbahn:

$$I^r = \frac{\frac{q}{s} \left(\frac{l^r}{l' + l'' + \dots + l^n} \right)}{W + \left(\frac{l'}{l' + l'' + \dots + l^n} \right)^2 w' + \dots}$$

Diese Ströme sind bisher noch nicht gemessen worden, da die Anwendung der Magnetnadel in dem vorliegenden Falle besondere Schwierigkeiten darbietet. Will man dagegen die freiwerdende Wärme bestimmen, so schiebt man wieder ein Thermometer ein; dieß liefere bei $q=1$, $s=1$, Widerstand $=1$, Zeit $=1$ eine Wärme $=\alpha$, so wäre, wenn sich die Entladung nach Belieben auf t Zeiteinheiten beschränken oder ausdehnen liefse, die im Thermometer freiwerdende Wärme:

$$\Theta = \alpha I^2 t$$

$$\Theta^r = \alpha (I^r)^2 t.$$

Allein bei der Entladung der Batterie muß man die ganze Zeit τ dieser Entladung nehmen, wie kurz oder lang sie auch ausfällt, und man kann durchaus kein beliebiges t herbeiführen; also bekommt man hier immer eine Wärme:

$$\Theta = \alpha I^2 \tau$$

$$\Theta^r = \alpha (I^r)^2 \tau.$$

Dieses τ der Entladung hängt einmal von der Fläche ab, auf welcher die Spannung $\frac{q}{s}$ verbreitet ist, und zwar wächst es proportional mit s , eben so aber auch proportional zum Widerstande in der Schließung; setzt man also die Zeit der Entladung bei $s=1$ und Widerstand $=1$ ebenfalls $=1$, so ist allgemein:

$$t + s \left\{ W + \left(\frac{l'}{l' + l'' + \dots + l^n} \right)^2 w' + \dots \right\},$$

und die obigen Formeln gehen über in:

$$\Theta = \frac{\alpha \frac{q^2}{s}}{W + \left(\frac{l'}{l' + l'' + \dots + l^n} \right)^2 w' + \dots}$$

$$\Theta^r = \frac{\alpha \frac{q^2}{s} \left(\frac{l^r}{l' + l'' + \dots + l^n} \right)^2}{W + \left(\frac{l'}{l' + l'' + \dots + l^n} \right)^2 w' + \dots}$$

Diese Formeln sind die von mir mitgetheilten, in denen nur die Factoren $\alpha \frac{q^2}{s}$ durch die einzelne Constante C ersetzt wurden, weil ich bei jeder besondern Versuchsreihe die Kugeln des Ausladers in gleichem, für den jedesmaligen Versuch am besten passenden Abstände von einander erhielt, und demnach bei unveränderter Batterie die Gröfsen q und s constant machte.

Ich lasse zum Schlusse die von mir angestellten Versuche folgen. Da mir jedes Mittel fehlt, die Stärke eines galvanischen Stroms auch nur annähernd richtig zu messen, so mußte ich meinen Mefsapparat so construiren, dafs ich die relative Stärke der Ströme zum Voraus bestimmen konnte. Ich nahm also zwei Maafs- oder Quartgläser, verschlofs sie $1\frac{1}{2}$ Zoll unter der Oeffnung durch eine Korkplatte, und führte durch diese erstens in zwei gläsernen Röhren einen 4 Fufs langen Kupferdraht ein, von dem 2' 1" zur Spirale gewunden im Innern des Glases frei waren, die übrigen 23" dagegen theils in den Glasröhren eingesiegelt, theils mit ihren freien Enden hervorragend. Zweitens steckte ich durch denselben Kork eine senkrechte offene Barometerröhre, welche bis auf den Boden des Glases reichte und nach aufsen noch um 10 Zoll herausstand. Hierauf gofs ich über die Korkplatte bis zum Rand hin eine geschmolzene Harzmasse ein, und sperrte so das Innere luftdicht

ab. Leider zerbrach mir späterhin das eine Glas, und ich mußte ein neues anfertigen, zu dem ich nur eine weitere Barometerröhre erhalten konnte; dadurch wurden die beiden Thermometer in ihren Angaben etwas ungleich, und mußten durch Versuche auf einander bezogen werden. — Nachdem durch die Röhren so viel gefärbtes Wasser eingefüllt war, daß es in diesen über der Harzmasse stehen blieb, und ferner zwei in $\frac{1}{10}$ Par. Zoll eingetheilte Skalen angebracht waren, stellte ich die beiden Gläser in einen größeren Kasten und stopfte den ganzen Zwischenraum dicht mit Heu aus; hierauf leitete ich den Strom eines in schwach gesäuertem Wasser stehenden Calorimotors entweder durch beide Gläser hinter einander, oder so durch beide zugleich, daß jedes einen Theil des Stromes aufnahm, den ich durch Hinzufügung von 2', 4' oder 8' Kupferdraht in den einen Zweig im Verhältnisse von 1 : $1\frac{1}{2}$, 1 : 2 und 1 : 3 abtheilen konnte. Wenn der Strom eintrat, erhob sich die Flüssigkeit in den beiden Röhren langsamer oder schneller bis zum Maximum des Steigens, je nachdem beide Thermometer hinter oder neben einander verbunden waren, der Strom also einen geringeren oder stärkeren Widerstand fand; darauf sanken beide Angaben langsam hinunter, und erreichten etwa nach 10 Minuten einen, eine längere Zeit hindurch fest bleibenden Stand, der die wahre Wärmeentwicklung liefert, nämlich die Gröfse, die, entstehend im Drahte, unmittelbar wieder von der Hülle in gleicher Zeit absorbirt wird. Sollen die Zahlen in den einzelnen Versuchen unter einander vergleichbar werden, so muß man vor jeder Beobachtung mehrere Stunden, am besten über Nacht, den Apparat ruhig stehen lassen, damit er die Temperatur des ungeheizten Zimmers annehme, dann die Flüssigkeit in den Röhren durch Ansaugen etwas bewegen, um die Wände feucht zu machen, dasselbe auch fortsetzen, wenn die Flüssigkeit gestiegen ist, weil man sonst, namentlich bei

der engeren Röhre (1,6 Par. Linie Durchmesser), leicht eine um 1 Grad zu kleine Angabe erhalten würde. — Die Versuche ergaben:

A. Beide Thermometer hinter einander.

Therm. I.	Therm. II.	
1) 19,7	17,3	II : I = 1 : 1,139
2) 17,7	15,6	= 1 : 1,135
		<hr/> Mittel = 1 : 1,137.

Die nur annähernd genauen Ausmessungen der Apparate gaben die Ausdehnung der inneren Luft für 1 Zoll Steighöhe wegen der vermehrten Compression zu 0,00269, dazu in I die wirkliche Ausdehnung = 0,00040 und in II = 0,00081, also die ganze Ausdehnung in I = 0,00309 und in II = 0,00353, ein Verhältniß von 1 : 1,142, was mit dem vorstehenden durch Versuche gefundenen Werthe ziemlich genau übereinstimmt. Ich werde hiernach die Angaben des zweiten Thermometers durch Multiplication mit $1\frac{1}{7}$ corrigiren.

B. Der eine Zweig um 2' K. verlängert oder Verhältniß der Stromstärken = 1 : $1\frac{1}{2}$.

Therm. I.	Therm. II corr.	Verhältniß der Erwärmung.
1) 10,2	22,4	1 : 2,20
2) 8,8	18,7	1 : 2,13
3) 18,8	8,1	1 : 2,32
4) 24,6	11,3	1 : 2,18
		<hr/> Mittel 1 : 2,21 statt 1 : 2,25.

C. Der eine Zweig um 4' K. verlängert oder Verhältniß der Stromstärken = 1 : 2.

Therm. I.	Therm. II corr.	Verhältniß der Erwärmung.
1) 27,1	7,3	1 : 3,71
2) 24,6	7,1	1 : 3,47
3) 18,0	5,0	1 : 3,60
4) 7,1	25,3	1 : 3,56
5) 6,2	23,3	1 : 3,76
6) 6,7	23,8	1 : 3,55
		Mittel 1 : 3,61 statt
		1 : 4,00.

D. Der eine Zweig um 8' K. verlängert oder Verhältniß der Stromstärken = 1 : 3.

Therm. I.	Therm. II corr.	Verhältniß der Erwärmung.
1) 17,1	2,17	1 : 7,88
2) 3,7	27,7	1 : 7,49
		Mittel 1 : 7,69 statt
		1 : 9,00.

Die Differenzen der Beobachtung gegen die Berechnung mögen theils aus der Ungenauigkeit der Annahme entstehen, daß der Wärmeverlust mit der Erwärmung proportional wächst; zum großen Theil entspringen sie aber auch aus den Strömungen der eingeschlossenen Luft, die durch die größere Wärme mehr begünstigt werden. In jedem Falle sind indeß die Differenzen zu geringfügig, als daß dadurch die Richtigkeit der Formeln irgendwie in Zweifel gezogen werden könnte.